Eisensteinovi redovi kao Taylorovi koef. Weierstrassove $\wp$-fje.

(An introduction to modular forms, Cohen)

Neka je $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ rešetka.

Kako izgledaju meromorfne fje. $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ koje su periodične u odnosu na Λ?

Ideja za konstrukciju:

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} \phi(z + \omega) \quad \text{za neku}$$

pažljivo odabranu fju. $\phi(z)$.

Treba nam (kao i kod Eisenst. redova)

$$\phi(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\alpha}\right) \quad \text{za neki } \alpha > 2.$$

Npr. za $\phi(z) = \dfrac{1}{z^3}$ imamo

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Lambda}{}' \frac{1}{(z+\omega)^3}$$

Uistinu, $f(z)$ je meromorfna, Λ - periodička i neparna s polovima u Λ.

$\rightsquigarrow$ eliptičke fje.

Možemo li pronaći fj. čija je derivacija jednaka $f(z)^2$? Ako integriramo $-f(z)$ član po član dobit ćemo $\frac{1}{(z+w)^2} + C(w)$

konstanta koja ovisi samo o $w \in \Lambda$

gdje $C(w)$ trebamo definirati tako da integral konvergira. Odaberemo $C(w) = -\frac{1}{w^2}$.

Tada je $\left|\frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2}\right|$ za "velike" w

jednako $\left|\frac{-z^2-2zw}{(z+w)^2 w^2}\right| \xrightarrow{w \to \infty} \left|\frac{2z}{w^3}\right|$

$= O\left(\frac{1}{|w|^3}\right)$ ✓

Def. $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

Weierstrassova $\wp$- fja.

Kako je $\wp'(z+w) = \wp'(z)$ $\forall w \in \Lambda$

$$\Rightarrow \quad \wp(z+w) = \wp(z) + D(w)$$ ($\mathbb{C}/\Lambda$ je povezan)

Ako uvrstimo $z = -\frac{w}{2}$ dobivamo

$$\wp(w/2) = \wp(-w/2) + D(w) \Rightarrow D(w) = 0$$

ima smisla jer $w/2 \notin \Lambda$

jer je $\wp$ parna fja.

Kako je $$\frac{1}{(z+w)^2} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (k+1) z^k \frac{1}{w^{k+2}}$$

slijedi $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k (k+1) G_{k+2}(\Lambda) z^k$$

Eisensteinov red

Teorem: $\wp(z)$ i $\wp'(z)$ generiraju polje eliptičkih fja. za Λ

Koja je alg. relacija između $\wp$ i $\wp'$?

Pogledajmo Taylorove redove tih fja.

Da bi poništili vodeći član, treba nam

$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3$. S malo računa

s preostalim članovima dobivamo da

$$F(z) = \wp'(z)^2 - (4\wp(z)^3 - \underbrace{g_2(\Lambda)}_{=60G_4(\Lambda)}\wp(z) - \underbrace{g_3(\Lambda)}_{=140G_6(\Lambda)})$$

ima nultočku u $z=0$.

Dakle nema pola, pa je $F(z)=0$.

$$\Big\Downarrow$$

$$y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$$

e. krivulja pridružena rešetci Λ

Napomena: Primijetimo da smo ovako analitički dobili netrivijalnu relaciju između Taylorovih koeficijenata – Eisensteinovih redova fja. $\wp(z)$ i $\wp'(z)$ koja se može interpretirati kao kombinatorni rezultat
identitet
između raznih aritmetičkih fja. $\sigma_k(n)$.

(ali možda važan rezultat jer se $\wp(z)$ javlja s trećom potencijom.)

No iz formule $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2(\Lambda)}{2}$ slijedi elegantniji rezultat:

Zadatak: Dokažite za $k \geq 4$

$$(k-3)(2k-1)(2k+1)\,G_{2k} = 3\sum_{j=2}^{k-2}(2j-1)(2(k-j)-1)\,G_{2j}\cdot G_{2(k-j)}$$

može li se ovaj identitet dokazati kombinatorno?

Ramanujanova Δ - fja.

Def: $\Delta = \dfrac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$

kasp forma

$$\Delta(\tau) = \sum_{n\geq 1} \tau(n) q^n$$

modularna forma težine 12

$$\Rightarrow \Delta(\tau) \in S_{12}(\Gamma)$$

Teorem:

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$$

Trebat će nam diferencijalni operator

$$D := \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} = q \cdot \frac{d}{dq}$$

Dokaz teorema: Označimo s $R(\tau)$ desna strana jednakosti. Računamo:

$$\frac{D(R)}{R} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^n}$$

zašto red konvergira?

zašto produkt $\xrightarrow{D}$ suma?

$$= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n = E_2$$

$$\frac{1}{1-q^n} = 1 + q^n + q^{2n} + \ldots$$

Neka je $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ proizvoljan.

Definirajmo: $S = R(\gamma(\tau)) = R\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$.

Računamo:

$$\frac{D(S)}{S} = \frac{D(R)(\gamma(\tau)) \cdot \underbrace{\frac{d}{d\tau}(\gamma(\tau))}_{= \frac{1}{(c\tau+d)^2}}}{R(\gamma(\tau))}$$

$$= \frac{D(R)}{R}(\gamma(\tau))\,(c\tau+d)^{-2}$$

modularnost od $E_2(\tau)$

$$= (c\tau+d)^{-2} \cdot \left(E_2(\tau) \cdot (c\tau+d)^2 + \frac{12}{2\pi i} \cdot c(c\tau+d) \right)$$

$$= E_2(\tau) + \frac{12}{2\pi i} \cdot \frac{c}{c\tau+d}$$

$$= \frac{D(R)}{R}(\tau) + 12\,\frac{D(c\tau+d)}{c\tau+d}$$

$$= \frac{D\left(R \cdot (c\tau+d)^{12}\right)}{R \cdot (c\tau+d)^{12}}$$

zašto

$$\Longrightarrow \quad S = R\,(c\tau+d)^{12} \Rightarrow \boxed{R(\gamma(\tau)) = (c\tau+d)^{12} R(\tau)}$$

Dakle, budući da je $R(\tau)$ holomorfna na $\mathbb{H}$ i poništava kasp $i\infty$ $\Rightarrow$ $R(\tau) \in S_{12}(\Gamma)$.

Dokaz će biti gotov kad pokažemo da je $\dim S_{12}(\Gamma) = 1$ (jer se $\Delta(\tau)$ i $R(\tau)$ oboje nalaze u 1 dim prostoru i q-razvoj im počinje s $= q + \ldots$).