Zadaci:

- Poissonova formula

1.

a) Definirajmo

$$T(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-a\pi n^2} \quad \text{za} \quad a>0.$$

Dokažite: $T(1/a) = a^{1/2}\, T(a)$

b) Pokažite da je $S = \sum_{n\geq 1} e^{-(n/10)^2}$ "blizu" broju $5\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}$. Koliko blizu?

c) Pokažite da je i fja. $\dfrac{1}{ch(\pi x)}$ invarijantna na Fourierovu transformaciju. Definirajmo

$$T_2(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{ch(\pi n a)} \quad \text{za} \quad a>0$$

Dokažite $T_2(1/a) = a\, T_2(a)$

d)* Pokažite $T_2(a) = T(a)^2$

e) Pokažite da je $S = \sum_{n\geq 1} 1/ch(n/10)$ blizu $5\pi - \frac{1}{2}$.

• Eliptičke funkcije

2. Integriranjem član po član reda $-\wp(z)$

a) pokažite da Weierstrassova zeta fja.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z+\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

konvergira normalno na kompaktnim podskupovima S od $\mathbb{C}/\Lambda$ i zadovoljava $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

za niz fja. $f_n : S \to \mathbb{C}$ kažemo da red $\sum f_n(x)$ konvergira normalno ako $\sum_n \|f_n\| = \sum_n \sup_{x \in S} |f_n(x)| < +\infty$

b) Dokažite da postoje konstante η_1 i η_2 t.d. $\zeta(z+\omega_1) = \zeta(z) + \eta_1$ i $\zeta(z+\omega_2) = \zeta(z) + \eta_2$

kažemo da je $\zeta(z)$ kvazi-eliptička fja

c) Pokažite Legendreovu relaciju:

$$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = \pm 2\pi i$$

zašto je ovo zanimljivo? (je li zanimljivo?)

Modularne forme

3. (Bolov identitet) Neka je F neprekidna fja. na $\mathbb{H}$. Definirajmo $I_0(F,a) = F$ i za $m \in \mathbb{N}$ i $a \in \overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q}$ neka je

$$I_m(F,a)(\tau) = \int_a^\tau \frac{(\tau - z)^{m-1}}{(m-1)!} F(z)\,dz.$$

a) Pokažite da je $I_m(F,a)'(\tau) = I_{m-1}(F,a)(\tau)$.

b) Neka je $\gamma \in \Gamma$ i $k \in \mathbb{N}$. Pokažite

$$I_{k-1}(F,a)\big|_{2-k}\gamma = I_{k-1}\left(F|_k\gamma,\ \gamma^{-1}(a)\right)$$

slash operatori

težina $2-k$ i k ... $|_k\gamma := [\gamma]_k$

c) Za $F_a^* := I_{k-1}(F,a)$ pokažite

$$D^{(k-1)}\left(F_a^*|_{2-k}\gamma\right) = F|_k\gamma$$ gdje je $D = q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$

d) Pretp. da je F slabo modularna težine $k \in \mathbb{Z}$ i holomorfna na $\mathbb{H}$ (ali ne mora nužno biti holomorfna u kasp(ovima)).

Pokažite:

$$\left(F_a^* \big|_{2-k} \gamma\right)(\tau) = F_a^*(\tau) + P_{k-2}(\tau)$$

gdje je P_{k-2} polinom stupnja $\leq k-2$

dan formulom $P_{k-2}(x) = \displaystyle\int_{\gamma^{-1}(a)}^{a} \frac{(x-z)^{k-2}}{(k-2)!} F(z)\, dz$

Delta funkcije

4. a) Za $F \in M_k(\Gamma)$ i kvadratno slobodan $N \in \mathbb{N}$ definiramo

$$G(\tau) = \sum_{d \mid N} \mu(d)\, d^{k/2} F(d\tau) \quad \text{gdje}$$

modularna forma na $\Gamma_0(N)$

je μ Möbiusova fja. Pokažite da je

$$G|_k W_N = \mu(N)\, G \quad \text{gdje je} \quad W_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

tzv. Frickeova involucija.

slash operator $[W_N]_k$

b) Pokažite da za $N > 1$ isto vrijedi za $F = E_2$.

c) Pokažite: ako je $\mu(N) = (-1)^{k/2 - 1}$ onda $G(i/\sqrt{N}) = 0$

d) primijenjujući c) na E_2 pokažite da ako je $\mu(N) = 1$ i $N > 1$ onda

$$\sum_{\gcd(m,N)=1} \frac{m}{e^{2\pi m/\sqrt{N}} - 1} = \frac{\phi(N)}{24}$$

e) Pokažite da za $N=1$ vrijedi:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$$

Koristeći dirichletov funkcijski jednadžbu za E_2^*

$$\left(G_2^*(\tau) = \frac{\pi^2}{3} E_2^*(\tau) \right)$$

$$E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \cdot \mathrm{Im}(\tau)}$$