Dimenzija prostora modularnih formi

pogledajte Diamond, Shurman

Općenito se formule za dimenziju prostora modularnih formi izvode iz Riemann-Rochovog (RR) teorema, ali u slučaju grupe $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ možemo izbjeći RR teorem koristeći formulu valencije

Teorem: Neka je $f(z)$ meromorfna modularna fja. težine k za $\Gamma(1)$. Za $P \in \mathbb{H}$ neka $v_P(f)$ označava red nultočke od $f(z)$ u točki P (odnosno minus red pola ako fja. ima pol u P). Neka je $v_\infty(f)$ red od $f(z)$ u kaspu ∞ (stupanj početnog člana u q-razvoju). Tada vrijedi

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\omega(f) + \sum_{\substack{P \in \mathbb{H}/\Gamma \\ P \neq i, \omega}} v_P(f) = \frac{k}{12}$$

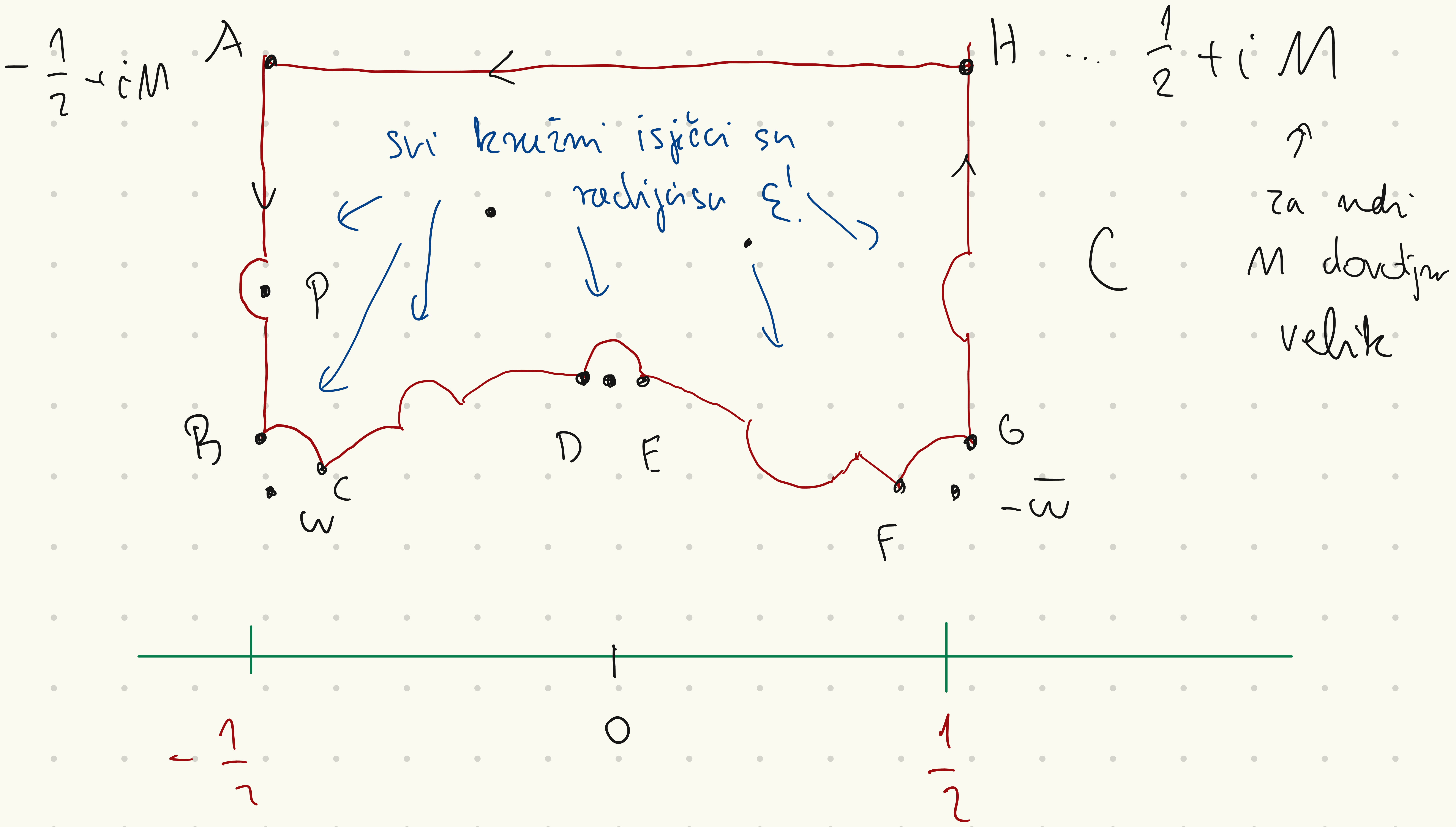
formula valencije →

Primjer Za $k=12$ desna strana je 1 pa vidimo da kasp forma ima samo jednu nultočku (u kaspu) pa je $\dim S_{12}(\Gamma)=1$

Odnosno $M_{12}(\Gamma)=2$ – prostor je generiran s Δ i E_{12}.

(jasno, $M_{2k}(\Gamma)=S_{2k}(\Gamma)\oplus\mathbb{C}\cdot E_{2k}$)

Dokaz teorema: Ideja je integrirati logaritamsku derivaciju $\frac{f'}{f}(z)$ oko ruba fundamentalne domene F (po konturi C)



Kontura C sadrži svaku nultočku i pol (osim možda i i ω) točno jednom. ← ako se neka nultočka (ili pol) nalazi na rubu onda konturu malo deformiramo

To je moguće jer je f(z) meromorfna u ∞ što implicira da točka ∞ nije gomilište nultočaka i polova pa nultočke i polovi imaju ograničeni imaginarni dio.

Po Cauchyjevom teorema

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{\substack{P\in H/\Gamma \\ P\neq i,\omega}} v_p(f)$$

Sad ćemo izračunati integral dio po dio:

1°) integral od A do B se poništava integralom od G do H jer je $f(z+1) = f(z)$

