Modularna grupa: $SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$

J.P. Serre: Course in arithmetic

$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) : ad - bc = 1 \right\}$

Ako želimo razumijeti grupu pronađimo skup na koji djeluje!

preslikavanje $G \xrightarrow{\pi} \text{Bijekcije}(S)$

$g \longmapsto \pi(g)$ ... kraće pišemo g

t.d. a) $\forall g_1, g_2, x \quad g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)(x)$

b) $e(x) = x \quad \forall x$

SL_2 prirodno djeluje "zamjenom" varijabli:

za $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g(x, y) = (\underbrace{ax + by}_{= \tilde{x}}, \underbrace{cx + dy}_{\tilde{y}})$

$\Downarrow$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad g^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$

Primjer: kvadratne forme $Ax^2 + Bxy + Cy^2$

fiksne diskriminante $d = B^2 - 4AC > 0$

$\rightsquigarrow$ broj klasa $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ = broj orbita

Rešetke: $\Lambda \subset \mathbb{C}$ slobodna abelova grupa dimenzije 2 t.d. $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{C}$

e.g. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ za neke $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ t.d. $\mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2 = \mathbb{C}$. Pišemo $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$.

Oznake: $\mathcal{R}$ = skup svih rešetki u $\mathbb{C}$

$$\mathcal{M} = \left\{ (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*, \ \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0 \right\}$$

ω_1, ω_2 su linearno nezavisni nad $\mathbb{R}$

Definiramo surjektivno preslikavanje:

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{R}$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

Kada dva elementa iz $\mathcal{M}$ definiraju istu rešetku?

$SL_2(\mathbb{Z})$ djeluje na $\mathcal{M}$: za $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ definiramo

dokažite: $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right) > 0$

$$g(\omega_1, \omega_2) = (a\omega_1 + b\omega_2, \ c\omega_1 + d\omega_2) = (\omega_1', \omega_2')$$

Ako $z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ i $z' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ onda

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} = g \cdot z$$ gdje $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ djeluje

na gornju poluravninu $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ Möbiusovom transformacijom.

Očito je $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(g(\omega_1, \omega_2))$!

(jer se npr. ω_1 može prikazati kao cjelobrojna linearna kombinacija elemenata ω_1' i ω_2')

Propozicija 1: Dva elementa iz $\mathcal{M}$ definiraju isto rešetku ako i samo ako se nalaze u istoj orbiti od $SL_2(\mathbb{Z})$. (dokaz: d.z.)

$\Rightarrow$ skup rešetki $\mathcal{R}$ možemo identificirati sa skupom orbita djelovanja $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{M}$

(kažemo još da je $\mathcal{R}$ kvocijent djelovanja $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{M}$ — oznaka: $\mathcal{M}/SL_2(\mathbb{Z})$)

$\mathbb{C}^\times$ djeluje na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{M}$ skaliranjima:

$\Lambda \mapsto \lambda \Lambda$ odnosno $(\omega_1, \omega_2) \mapsto (\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$

Kvocijent $\mathcal{M}/\mathbb{C}^\times$ možemo identificirati s $\mathbb{H}$

preslikavanjem

$\varphi : \mathcal{M}/\mathbb{C}^\times \to \mathbb{H}$, $\quad (\omega_1, \omega_2) \xmapsto{\varphi} \frac{\omega_1}{\omega_2}$

Ovo preslikavanje je morfizam $SL_2(\mathbb{Z})$-djelovanja

$$\varphi(g(\omega_1, \omega_2)) = g \cdot \varphi(\omega_1, \omega_2) \quad \forall g, (\omega_1, \omega_2)$$

(jer je $\frac{\omega_1'}{\omega_2'} = g \frac{\omega_1}{\omega_2}$ i djelovanja od $\mathbb{C}^\times$ i $SL_2(\mathbb{Z})$ komutiraju)

Uočimo da $-I$ djeluje trivijalno na $\mathcal{M}/\mathbb{C}^\times$ i $\mathbb{H}$ pa onda imamo

izomorfizam djelovanja

$$\left(\mathcal{M}/\mathbb{C}^\times\right)/PSL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{i} \quad \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$$

Grupu $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \pm I$ zovemo **modularna grupa**. Oznaka: Γ

Kako je

$$\left(\mathcal{M} / \mathbb{C}^\times\right) / \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} / \mathbb{C}^\times$$

jer djelovanja komutiraju

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

Možemo identificirati

$$\mathcal{R} / \mathbb{C}^\times \quad i \quad \mathbb{H} / \Gamma$$

preko preslikavanja $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \frac{\omega_1}{\omega_2}$

Napomena: Svakoj rešetci Λ možemo pridružiti kompleksan torus (ili eliptičku krivulju) $\mathbb{C} / \Lambda =: E_\Lambda$.

