

Teorem (Dirichlet, 1837)

Neka su $a, N \in \mathbb{N}$ t.d. $(a, N) = 1$.

Tada postoji ∞ mnogo prostih brojeva

p t.d. $p \equiv a \pmod{N}$.

Ideja: Pokazati da je $\sum_{p \equiv a(N)} \frac{1}{p} = +\infty$,

odnosno preciznije, ako definiramo

$$P_a(s) = \sum_{p \equiv a(N)} p^{-s} \quad \text{za} \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} P_a(s) = +\infty.$$

Trebat će nam Dirichletov karakter:

Def: Dirichletov karakter modul N

je homomorfizam $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$
red grupe je $\varphi(N)$
 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} =$ grupa svih modul m karakter

χ proširujemo da mult. funkciji na

\mathbb{Z} tako da definiramo $\chi(n) = 0$ (neutr. elem.)

ako $(n, N) > 1$, $\chi_0 =$ trivijalni karakter

Neka je $\chi_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{ako } n \equiv a \pmod{N} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

Lema: Za sve $n \in \mathbb{Z}$

$$(d.z.) \quad \chi_a(n) = \sum_{\chi \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \frac{\chi(a)^{-1}}{\varphi(N)} \chi(n)$$

odnosno

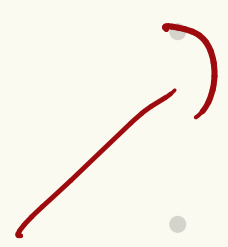
$$P_a(s) = \sum_{\chi \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \frac{\chi(a)^{-1}}{\varphi(N)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

Dakle, dovoljno je razumijeti

$$s \mapsto \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

Def: Dirichletova L-funkcija

$$L(\chi, s) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$



* $L(\chi_0, s)$ je do neke Eulerove faktor $p \in \mathbb{N}$

jednako $\zeta(s) \Rightarrow$ ima analitičko

proširenje do \mathbb{C} s jednostavnim polom

u $s=1$

jedini

* za $\chi \neq \chi_0$ $L(\chi, s)$ je holomorfnu na \mathbb{C}

"Logaritmiranjem" produkta formulu dobivamo

$$\log L(x, s) = \sum_p - \log \left(1 - \frac{x(p)}{p^s} \right)$$

$$\stackrel{''}{=} \sum_{p|m} \left(\frac{x(p)}{p^s} \right)^m / m$$

↑
Taylorov red od $\log(n-x)$

Preciznije: definiramo funkciju

$$\ell(x, s) = \sum_p \sum_n \left(\frac{x(p)}{p^s} \right)^n / n$$

↑

* konvergenciju apsolutnu za $\operatorname{Re} s > 1$ a uniformnu

za $\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta$ ($\forall \delta > 0$)

$\Rightarrow \ell(x, s)$ je analitička na $\operatorname{Re} s > 1$

Lemma: Za $\operatorname{Re} s > 1$ imamo

1.

$$\ell(x, s) = L(x, s)$$

Uočimo

$R(x, s)$

$$e(x, s) = \sum_p \frac{x(p)}{p^s} + \sum_{n \geq 2} \sum_p \frac{x(p)^n}{n p^{ns}}$$



glavni član

(ono što nas
zanimá)



grešak

Važno: Grešak $R(x, s)$ je ograničena

kad $s \rightarrow 1$ jer

$$|R(x, 2)| \leq \sum_{n \geq 2} \sum_p \frac{1}{n p^{2n}} \leq \sum_p \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{p}\right)^n$$

$$\leq \sum_p \frac{1}{p^2} \frac{p}{p-1} < \infty$$

Dakle

$$P_a(s) = \sum_{\chi} \frac{\chi(a)^{-1}}{\varphi(N)} \ell(\chi, s) + O(1)$$

ostatak je ograničen

kad $s \rightarrow 1$

odnosno ako razdvoji moć doprinos s trivijalnog karaktera χ_0 od ostalih

$$P_a(s) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{p|N} p^{-s} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{\chi(a)^{-1}}{\varphi(N)} \ell(\chi, s)$$

+ O(1)

ne ograničen kad $s \rightarrow 1$

jer

$$\sum_{p|N} \frac{1}{p} = +\infty$$

pa je dovoljno pokazati

da je za $\chi \neq \chi_0$

$$\ell(\chi, s) = O(1)$$

kad $s \rightarrow 1$.

