Pregled:

Brian C. Hall: Quantum theory for mathematicians

Gerald B. Folland: Quantum Field Theory: A Tourist Guide for Mathematicians

1. klasična mehanika

   Newton ⇝ Hamilton

   primjer: harmonijski oscilator (Hamiltonijan, dif. jednadžbe, rješenje)

2. kvantizacija: što i zašto: $\hat{x}$ i $\hat{p}$? pristup preko očekivanja.

3. kvantni harmonijski oscilator

Klasična mehanika – Newtonov zakon

Promotrimo prvo gibanje jedne čestice po pravcu (gibanje u $\mathbb{R}^1$).

- $x(t)$ pozicija u vremenu t, $v(t) := \dot{x}(t)$ je brzina u trenutku t

  ($a(t) := \dot{v}(t)$ akceleracija)

sila (kao funkcija položaja)

(sila je "zadana")

$$F(x(t)) = m a = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Newtonov zakon

$$x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0$$

početni uvjeti

Ako je F glatka fja. onda $\exists !$ je rješenje diff. jednadžbe je jedinstveno lokalno oko točke t_0

- Primjer: (harmonijski oscilator)

Ako je sila dana Hookovim zakonom $F(x) = -k \cdot x$, $k > 0$,

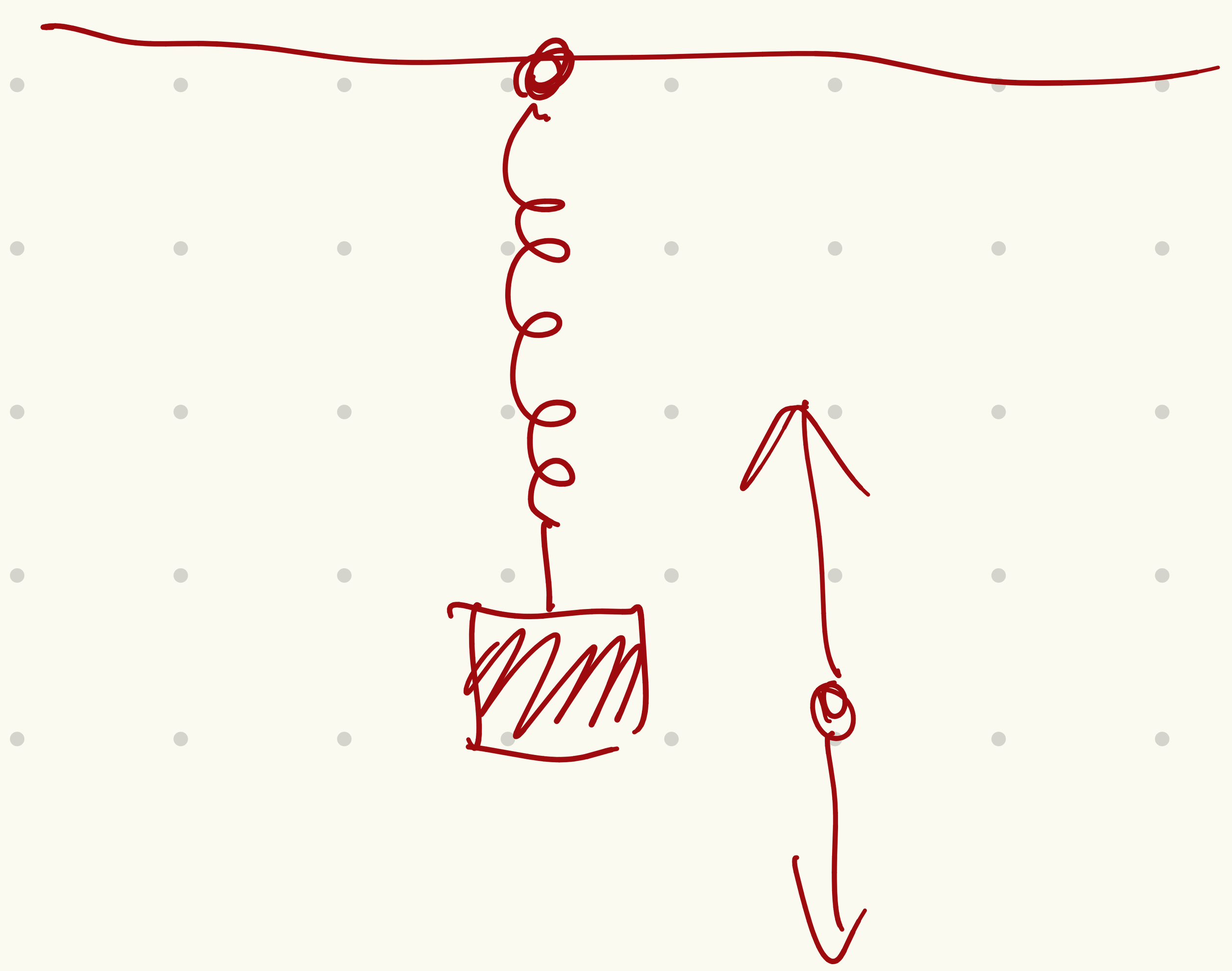
onda Newtonov zakon daje

$$-k \cdot x(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Rješenje je: $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ gdje je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

frekvencija oscilacije

opisuje ponašanje mase na zavojnici



Pristup preko energiji

$$E(x,v) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$$

po definiciji:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

kinetička energija

potencijalna energija ili potencijal

Teorem: $E(x(t), \dot{x}(t))$ ne ovisi o t

zakon očuvanja energije

Hamiltonova mehanika

U ovom pristupu na energiju gledamo kao na funkciju položaja x i momenta $p = mv$ – tu funkciju više ne zovemo energija nego

Hamiltonijan

$$H(x,p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)$$

ili u slučaju **n čestica**

$\mathbb{R}^{2n}$ je prostor stanja

$$H(\underline{x}, \underline{p}) = \frac{1}{2m_j} \sum p_j^2 + V(\underline{x}) \qquad \left(\boxed{H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}} \right.$$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$

$p_j = m_j \dot{x}_j$)

Newtonov zakon:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \left(\Longleftrightarrow \dot{x}_j = \frac{p_j}{m_j} \right)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad \left(\Longleftrightarrow \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial x_j} = F_j \right)$$