2°) za integral od H do A koristimo zamjenu varijabli $q = e^{2\pi i z}$

Neka je $\tilde{f}(q) = f(z) = \sum a_n q^n$ q-razvoj od f(z).

Kako je $f'(z) = \frac{d}{dq}\tilde{f}(q)\frac{dq}{dz}$ integral je jednak

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{d}{dq}\tilde{f}}{\tilde{f}}\,dq$$ gdje integriramo

po kružnici $t \mapsto e^{2\pi i(t+iM)}$, $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$$e^{2\pi i(t+iM)} = e^{2\pi i t}\cdot e^{-2\pi M}$$

kružnica radijusa $e^{-2\pi M}$ oko

$q=0$

Prema Cauchyjevom teoremu taj integral

je jednak $-V_\infty(f)$ jer osim $q=0$ fja. $\tilde{f}$

nema polova niti nultočki na toj kružnici.

minus predznak je zbog negativne orijentacije

Sljedeće računamo integral po lukovima

BC, DE i FG.

Primijetimo, ako $f(z)$ ima Laurentov razvoj $f(z) = \sum c_m (z-a)^m$, tada je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + g(z)$$ gdje je $g(z)$ holomorfna fja. u a. Zato će integral od $\frac{f'(z)}{f(z)}$ oko kružnog luka kuta Θ (pozitivno orijentiranog) radijusa ε oko a težiti u $mi\Theta$ kad ε teži u 0 (jer će integral od ε težiti u 0). U našem slučaju kutevi koji odgovaraju lukovima BC, DE i FG su redom $\pi/3$, π i $\pi/3$ pa integrali teže redom u $-V_\omega(f)/6$, $-V_i(f)/2$ i $-V_{-\bar{\omega}}(f)/6$

$$-V_{-\bar{\omega}}(f)/6 = -V_\omega(f)/6$$

Preostaje još pokazati

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{CD}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{EF}\frac{f'(z)}{f(z)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{k}{12}.$$

Primijetimo da transformacija $S: z \mapsto -\frac{1}{z}$ preslikava CD na EF i pritom mijenja orijentaciju, pa će tvrdnja teorema slijediti iz sljedeće leme.