Može se pokazati da su dva torusa E_Λ i $E_{\Lambda'}$

(što to znači?)

izomorfna ako i samo ako su rešetke

Λ i Λ' homotetični (tj. $\Lambda = \lambda \cdot \Lambda'$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}^*$)

pa skup $\mathbb{H}/_\Gamma = \mathcal{R}/_{\mathbb{C}^*}$ možemo identificirati

sa skupom klasa izomorfizama eliptičkih krivulja.

Koristeći djelovanje modularne grupe Γ na $\mathbb{H}$

možemo odrediti njene generatore.

Definirajmo $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tada $Sz = -\frac{1}{z}$ i $Tz = z+1$ $\forall z \in \mathbb{H}$.

Teorem 2: Grupa Γ je generirana s S i T.

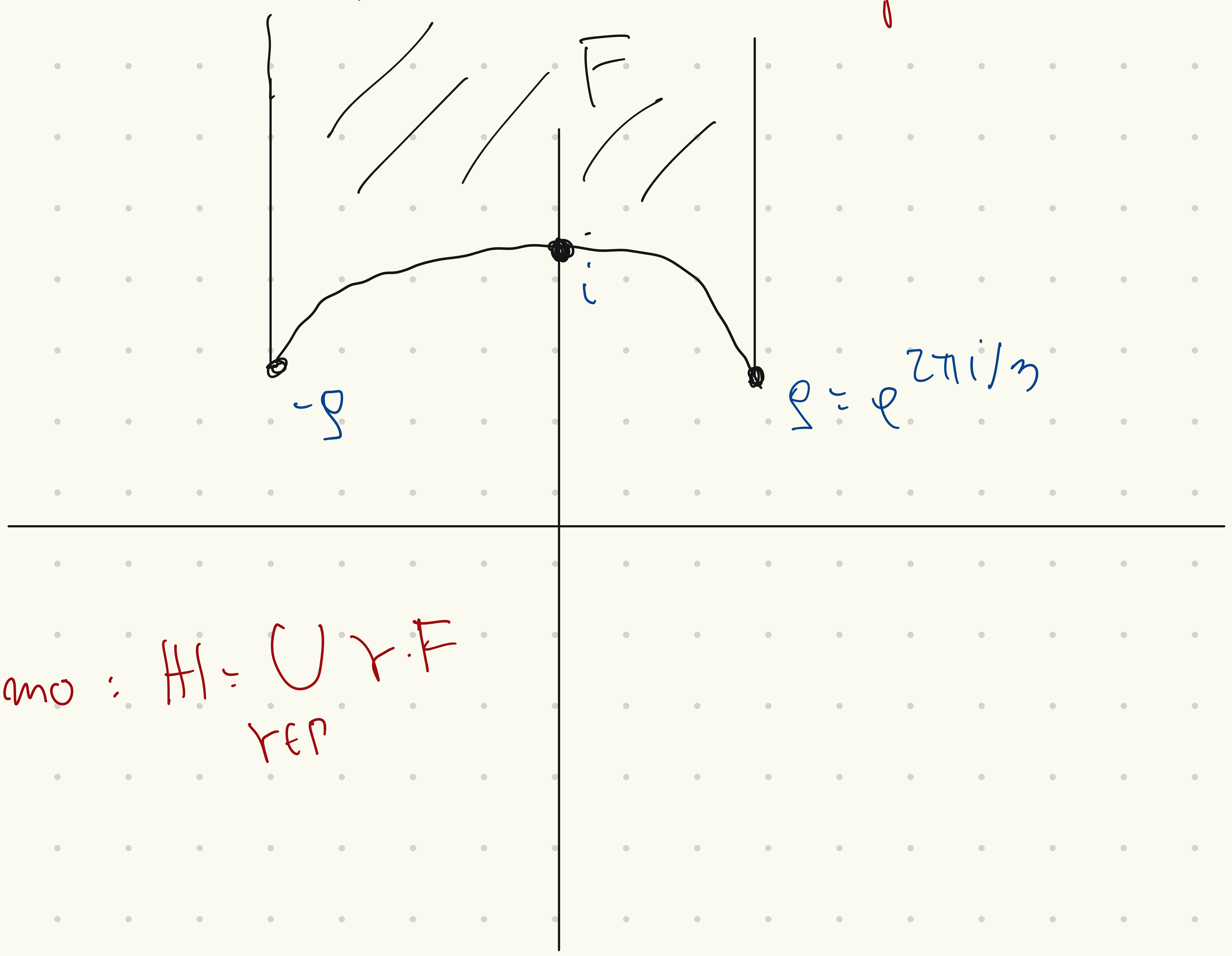
Teorem ćemo dokazati zaobilaznim putem.