Hamiltonove jednadžbe $\leftarrow$ funkcija H (uz početne uvjete) određuje gibanje

Poissonove zagrade (Poisson bracket)

$f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$
glatke

$$\{f,g\}(\underline{x},\underline{p}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)$$

Svojstva:

1. $\{f, g + ch\} = \{f,g\} + c\{f,h\} \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
3. $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ ← Leibnitzovo pravilo
4. $\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}$ ← Jacobijev identitet

$(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\,,\})$ je Lijeva algebra

$\{f,\cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ je "derivacija"

Propozicija: $\{x_j, x_k\} = 0$ $\{x_j, p_k\} = \delta_{kj}$

$\{p_j, p_k\} = 0$

Zašto $\{\ ,\ \}$?

na funkciju f gledamo kao na observablu

Propozicija: Ako je $(x(t), p(t))$ rješenje Hamiltonovih jednadžbe tada za svaku glatku fju. f na $\mathbb{R}^{2n}$ imamo

$$\frac{d}{dt} f(x(t), p(t)) = \{f, H\}(x(t), p(t))$$

opisuje kako se observabla mijenja u vremenu

Pišemo: $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$

Kvantna mehanika

klasično gibanje n čestica

- prostor stanja $\mathbb{R}^{2n}$; vektor stanja $(\underline{x}, \underline{p})$
- observable (pozicija, moment, energija ...)

su proizvoljne funkcije $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

observabla u kvantnoj teoriji je operator $\hat{f}$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$

kvantna teorija

valna fja.

- prostor stanja $L^2(\mathbb{R}^n)$; vektor stanja $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$\leadsto$ za $n=1$ $\quad \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ valna fja.

je funkcija položaja x i

$|\psi(x)|^2$ je vjerojatnosna gustoća za poziciju čestice, tj.

$P(E) = \int_E |\psi(x)|^2 \, dx$ je vjerojatnost da se čestica nalazi u u nekom skupu $E \subset \mathbb{R}$

Observable u kvantnoj teoriji nisu funkcije kao u klasičnom slučaju nego operatori (linearni, hermitski) na prostoru stanja (Hilbert. prostoru).

neograničeni! domena im ne mora biti cijeli $L^2(\mathbb{R}^n)$

definicija hermitskog operatora (self-adjoint) je kompliciranija nego za ograničene operatore

Ideja je da ti operatori, preko skalarnog produkta, određuju

očekivanja mjerenja!