Lema: Neka je $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$, $c \neq 0$ i neka je f meromorfna funkcija težine k na $\mathbb{H}$ bez polova i nultočaka na konturi $C \subset \mathbb{H}$. Pretp. da vrijedi $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$. Tada

$$(*) \quad \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma(C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -k \int_C \frac{dz}{z + d/c}$$

Dokaz: Deriviranjem $f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ dobivamo

$$f'(\gamma z) \frac{d\gamma z}{dz} = (cz+d)^k f'(z) + kc((cz+d)^{k-1} f(z)$$

pa dijeljenjem dobivamo

$$\frac{f'(\gamma z)}{f(\gamma z)} d\gamma(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{kc}{(cz+d)} dz$$

Pa lema slijedi jer nakon zamjene varijabli u (*) dobivamo

$$\int_C \left(\frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{f'(\gamma z)}{f(\gamma z)} d\gamma z \right) = -k \int_C \frac{c}{cz+d} dz$$

Za dokaz teorema odaberimo $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (pa je $\gamma(CD) = FE$) i računamo

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot (-k) \int_{CD} \frac{1}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{k}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

gdje je $\gamma(t) = \frac{1}{2} e^{2\pi i t}$ za $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{2/3} \frac{\frac{1}{2} e^{2\pi i t} \cdot 2\pi i}{\frac{1}{2} e^{2\pi i t}} dt = \int_{1/4}^{1/3} dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Korolar: Svaki $f \in M_k(\Gamma)$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$f(z) = \sum_{4i+6j=k} c_{ij} E_4(z)^i E_6(z)^j$$

Dokaz: Indukcijom po k. Tvrdnja vrijedi za $k = 4, 6, 8, 10, 14 \ldots$ zašto? zbog prethodnog teorema

Za $k = 12$ ili $k > 14$ postoji i, j t.d. $4i + 6j = k \Rightarrow E_4^i E_6^j \in M_k(\Gamma)$

pa postoji $c \in \mathbb{C}$ t.d. $f - c \cdot E_4^i E_6^j \in S_k(\Gamma)$

jer $E_4^i E_6^j$ nije cusp forma

jer Δ ima samo (jednost.) nultočku u ∞

Tada je $\dfrac{f - c E_4^i E_6^j}{\Delta} \in M_{k-12}(\Gamma)$

pa tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije

jer je $\Delta = \dfrac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$.

Korolar: Neka je $k > 2$ paran broj.

Tada je:

$$\dim(M_k(\Gamma)) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{ako } k \equiv 2 \ (12) \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{ako } k \not\equiv 2 \ (12) \end{cases}$$

Dimenzija kasp formi je za 1 manja od dimenzije modularnih formi

Također, $\dim M_2(\Gamma) = 0$.

Dokaz: Dovoljno je pokazati ← znamo da generira $M_k(\Gamma)$ iz preth. korolara da je skup

$$S = \{ E_4^i E_6^j : 4i + 6j = k \}$$

linearno nezavisan. (Tvrdnja o dimenziji onda slijedi iz jednostavnog prebrojavanja.)

Tvrdnja o nezavisnosti slijedi iz opisa divizora fja. $E_4^i E_6^j$ (cl.2.).

↗ iz formule valencije slijedi da E_4 i E_6 imaju točno jednu nultočku i to u ω i $\sqrt{-1}$ redom.
pa ...

Hecke operatori

Def (korespodencija):

Neka je E skup i neka je X_E slobodna abelova grupa generirana s E. Korespodencija T na E (s cjelobrojnim koeficijentima) je homomorfizam $X_E \xrightarrow{T} X_E$.

- T je jednoznačno određen s vrijednostima koji poprima na E:

$$T(x) = \sum_{y \in E} n_y(x)\, y \,, \quad n_y(x) \in \mathbb{Z}.$$

- Neka je $F: E \to \mathbb{C}$ fja. Po linearnosti ju proširujemo do fji. na X_E.