Označimo $F = \{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \}$

Teorem 3: Skup F je fundamentalna domena za djelovanje od Γ na $\mathbb{H}$.

zatvoren i povezan skup sa svojstvom da za svaki $z \in \mathbb{H}$ postoji točka $z' \in F$ koja je Γ-ekvivalentna točki z, tj. $z \sim z'$, s time da nikoje dvije točke iz unutrašnjosti nisu Γ-ekv.

$\exists \gamma \in \Gamma$ t.d. $\gamma \cdot z = z'$



Uočimo: $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot F$

Skica dokaza Teorema 3: Neka je $z \in \mathbb{H}$ proizvoljan.

Sljedećim postupkom, koristeći samo T i S, z ćemo preslikati u $\mathcal{F}$.

1°) ako točka nije u traci $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ primjenom T^k za neki $k \in \mathbb{Z}$ je translatiram u traku

tj. $|z| < 1$

2°) ako je točka u traci a nije u $\mathcal{F}$ onda primijenimo S i ponovimo cijeli postupak dok ne završi u $\mathcal{F}$

Kako znamo da će postupak završiti?

Koristimo formulu $\operatorname{Im}(\gamma z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$

za $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

podgrupa od Γ generirana s S i T

Promotrimo funkciju

$$\gamma \longmapsto \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \quad \forall \gamma \in \underbrace{\langle S, T \rangle}_{\Gamma' :=}$$

$\Gamma' < \Gamma$

Ova fja. ima maksimum. Zašto? $c, d \in \mathbb{Z}$...

Označimo ga s γ_m.

Odaberimo T^k, za neki $k \in \mathbb{Z}$, t.d. je

$T^k \gamma_m z$ u traci $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\, w \leq \frac{1}{2}$.

Tada je $|T^k \gamma_m z| \geq 1$ pa je $T^k \gamma_m z \in F$.

zašto? u suprotnom

$$\mathrm{Im}(S T^k \gamma_m z) = \frac{\mathrm{Im}(T^k \gamma_m z)}{|T^k \gamma_m z|^2}$$

$$= \frac{\mathrm{Im}(\gamma_m z)}{|T^k \gamma_m z|} > \mathrm{Im}(\gamma_m z)$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

Preostaje još pokazati da nikoje dvije

točke iz unutrašnjosti od $\mathcal{F}$ nisu Γ-ekvivalentne.

(d.z.)

iz ovog dijela dokaza slijedi Teorem 2 jer

smo time pokazali da grupe Γ i $\Gamma' = \langle S, T \rangle$

imaju jednake fundamentalne domene.

Napomena: Ovaj teorem ste već vidjeli, ali

zapisan u drugačijim jeziku – u Gaussovom dokaz teorema o konačnosti broja klasa $h(-d)$, $d>0$.

Napomena: $S^2 = (ST)^3 = I$ su "jedine" relacije između S i T pa kažemo da je Γ slobodni produkt cikličke grupe reda 2 (generirane s S) i cikličke grupe reda 3 (generirane s ST)

Modularne funkcije

Def: Neka je k paran broj. Kažemo da je funkcija $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ slabo modularna fja. (za Γ) težine k ako je f meromorfna i zadovoljava

$$(*) \qquad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$\left(\iff f(z+1) = f(z) \quad i \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n \quad za \quad q = e^{2\pi i z}$$

Fourierov razvoj

Ako je $a_n = 0$ za sve n manji od nekog $n_0 \in \mathbb{Z}$ onda kažemo da je f meromorfna u beskonačnosti. Ako je $n_0 \geq 0$ onda kažemo da je f holomorfna u beskonačnosti. Ekvivalentno, f je hol. u ∞ ako i samo ako $\lim_{\tau \to i\infty} f(\tau) < \infty$, jer $\lim_{\tau \to i\infty} e^{2\pi i \tau} = 0$.

Def Slabo modularna fja. je modularna funkcija (težine k) ako je meromorfna u ∞. Modularna fja. koja je holomorfna svugdje se zove modularna forma.