Sjetimo se, za observablu A i stanje ψ, imali smo

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle,$$ gdje je $\langle A \rangle$ "očekivanje" mjerenja observable A.

Operator pozicije $\hat{X}$: po definiciji valne funkcije $\psi(x)$ vrijedi:

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 \, dx$$

gdje je $E(x)$ očekivanje mjerenja pozicije x (čestice koja se "giba" u $\mathbb{R}$)

Dakle, ako želimo

$$\langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle = E(x)$$ gdje je skalarni produkt na

$L^2(\mathbb{R})$ dan s $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(x) \, dx$, vidimo da trebamo definirati

$$(\hat{X} f)(t) = t \cdot f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Malo o neograničenim operatorima: • Uočimo: $\|\hat{X}(1_{[n,n+1]})\| \geq n \|1_{[n,n+1]}\|$

pa $\hat{X}$ nije ograničen.

Vrijedi: Ako je linearan operator A na $L^2(\mathbb{R})$ t.d. $\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$ za sve

φ i ψ (posebno ako je A definiran na cijelom $L^2(\mathbb{R})$), onda je A ograničen.

$\Rightarrow \hat{X}$ nije definiran na cijelom $L^2(\mathbb{R})$

Def.: neograničen operator na $L^2(\mathbb{R}) =: H$ je linearan operator sa gustog potprostora od H u H.

$\rightsquigarrow$ za neograničene operatore "prirodna definicija" samo adjungiranosti $\big(\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$ za sve ψ, φ iz domene$\big)$ nije dobra! (ne daje "dobar" spektralni teorem)

uočimo: $\hat{X}$ nema svojstvenih vektora

Operator momenta $\hat{p}$: (heuristika)

jedna od potvrda hipoteze je double-slit eksperiment s elektronima – interferencijski uzorak ovisi o brzini (momentu) elektrona u skladu s hipotezom

de Broglieva hipoteza: Ako valna fja. ima (prostornu) frekvenciju k
("matter waves")
$\nearrow$
prečka valne fje.
onda je moment $p = \hbar k$. $\left(= \frac{h}{\lambda}\right)$

tj. valna fja. $\psi(x) = e^{ikx}$ ($k \in \mathbb{Z}$) reprezentira česticu s momentum $p = \hbar k$

Ali $\psi(x) \notin L^2(\mathbb{R})$! Pretpostavimo na trenutak da je

$\psi(x)$ 2π-periodična na $\mathbb{R}$ i $\int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2 dx = 1$, tj. neka je

$\psi(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ $\rightsquigarrow$ čestica s $p = \hbar k$.

$\psi(x)$ je funkcija na kružnici

F-je. oblika $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ za $k \in \mathbb{Z}$, čine ortonormiranu bazu za $L^2([0, 2\pi])$

pa se tipična valna fja. na kružnici može prikazati:

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{gdje} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = 1$$

$\updownarrow$

za česticu s tom valnom funkcijom mjerenje momenta će dati vrijednost $\hbar k$ s vjerojatnosti $|a_k|^2$

Očekivanje je $E(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hbar k \, |a_k|^2$ pa ako želimo

$E(p) = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ operator $\hat{p}$ možemo

odabrati tako da vrijedi $\hat{p} \, e^{ikx} = \hbar k \, e^{ikx}$ tj.

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Natrag na $L^2(\mathbb{R})$ ....

Fourierova transformacija:

$\psi \mapsto \hat{\psi}$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{\psi}(k)\, dk$$

Fourierova transf. je definirana na $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ali se može proširiti do unitarnog operatora na $L^2(\mathbb{R})$ (ako je $f_n \in S(\mathbb{R})$ niz t.d. $f_n \xrightarrow{L^2} f \in L^2(\mathbb{R})$, onda po Plancherelovom teoremu niz $\hat{f}_n$ je Cauchyjev i konvergira k nekoj fji. $g \in L^2(\mathbb{R})$ jer je $L^2(\mathbb{R})$ potpun; definiramo $\hat{f} := g$)

gdje je $$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi(x)\, dx.$$

znamo (Plancherelov teorem) da je $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(x)|^2 dx = 1$$

pa je prirodno razmišljati o $|\hat{\psi}(k)|^2$ kao o gustoći vjerojatnosti za moment te čestice.