Prema Lemi: $L(x, s) = e^{e(x, s)}$ za $\operatorname{Re} s > \eta$

za $x \neq x_0$



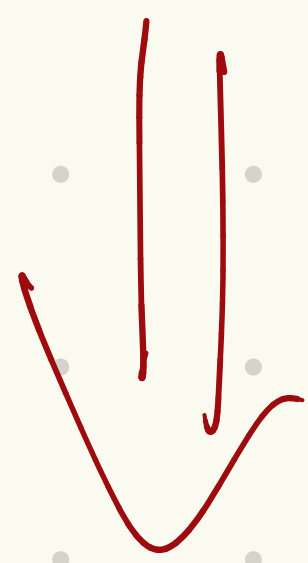
pa imamo

$$L(x, \eta) = \lim_{s \rightarrow \eta} L(x, s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \eta} e^{e(x, s)}$$

Theorem: Za $x \neq x_0$

$$L(x, \eta) \neq 0.$$



Lema 2: $e(x, s)$ je ograničen

kad $s \rightarrow \eta$ (uz pretp. $L(x, \eta) \neq 0$)

Osnovna svojstva logaritama implisira

Lema 1 i Lema 2,

Dokaz Teorema je komplikovaniji.

Def: Dedekindova zeta funkcija

Neka je K/\mathbb{Q} celq. polni brojica, definiemo

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{(N_{K/\mathbb{Q}}(I))^s}$$

za $\text{Re } s > 1$.

konvergira apsolutno.

Imamo Eulerov produkt

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}}$$

za $\text{Re } s > 1$

→
prosti
'ideali'

→
prosti cijeli

↑
norma

Napomena: analytic class number formula.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-r} \zeta_K(s) = - \frac{h(K) R(K)}{w(K)}$$

↑
 $r = r_1 + r_2 - 1$

= rang grupe jedinica \mathcal{O}_K^\times

↑
broj konjugata u K

Nas zanima slučaj kad je $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$

↑
ciklotomski polji
(Weberov teorem - suho

abehav prošireni od \mathbb{Q}
je sadržano u nekom ciklotom
proširenju)

Ključno:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\substack{\chi \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^+ \\ \chi \neq \chi_0}} L(\chi, s) \cdot \zeta(s)$$

dovoljno je pokazati da su Eulerovi faktori na p
podudarni:

$$\prod_{p|N} (1 - N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-s}) \stackrel{(*)}{=} \prod_{\chi \neq \chi_0} (1 - \chi(p) p^{-s}) \cdot (1 - p^{-s})$$

$\left(1 - p^{-f(p)s}\right)^{\frac{\varphi(N)}{f(p)}}$

opis faktORIZACIJE od p
 u $\mathbb{Z}[\zeta_N]$
 gdje je $f(p)$ red od p u $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^+$

Za desna stranu jednakosti konistimo identitet

$$\prod (1 - \omega \tau) = 1 - T f(p)$$

$$\omega \in \mu_{f(p)}$$

gdje $\mu_{f(p)}$ označava grupu $f(p)$ konizma

iz 1. (D.Z.)

$$x \neq x_0$$

Dokaz Teorema $L(x, 1) \neq 0$:

Dovoljno je dokazati da $\zeta_k(s)$ ima

pol u $s=1$ jer zbog (*) i činjenice

da $\zeta(s)$ ima jednostavan pol u $s=1$

bi slijedilo da je $L(x, 1) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$.

Konistit čomr Landauov teorem iz analize.

(Dedekindova eta funkcija nam je trebala

sumr da pokazemo da Dirichl. red $\prod_{x \neq x_0} L(x, s) \cdot \zeta(s)$

$$x \neq x_0$$

ima ne-negativne koeficijente!)

Theorem (Landau) Neka je

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{Dirichletov real } s \text{ nemnegativnim}$$

koefficientima $a_n \geq 0$. Pretpostavimo da
real konvergira za $\text{Re } s > \sigma_0$. Pretpostavimo
da $f(s)$ ima proširenje do holomorfne
funkcije u nekoj okolini tačke $s = \sigma_0$.

Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. real $f(s)$
konvergira za $\text{Re } s > \sigma_0 - \varepsilon$.

$$\text{Kako je } \zeta_k(s) = \prod_{p \neq k} L(p, s) \cdot \zeta(s) \quad \text{real } s$$

(koji konvergira za $\text{Re } s > 1$)

ne-negativnim koefficientima, ako pretpostavimo

da nema pol u $s=1$ onda ima holom.

proširenje sve do $\text{Re}(s) > 0$ jer sve funkcije

u produktu imaju takvo proširenje. Prema

Landauom teorem tada i Dirichletov real

od $\zeta(s)$ konvergenca za $\operatorname{Re}(s) > 0$ šta

ne more biti jer za $s \in \mathbb{R}^+$

$$\prod_p \frac{1}{1 - N(p)s^{-s}} \geq \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\varphi(n)s}}$$

pa ako real konvergenca za $s = \frac{1}{\varphi(n)}$

medu i real od $\zeta(s)$ konvergenca za $s = 1$

šta je kontradikcija.

QED