  T definira operator na funkcijama, $TF: E \to \mathbb{C}$

$$(TF)(x) = F(T(x)) \qquad \forall x \in E$$

$$= \sum_{y \in E} n_y(x) F(y)$$

Hecke operatori:

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $T(n)$ korespodenciju na skupu rešetki R

$$T(n)\Lambda = \sum_{(\Lambda:\Lambda')=n} \Lambda' \qquad \forall \Lambda \in R$$

suma po svim podrešetkama $\Lambda' \subset \Lambda$ indeksa n

suma je konačna jer za svaku takvu Λ' vrijedi $n\Lambda \overset{n}{\subset} \Lambda' \overset{n}{\subset} \Lambda$, odnosno Λ' su u bijekciji s podgrupama reda n od $\Lambda / n\Lambda \cong \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^2$

Npr. ako je n prost onda je broj takvih podgrupa jednak $\frac{n^2-1}{n-1} = n+1$

broj elemenata reda n

Koristit ćemo još operator homotetije:

$$R_\lambda \Lambda = \lambda \Lambda \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Propozicija: Vrijedi

a) $R_\lambda R_\mu = R_{\lambda\mu}$

b) $R_\lambda T(n) = T(n) R_\lambda$

c) $T(m)T(n) = T(mn)$ ako $(m,n)=1$

d) $T(p^n)T(p) = T(p^{n+1}) + p\,T(p^{n-1})R_p$

za p prost i $n \in \mathbb{N}$

Dokaz: a) i b) su trivijalni

c) Treba dokazati sljedeće:

Za svaki $\Lambda'' \overset{mn}{<} \Lambda$ indeksa mn gdje je $(m,n)=1$ postoji jedinstvena rešetka Λ' t.d. $\Lambda'' \overset{m}{<} \Lambda' \overset{n}{<} \Lambda$, ili ekvival. da grupa Λ/Λ'' ima jedinstvenu podgrupu Λ'/Λ'' reda m. To

vrijedi zato što $\Lambda/\Lambda'' \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

↑

teorem o klasifikaciji abelovih grupa

ima jedinstvenu podgrupu reda m, $\{1\} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(ako je $H < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ podgrupa reda m,

onda je $p_1(H) < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gdje je $p_1 : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ projekcija

pa $\# p_1(H) \mid \# \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ali $\# p_1(H) \mid \# H \Rightarrow \# p_1(H) \mid (m,n) = 1$

$\Rightarrow p_1(H) = \{1\}$.)

d) d.z.

slijedi indukcijom iz Prop. d)

komutativni

komutiraju

Korolar:

a) $T(p^n)$ za $n>1$ su polinomi u $T(p)$ i R_p

b) algebra definirana s R_λ i $T(p)$ je komutativna i sadrži sve $T(n)$

zbog Prop. a), b) i c)

zbog a) dijela korol.

Kako $T(n)$ i R_λ djeluju na funkcijama težine $2k$?

1°) $(R_\lambda F)(\Lambda) = F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-2k} F(\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$

alternativna karakteriz. modularnosti

2°) za $n \in \mathbb{N}$

$$R_\lambda(T(n)F) = T(n)(R_\lambda F) = \lambda^{-2k}\, T(n)F$$

$T(n)F$ je modularna težine $2k$

Ovdje smo samo koristili da R_λ i $T(n)$ komutiraju.

Također vrijedi :

$$T(m)\,T(n)\,F = T(mn)\,F$$

$$T(p)\,T(p^n)\,F = T(p^{n+1})\,F + p^{1-2k}\,T(p^{n-1})\,F$$

Eksplicitne formule (želimo izračunati svojstvene vrijednosti, npr., $T(n)\,\Delta = \lambda(n)\,\Delta$, pokazat ćemo $\lambda(n) = \tau(n)$)

Kako izgledaju podrešetke indeksa n od $\Lambda = \{\omega_1, \omega_2\}$?

Lema: Neka je

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{Z},\ ad = n,\ a \geq 1,\ 0 \leq b < d \right\}$$

Za $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S_n$ neka je

$\Lambda_\sigma < \Lambda$ podrešetka s bazom

$w_1' = a w_1 + b w_2$, $w_2' = d w_2$.