Propozicija: Za operator momenta $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ za sve "dovoljno lijepe"

npr. iz Schwartzovog prostora

$\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ imamo

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar k \, |\hat{\psi}(k)|^2 \, dk$$

ovo možemo interpretirati kao očekivanje mjerenja momenta.

Dakle, $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$ i $\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \dfrac{d\psi}{dx}$.

komutator

$[A, B] = AB - BA$

Propozicija: $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar I$ (tj. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$)

dokaz: $\hat{p}\hat{x}\psi = -i\hbar \dfrac{d}{dx}(x\psi(x)) = -i\hbar\psi(x) - i\hbar x \dfrac{d\psi}{dx}$

$= -i\hbar\psi(x) + \hat{x}\hat{p}\psi$

Kvantizacija općenito

proizvoljne funkcije na prostoru stanja

je metoda kojom proizvoljnoj klasičnoj observabli f pridružimo kvantnu observablu (hermitski operator) A_f. Idealno želimo da

npr. $\exp(A_f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A_f^k$

a) $A_\alpha = \alpha I \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

b) Ako je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova fja. onda je $A_{\phi \circ f} = \phi(A_f)$

ako je A_f ograničen

ili ako ima svojstvene vektore čine orto n. bazu, inače nam treba spektralni teorem za (neograničene) hermitske operatore.

c) $A_{f+g} = A_f + A_g$

d) $A_{\{f,g\}} = \frac{1}{i\hbar} [A_f, A_g]$

No može se pokazati da nije moguće zadovoljiti sve ove uvjete, oni više služe kao smjernice. Pokažimo sada koja je motivacija za uvjet d).

Uvjet d):

Ranije smo spomenuli da ako je $(x(t), p(t))$ rješenje Hamiltonove jednadžbe i f observabla onda

$$\frac{d}{dt} f(x(t), p(t)) = \{f, H\}(x(t), p(t)).$$

Slično, ako je $\psi(t)$ rješenje Schrödingerove jednadžbe i A hermitski operator na prostoru stanja (observabla), onda uz određene tehničke uvjete vrijedi

Hamiltonijan

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \left\langle \frac{1}{i\hbar}[A, \hat{H}]\right\rangle_{\psi(t)} \quad \text{gdje je}$$

$\langle B\rangle_{\psi(t)}$ očekivana vrijednost observable B na stanju $\psi(t)$.

Ova dva izraza motiviraju zahtjev $A_{\{f,g\}} = \frac{1}{i\hbar}[A_f, A_g]$.

primjena u kvantnoj teoriji polja

Kvantni harmonijski oscilator

koristi se za modeliranje: fonona (eng. phonons), molekularnih vibracija - npr. vibracija dvoatomnih molekula

$(k>0)$

Kao i kod harmonijskog oscilatora $F(x) = -kx$, uz

$F(x) = -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$ slijedi da je $V(x) = \dfrac{kx^2}{2}$ pa je Hamiltonijan

kvantnog harmonijskog osc. diferencijalni operator na $L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{x}^2}$$

kako je frekvencija $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$k = m\omega^2$ pa

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2\right)$$

Zanimaju nas rješenja Schrödingerove jednadžbe u $L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\psi}$$

Prvi korak je pronaći svojstvene vektore (i vrijednosti) Hamiltonijana $\hat{H}$.

Definiramo operator a (lowering operator)

ili annihilation

$$a = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$ (pažnja, a nije ograničen)

Vrijedi $$a^{\dagger} = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$ (jer su $\hat{x}$ i $\hat{p}$ hermitski)

rising operator

ili creation operator

Računamo

$$a^\dagger a = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left((m\omega\hat{X})^2 + \hat{p}^2 + i m\omega [\hat{x}, \hat{p}] \right)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 \right) - \frac{1}{2} I$$

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$

jer općenito vrijedi $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + [A, B]$

Pa $\boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2} I \right)}$

Važno: $[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left([m\omega\hat{X}, -i\hat{p}] + [i\hat{p}, m\omega\hat{x}] \right) = \ldots = I$

Iz čega slijedi: $[a, a^\dagger a] = a$ i $[a^\dagger, a^\dagger a] = -a^\dagger$

Propozicija: Neka je ψ svojstveni vektor za $a^\dagger a$ sa svojst. vrijednosti λ.