Napomena: U jeziku diferencijalnih formi relacija (*) je ekvivalentna

Što ovo znači?. Riemannova ploha...

$$f(gz)\, d(gz)^k = f(z)\, dz^k \quad \forall g \in \Gamma$$

Kažemo da je dif. forma $f(z)\,dz^k$ invarijantna na Γ, odnosno da $f(z)dz^k$ definira dif. formu na $\mathbb{H}/_\Gamma$ ← Riemannova ploha

zašto?. $\dfrac{d(gz)}{dz} = (cz+d)^{-2} \ldots$

Modularne funkcije i rešetke

Def: Za fju. $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ kažemo da je težine $k \in \mathbb{Z}$ ako

$$F(\lambda \Lambda) = \lambda^{-k} F(\Lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

modularnost zapisana na drugi način!

Neka je $F : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ težine k. F proširujemo do funkcije na $\mathcal{M}$: $F(\omega_1, \omega_2) = F(\Lambda(\omega_1, \omega_2))$.

Tada $F(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-k} F(\omega_1, \omega_2)$

$\Rightarrow$ vrijednost funkcije F u svakoj točki $\mathbb{C}^*$-orbite točke (ω_1, ω_2) je određena s $F(\underbrace{\tfrac{\omega_1}{\omega_2}}_{\in \mathbb{H}}, 1)$

jer $\quad F(\omega_1, \omega_2) = F\left(\omega_2 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}, \omega_2 \cdot 1\right) = \omega_2^{-k} F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, 1\right)$

Definiramo fju. $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$

$$f(\tau) = F(\tau, 1) \quad \forall \tau \in \mathbb{H}$$

Kako je za $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma\tau) = F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = F\left(\frac{1}{c\tau+d}(a\tau+b), \frac{1}{c\tau+d}(c\tau+d)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{c\tau+d}\right)^{-k} F(a\tau+b, c\tau+d)$$

$$= (c\tau+d)^{k} F(\tau, 1) = (c\tau+d)^{k} f(\tau)$$

jer $(\tau, 1)$, $(a\tau+b, c\tau+d) \in \mathcal{M}$

definiraju istu rešetku.

Primjeri modularnih fja: Eisensteinovi redovi

za $k=2$ izraz ne konvergira apsolutno (ali konvergira uvjetno)