Preslikavanje $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma$ je bijekcija sa skupa S_n u skup $\overset{\Lambda(n)}{\vee}$ podrešetki indeksa n u Λ.

Dokaz: Uočimo da je $\Lambda_\sigma \in \Lambda(n)$ jer je $\det \sigma = n$ (u formuli za inverz, tj. kad w_1 i w_2 zapišem kao linearne kombinacije w_1' i w_2' determinanta n se nalazi u nazivniku...).

Također, lako se vidi da je preslikavanje injektivno. Za surjektivnost, uzmimo proizvolj. $\Lambda' \in \Lambda(n)$. Neka je $d \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj t.d. $d \cdot w_2 \in \Lambda'$ (d postoji i $d | n$ jer $n \cdot w_2 \in \Lambda'$ zbog $\Lambda' \overset{n}{\subset} \Lambda$) i neka je $a := \frac{n}{d}$. Preostaje još pokazati da postoji $0 \le b < d$ takav da je $a\omega_1 + b\omega_2 \in \Lambda'$ jer u tom slučaju vektori $a\omega_1 + b\omega_2$ i $d\omega_2$ generiraju podrešetku $\Lambda'' \le \Lambda'$ koji je indeksa m u Λ (kao i Λ').

Ekvivalentno, dovoljno je pokazati da je

$$a\omega_1 + \Lambda' \in \langle \omega_2 + \Lambda' \rangle$$

reda d

↑ podgrupe od Λ/Λ' generiranom s $\omega_2 + \Lambda'$

No, kako je

$$\langle \omega_1 + \Lambda' \rangle + \underset{\text{reda } d}{\underset{\uparrow}{\langle \omega_2 + \Lambda' \rangle}} = \underset{\text{reda } m}{\underset{\uparrow}{\Lambda/\Lambda'}}$$

slijedi da je $\langle \omega_1 + \Lambda' \rangle \Big/ \langle \omega_2 + \Lambda' \rangle \cap \langle \omega_1 + \Lambda' \rangle \cong \dfrac{\langle \omega_1 + \Lambda' \rangle + \langle \omega_2 + \Lambda' \rangle}{\langle \omega_2 + \Lambda' \rangle}$

reda $\frac{m}{d} = a$ pa tvrdnja slijedi.

Djelovanje Hecke operatora na modularnim funkcijama

Neka je $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ slabo modularna fja. težine $2k$ i F odgovarajuća fja. na $\mathcal{R}$ t.d. $F(\Lambda(\omega_1,\omega_2)) = \omega_2^{-2k} f(\omega_1/\omega_2)$.

Def:

$$T(n)f \longleftrightarrow \underset{\uparrow}{n^{2k-1}}\, T(n)F$$

normalizacija zbog ljepših formula

odnosno $(T(n)f)(z) := n^{2k-1}\big(T(n)F\big)(\Lambda(z,1))$

ili prema prethodnoj lemi

$$T(n)f(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{a\geq 1,\, ad=n \\ 0\leq b<d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

Naravno vrijedi, $T(m)T(n)f = T(mn)f$ za $(m,n)=1$

i $T(p)T(p^n)f = T(p^{n+1})f + p^{2k-1}T(p^{n-1})f$ za p prost i $n \in \mathbb{N}$.

Kako $T(n)$ djeluje na Fourierov razvoj?

modularna fja. meromorf. težine $2k$ u ∞.

Propozicija: Neka je $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) q^m$. Tada je

$$T(n)f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m$$

(i $T(n)f(z)$ je merom. u ∞.)

gdje je
$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a \mid (n,m) \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(mn/a^2\right)$$

Dokaz: Direktan račun, d.z.

Korolar

a) $\gamma(0) = \sigma_{2k-1}(n)\, c(0)$, $\gamma(1) = c(n)$

b) $\gamma(m) = c(pm)$ ako $p \nmid m$

$\gamma(m) = c(pm) + p^{2k-1} c(m/p)$ ako $p \mid m$

c) ako f mod. forma, onda je i $T(n)f$ isto.