Tada
$$(a^\dagger a)(a\psi) = (\lambda - 1)\, a\psi$$
$$(a^\dagger a)(a^\dagger \psi) = (\lambda + 1)\, a^\dagger \psi .$$

zašto?

$(a^\dagger a)(a\psi) = a^\dagger a a \psi$

$= \left(-[a, a^\dagger a] + a a^\dagger a\right)\psi$

$= -a\psi + a(a^\dagger a \psi) = (\lambda - 1)a$

Dakle, $a\psi$ je ili 0 ili svojstveni vektor od $a^\dagger a$ sa smanjenom svoj. vrijednosti. Slično i za $a^\dagger$. Operatori a i $a^\dagger$ preslikavaju svojstvene vektore u svojst. vektore.

$a^\dagger a \psi = \lambda \psi \implies \lambda \langle \psi, \psi \rangle = \langle \psi, a^\dagger a \psi \rangle \overset{\uparrow}{=} \langle a\psi, a\psi \rangle \geq 0$

definicija adjungiranog operatora.

$\implies \boxed{\lambda \geq 0}$ sve sv. vrijednosti su ne-negativne

pretp. $\lambda > 0$.

$\implies \exists^{\text{najmanji}} N \in \mathbb{N}$ t.d. $a^{N+1}\psi = a(a^N\psi) = 0$. Def. $\psi_0 = a^N \psi$

Tada je $a\psi_0 = 0$ i $a^\dagger a \psi_0 = 0$, tj. ψ_0 je sv. vektor za $a^\dagger a$ sa sv. vrij. 0.

Def. $\psi_n := (a^\dagger)^n \psi_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$

Teorem: $a^\dagger \psi_n = \psi_{n+1}$ $\quad$ $a \psi_{n+1} = (n+1)\psi_n$

$a^\dagger a \psi_n = n \psi_n$

$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = n! \, \delta_{n,m}$

Teorem: $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ortogonalna baza za $L^2(\mathbb{R})$.

"dokaz": neka je V potprostor generiran konačnim linearnim kombinacijama elemenata $\{\psi_n\}$ i neka je $\bar{V}$ njegov zatvarač u $L^2(\mathbb{R})$.

Ako $\bar{V} \neq L^2(\mathbb{R})$ onda je njegov ortog. komplement $\bar{V}^{\perp} = \{0\}$ također invarijantan na a i $a^{\dagger}$, pa ako ponovimo prethodnu analizu za $\bar{V}^{\perp}$ dobit ćemo novo osnovno stanje $\tilde{\phi}_0 \in \bar{V}^{\perp}$ (t.d. je $a\tilde{\phi}_0 = 0$).

Ali to nije moguće jer bi to značilo da postoje dva nezavisna rješenja (ϕ_0 i $\tilde{\phi}_0$) jednadžbe $a\psi = 0$.

Funkcije ψ_n možemo izračunati.

Radi jednostavnosti, neka je $\tilde{x} := \frac{x}{D}$, $D := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, zamjena varijabli.

Tada je $\quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} + \frac{d}{d\tilde{x}}\right)$ i $a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}}\right)$.

$$a\psi_0 = 0 \implies \frac{d}{d\tilde{x}}\psi_0(\tilde{x}) = -\tilde{x}\,\psi_0(\tilde{x})$$

$$\implies \psi_0(\tilde{x}) = C\,e^{-\tilde{x}^2/2} \implies \psi_0(x) = \sqrt{\frac{\pi m\omega}{\hbar}}\;e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ako želimo da je $\psi_0(\tilde{x})$ norme 1 onda je $C = \frac{\sqrt{\pi}}{D}$

Teorem: $\psi_n(\tilde{x}) = H_n(\tilde{x})\,\psi_0(\tilde{x})$ gdje je H_n polinom stupnja n dan induktivno:

$$H_0(\tilde{x}) = 1$$

$$H_{n+1}(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\tilde{x}\,H_n(\tilde{x}) - \frac{d\,H_n(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right)$$

Hermitovi polinomi

Veza između kvantnog i klasičnog harmonijskog oscilatora

Uočimo da su kvantna stanja $\psi_n(x)$ stacionarna - Schrödingerova jednadžba

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad \text{implicira} \quad (H\psi_n = \lambda_n \psi_n)$$

$$\psi_n(x,t) = e^{tH/i\hbar} \psi_n(x,0) = e^{t\lambda_n/i\hbar} \psi_n(x)$$ što fizikalno predstavlja

isto stanje kao i $\psi_n(x)$. Koja je onda poveznica s klasičnim oscilatorom?