Def: Za $k \in 2\mathbb{N}$, $k > 2$, definiramo

$$G_k : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$$

$$G_k(\Lambda) := \sum_{\gamma \in \Lambda} \frac{1}{\gamma^k}$$

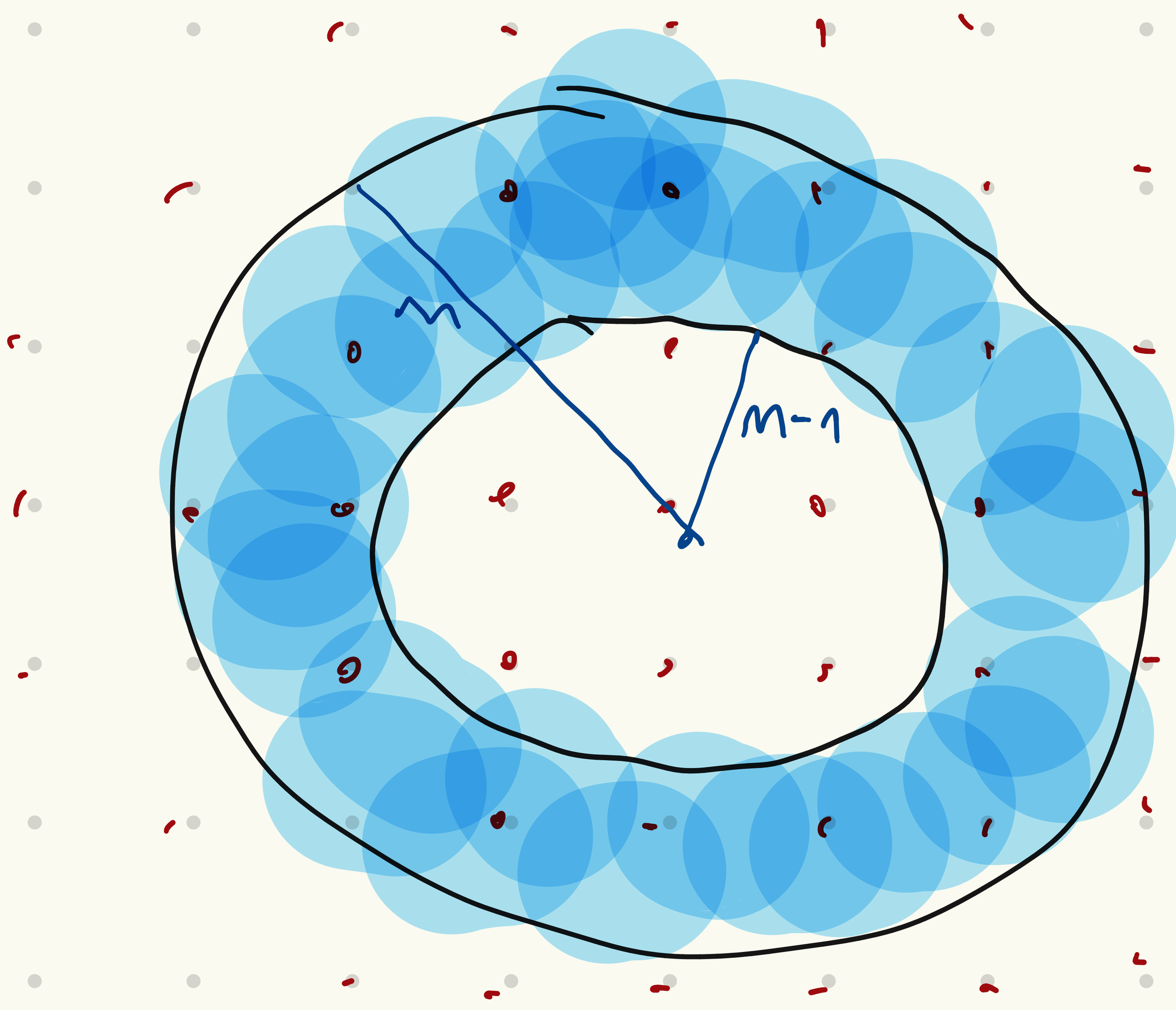
Eisensteinov red težine k

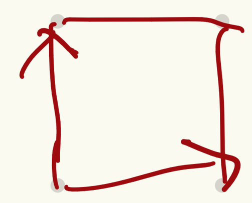
Propozicija: Red $G_k(\Lambda)$ konvergira apsolutno za $k>2$.

Dokaz: Elemente rešetke ćemo particionirati u skupove $S_n := \{\lambda \in \Lambda : n-1 < |\lambda| \leq n\}$ za $n=1,2,\dots$. Dovoljno je pokazati da je

$\# S_n = O(n)$ (tj. $\# S_n \leq C \cdot n$ za neki $C>0$)

jer tada $\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{|\lambda|^k} \ll \sum_{n=2}^{\infty} \# S_n \cdot \frac{1}{(n-1)^k} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} < +\infty$





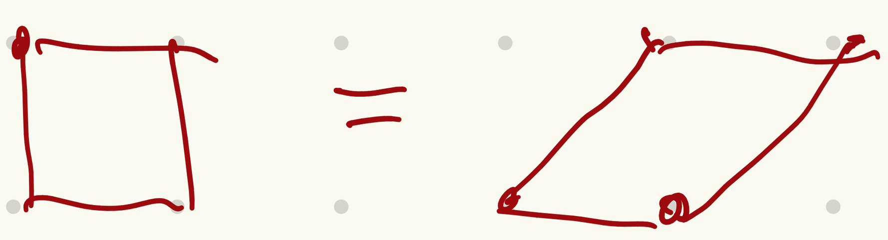
fundamentalna domena rešetk.

Ugrubo, broj elemenata rešetke unutar kružnog isječka je jednak površini kružnog vijenca radiusa $n-1$ i n podijeljenog s $P(\Lambda)$ — površinom fundamentalne domene.

ne ovisi o odabiru paralelograma

$\Rightarrow \# S_n = O(n)$

dokaz d.z.



Za $k>2$ fja. $G_k : R \to \mathbb{C}$ je

težine k jer je $G_k(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k} G_k(\Lambda)$.

(Zbog apsolutne konvergencije redoslijed sumacije

nije bitan.)

G_k definira funkciju na $\mathbb{H}$:

$$G_k(\tau) := G_k(\langle 1, \tau \rangle)$$ sumacija po $(c,d) \neq (0,0)$

$$= \sum_{c \in \mathbb{Z}} \sum_{d \in \mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

Zbog prethodne propozicije red $G_k(\tau)$ za $k>2$

je apsolutno konvergentan i definira holomorfnu

fju. na fundamentalnoj domeni F, a onda

zbog modularnosti i na $\mathbb{H}$ jer je $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F$,

Korolar: Za $k>1$, $G_{2k}(\tau)$ je modularna

forma težine $2k$.