Neka je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n$ ne-nul modularna

forma težine $2k$, pretp. da je f

svojstveni vektor za sve $T(n)$, tj. $T(n) f = \underset{\in \mathbb{C}}{\lambda(n)} f$

Teorem: a) $c(1) \neq 0$

b) Ako je f normalizirana (tj. $c(1)=1$)

onda $c(n) = \lambda(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Iz preth. korolara slijedi

$$\lambda(n) \cdot c(1) = c(n) \Rightarrow c(1) \neq 0$$

i $\lambda(n) = c(n)$.

Korolar: • $c(m)\, c(n) = c(mn)$ za $(m,n)=1$

• $$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - c(p) p^{-s} + p^{2k-1-2s}}$$

posebno: $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$ za $(m,n)=1$, ...

Peterssonov skalarni produkt

Neka su f i g kasp forme težine 2k $(k\in\mathbb{N})$.

Definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle$ formulom

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} f(z)\,\overline{g(z)}\,y^{2k-2}\,dx\,dy$$

gdje je $z = x+iy$

definicija ima smisla jer je mjera (d.z.)

$$\alpha(f,g) = f(z)\overline{g(z)}\,y^{2k}\,\frac{dx\,dy}{y^2}$$ invarijantna

na djelovanje od Γ i konačna.

Propozicija: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definira hermitski skalarni produkt na $S_{2k}(\Gamma)$ (pozitivno i nedegenerirana bilinearna forma).

Vrijedi

$$\langle T(n)f, g\rangle = \langle f, T(n)g\rangle$$

tj. $T(n)$ je hermitski operator u odnosu na $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Budući da operatori $T(n)$ komutiraju znamo da postoji ortonormirana baza (za $S_{2k}(\Gamma)$) svojstvenih vektora za sve $T(n)$ i da su svojstvene vrijednosti realni brojevi.

Sad ćemo pokazati da svojst. vrijednosti algebarski cijeli brojevi. Općenito, ako je A operator na kompleksom v.p. V i ako postoji rešetka $\Lambda = \langle w_1 \ldots w_m \rangle < V$ ($\{w_1, \ldots, w_m\}$ je $\mathbb{Z}$-baza za Λ i $\mathbb{C}$-baza za V) takva da je $A(\Lambda) \subset \Lambda$, onda su koef. karakterističnog polinoma od A cijeli brojevi pa su njegove svojstvene vrijednosti alg. cijeli brojevi.

U slučaju operatora $T(n)$ za V ćemo uzeti $M_{2k}(\Gamma)$, a za rešetku Λ $\mathbb{Z}$-modul $M_{2k}(\Gamma, \mathbb{Z})$ modularnih formi s cjelobrojnim Fourierovim koef.

Taj $\mathbb{Z}$-modul je rešetka jer postoji baza za $M_{2k}(\Gamma)$ koja se sastoji od formi čiji su koef. cjeli brojevi (već smo je konstruirali, preko $E_4^i E_6^j$, nazivnici se lako "očisti").

posljedica Weilovih slutnji
✓

Peterssonova slutnja (sada teorem, Deligne 1973)

Neka je $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n$, $c(1)=1$, kasp forma težine $2k$ koja je normalizirana svojstvena funkcija za sve $T(n)$. Neka je

$$\Phi_{f,p}(T) = 1 - c(p)T + p^{2k-1}T^2$$

polinom.
(p prost)

Neka su $\alpha_p, \alpha_p' \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$\phi_{1,p}(T) = (1-\alpha_p T)(1-\alpha_p' T)$$

tj. $\alpha_p + \alpha_p' = c(p)$ i $\alpha_p \alpha_p' = p^{2k-1}$.

Peterssonova slutnja kaže da je $\alpha_p' = \overline{\alpha_p}$.

ili ekvivalentno $|\alpha_p| = |\alpha_p'| = p^{k-\frac{1}{2}}$

$$\left(\Rightarrow |c(p)| \leq 2p^{k-\frac{1}{2}} \right)$$

Za $k=6$ to je Ramanujanova slutnja

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}.$$