Za $a,b \in \mathbb{R}$ definirajmo stanje

$$\psi_{a,b}(\tilde{x}) = \pi^{-1/4} e^{-(\tilde{x}-a)^2/2} e^{ib\tilde{x}}$$

Stanje $\Psi_{a,b}$ minimizira neodređenost pozicije i momenta: $\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar}$ relaciju neodređenosti za $u \in L^2(\mathbb{R})$

gdje je $\Delta x = \left[\inf_{a\in\mathbb{R}} \int (x-a)^2 |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}$, $\Delta y = \left[\inf_{b \in \mathbb{R}} \int (p-b)^2 |\hat{u}(p)|^2 dp \right]^{1/2}$

Jednakost vrijedi za $u(x) = \Psi_{a,b}(x)$.

Može se izračunati da su očekivane vrijednosti pozicije i momenta stanja $\Psi_{a,b}$ jednake a i b redom.

Uzmimo $\Psi_{a,0}$ za početno stanje kvantnog oscilatora (što odgovara početnom stanju klasičnog oscilatora s položajem $x_0 = a$ i brzinom $v_0 = 0$).

Kako se očekivanje pozicije i momenta $\Psi_{a,0}(t)$ mijenja s vremenom?

Pokazat ćemo, upravo onako kao i kod klasičnog oscilatora!

Lema: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\pi^{-1/4} e^{-(x-z)^2/2} = e^{-z^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \phi_k(x) z^k$

gdje je $\phi_k(x)$ malo drugačije normalizirani $\psi_k(x)$. Preciznije:

- $\phi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$
- $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k!}} (A^+)^k \phi_0$ gdje je $A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$ $/\!/$ a^+ nakon zamjene varijabli $x \leftrightarrow \tilde{x}$

Dokaz: Vrijedi $A^+ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x f(x) - f'(x)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^2/2} \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2/2} f(x)\right]$

pa je $(A^+)^k f(x) = \frac{(-1)^k}{2^{k/2}} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k}\left[e^{-x^2/2} f(x)\right]$

odnosno $$\phi_k(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{k!}} (A^+)^k e^{-x^2/2} = \frac{(-1)^k}{\pi^{1/4}\sqrt{2^k k!}} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^k k!}} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dw^k} e^{-(x-w)^2} \Big|_{w=0}$$

Prema Taylorovom teoremu, za svaki $w \in \mathbb{C}$ imamo

$$\pi^{-1/4} e^{-(x-w)^2} = e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2^k}{k!}}\, \phi_k(x)\, w^k$$

Neka je $w := \frac{1}{2} z$. Tada je $e^{-(z-w)} = e^{-x^2/2} e^{-(x-z)^2/2} e^{z^2/4}$ tvrdnja slijedi.

$\blacksquare$

Izračunajmo sada evoluciju stanja $\Psi_{a,0}$!

Definirajmo: $H_0 := A^\dagger A + \frac{1}{2} I$ $\quad /\!/ \ \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$ pa je stanje u trenutku t jednako

$$e^{-itH_0}\Psi_{a,0}(x) = e^{-a^2/4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-it(k+1/2)}}{\sqrt{2^k k!}}\phi_n(x)\,a^k$$

$$= e^{-a^2/4}e^{-it/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^k k!}}\phi_n(x)\left(a e^{-it}\right)^k$$

$$= e^{-a^2/4}e^{(ae^{-it})^2/4}e^{-it/2}\pi^{-1/4}e^{-(x-ae^{-it})^2/2}$$

$$= \ldots = e^{i(a^2\sin t\cos t - t)/2}\,\Psi_{a\cos t,\,-a\sin t}(x)$$

broj norme 1, fizikalno nezanimljiv

stanje čija je očekivana pozicija $a\cos t$ (i brzina $-a\sin t$)

kao i kod klasičnog oscilatora!