Dokaz: Potrebno je još provjeriti holomorfnost

u ∞.

$\tau \to i\infty \iff \operatorname{Im}\tau \to +\infty$

Računamo

$$\lim_{\tau \to i\infty} G_{2k}(\tau) = \lim_{\tau \to i\infty} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}$$

$$= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}' \lim_{\tau \to i\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) < +\infty$$

$\square$

suma i limes komutiraju zbog apsolutne konverg.

Sada možemo izračunati Fourierov razvoj od $G_{2k}(\tau)$.

Lema. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $\tau \in \mathbb{H}$ vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^{2k}} = \frac{(2\pi i)^k}{(2k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1} e^{2\pi i r\tau}$$

Dokaz: Logaritamskom derivacijom produktnog razvoja fje.

$$\sin(\pi\tau) = \pi\tau \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\tau^2}{n^2}\right)$$

Weierstrassov teorem o faktorizaciji

$$\frac{d}{d\tau}\log(\sin \pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{-2\tau}{n^2-\tau^2}$$

$$= \frac{1}{\tau} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+\tau} - \frac{1}{n-\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^{2k}}{d\tau^{2k}} \log(\sin(\pi\tau)) = -(2k-1)! \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\tau)^{2k}}$$

S druge strane, Fourierov red fje. $\sin(\pi\tau)$

je $$\sin(\pi\tau) = \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i} e^{-\pi i\tau}\left(1 - e^{2\pi i\tau}\right)$$

$\log(1-x) = -\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r}$ ✓

pa za $\tau\in\mathbb{H}$ logaritmiranjem dobivamo

$$\log(\sin(\pi\tau)) = -\log(-2i) - \pi i\tau - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} e^{2\pi i r\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{2k}}{d\tau^{2k}} \log(\sin(\pi\tau)) = -\sum_{r=1}^{\infty} (2\pi i)^{2k} r^{2k-1} e^{2\pi i r\tau}$$

Tvrdnja slijedi. $\square$

Propozicija. Neka je $k \geq 1$. Tada je

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

Dokaz: Vrijedi

$$G_{2k}(\tau) = \underbrace{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n^{2k}}}_{2\zeta(2k)} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}$$

$$= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1} e^{2\pi i r m \tau}$$

$= [rm = n]$ ... tvrdnja slijedi

Def: Normalizirani Eisensteinov red je red

$$E_{2k}(\tau) := \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

Bernoullijevi brojevi:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

vrijedi:

$$\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

(uputa: Izrazite Taylorov red fje. $\pi\tau \operatorname{ctg}(\pi\tau)$ na dva načina: direktno iz definicije i koristeći $\frac{d}{d\tau}\log(\sin(\pi\tau)) = \pi \operatorname{ctg}(\pi\tau)$)

Što je s $G_2(\tau)$? Red ne konvergira apsolutno, ali konvergira uvjetno. No unatoč tome $G_2(\tau)$ je kvazi-modularna!

Propozicija. Za $\tau \in \mathbb{H}$ i $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ vrijedi

$$G_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - 2\pi i c(c\tau+d)$$

Dokaz (Hecke): Definiramo za $\varepsilon > 0$

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\tau+n)^2 |m\tau+n|^{2\varepsilon}} \quad \text{za svaki } \tau \in \mathbb{H}.$$

Red sada konvergira apsolutno pa vrijedi

$$G_{2,\varepsilon}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 |c\tau+d|^{2\varepsilon} G_{2,\varepsilon}(\tau)$$

↗

zašto? alternativno objašnjenje modularnost od $G_{2k}(\tau)$ $(k>1)$

Propozicija: $G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty} 1[\gamma]_{2k}$, gdje je $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$

gdje je $[\gamma]_{2k}$ tzv. "slash" operator.

def:

$$(f[\gamma]_{2k})(\tau) := (c\tau+d)^{-2k} f(\tau)$$

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ⇝ definira djelovanje jer vrijedi:

$$[\gamma\gamma']_{2k} = [\gamma]_{2k}[\gamma']_{2k}$$

⇒ f je modularna ako i samo ako $f[\gamma]_{2k} = f \quad \forall \gamma$

Za $G_{2,\varepsilon}$ modificiramo slash operator

$$(f[\tilde{\gamma}]_2)(\tau) = (c\tau+d)^2 |c\tau+d|^{2\varepsilon} f(\tau).$$

Formulirajte analogon Propozicije 7 za $G_{2,\varepsilon}$ iz koje je vidljiva modularnost!

Pokazat ćemo da je $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} G_{2,\varepsilon}(\tau) = G_2(\tau) - \frac{\pi}{y}$

gdje je $\tau = x+iy$ iz čega slijedi da se neholomorfna fja. $G_2(\tau) - \frac{\pi}{y}$ transformira kao modularna forma težine 2 pa tvrdnja slijedi iz sljedećeg računa:

$$G_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - \frac{\pi}{y/|c\tau+d|^2} = (c\tau+d)^2\left(G_2(\tau) - \frac{\pi}{y}\right)$$

jer je

$$\operatorname{Im}(\gamma\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$G_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) + \frac{\pi}{y}\left(|c\tau+d|^2 - (c\tau+d)^2\right)$$

$$= (c\tau+d)^2 G_2(\tau) + \frac{\pi}{y}\left(c^2(|\tau|^2-\tau^2) + 2cd(x-\tau)\right)$$

$$= (c\tau+d)^2 G_2(\tau) + \frac{\pi}{y}\left(c^2(2y^2-2ixy) - 2cdyi\right)$$

$$= (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - 2\pi i c(c\tau+d)$$

Da bi izračunali limes definiramo fju. I_ε

$$I_\varepsilon(\tau) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\tau+t)^2|t+\tau|^{2\varepsilon}} \quad \text{za } \tau\in\mathbb{H} \text{ i } \varepsilon > -\frac{1}{2}.$$

Tada za $\varepsilon > 0$ imamo

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) - \sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+2\varepsilon}} + \quad (**)$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(m\tau+n)^2|m\tau+n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{(m\tau+t)^2|m\tau+t|^{2\varepsilon}}\right]$$

Na izraz u uglatoj zagradi

$$\int_n^{n+1} \left[\frac{1}{(m\tau+n)^2 |m\tau+n|^{2\varepsilon}} - \frac{1}{(m\tau+t)|m\tau+t|^{2\varepsilon}} \right] dt$$

možemo primijeniti teorem o srednjoj vrijednosti

$$\left| \quad \right| \leq \max_{t \in [n, n+1]} \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{(m\tau+t)^2 |m\tau+t|^{2\varepsilon}} \right| \cdot |t-n|$$

$$< c \, |m\tau+n|^{-3-2\varepsilon}$$

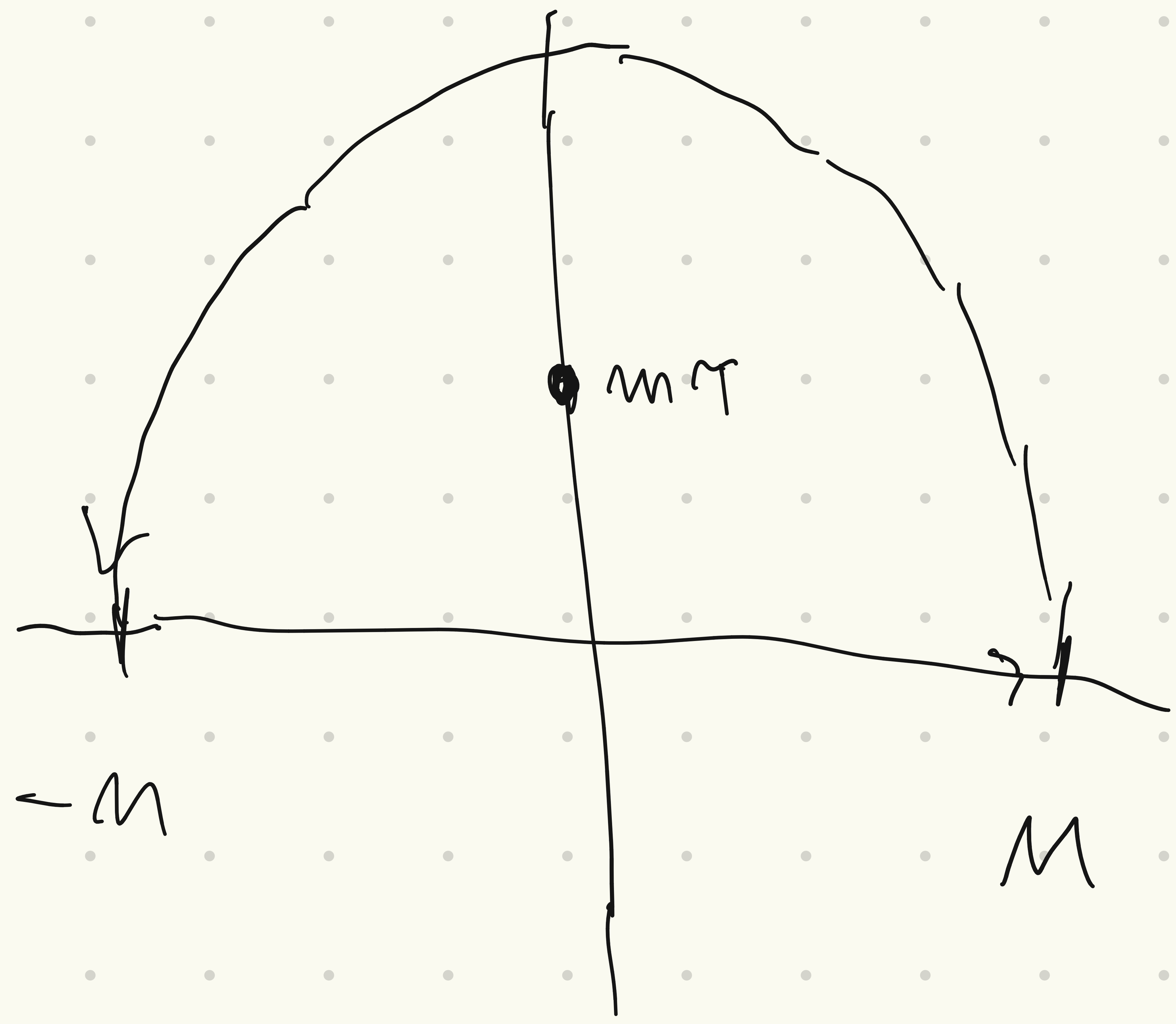
pa druga suma iz $(**)$ konvergira apsolutno (i lokalno uniformno) za $3+2\varepsilon>2$, tj. za $\varepsilon > -\frac{1}{2}$.

Dakle, limes kad $\varepsilon \to 0$ možemo izračunati tako da u formulu uvrstimo $\varepsilon = 0$. Desna strana od $(**)$ onda daje

$$G_2(\tau) - 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(m\tau+t)^2} = G_2(\tau) \text{ jer}$$

je

$$\left| \int_{-M}^{M} \frac{dt}{(m\tau+t)^2} \right|$$



$$= \left| -\int_{\gamma} \frac{dt}{(m\tau+t)^2} + 2\pi i \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(m\tau+t)^2}, m\tau\right)}_{=0} \right|$$

$$\leq M\pi \cdot \max_{\gamma} \left| \frac{1}{(m\tau+t)^2} \right| \ll O\left(\frac{1}{M}\right)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \right| = \left| \lim_{M\to\infty} \right| = 0$$

Preostaje još izračunati $\sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau)$.

Za $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ imamo

$$I_\varepsilon(x+iy) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(x+t+iy)^2\left((x+t)^2+y^2\right)^\varepsilon} = [x+t \to t]$$

↑ Pitagorin teorem

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t+iy)^2(t^2+y^2)^\varepsilon} = \frac{I(\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}}$$

gdje je $I_\varepsilon = 2\int_{-\infty}^{+\infty} (t+i)^{-2}(t^2+1)^{-\varepsilon}\,dt$, pa je

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau) = I(\varepsilon)\cdot \zeta(1+2\varepsilon)\Big/ y^{1+2\varepsilon} \quad \text{za } \varepsilon>0$$

Kako je $\zeta(1+2\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} + O(1)$ kad $\varepsilon \to 0$

preostaje nam još izračunati $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon} = I'(0)$ jer je

$I(0)=0$. Računamo

$$I'(0) = -2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(t^2+1)}{(t+i)^2}\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{1+\log(t^2+1)}{t+i} - \operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{m=1}^{\infty} I_m(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)\zeta(1+2\varepsilon)/y^{1+2\varepsilon} = -\frac{\pi}{y}$$

$\blacksquare$

Napomena: $G_2(\tau)$ se zove kvazi-modularna forma. Javljaju se kod derivacija modularnih formi. Npr.

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dE_4}{d\tau} = \frac{E_2E_4 - E_6}{3}.$$

Koriste se za konstrukciju modularnih formi za druge podgrupe od $SL_2(\mathbb{Z})$, npr.

$G_{2,N}(\tau) := G_2(\tau) - N\,G_2(N\tau)$ je

modularna forma za $\Gamma_0(N)$.

mirror symmetry

R. Dijkgraaf – fja. izvodnica za ramificirana natkrivanja torusa krivuljama genusa g je kvazimod. forma težine $2g-2$ za Γ – polinom u E_2, E_4 i E_6