Twistani krivulja:

Ovdje ćemo precizno dokazati "teorem" u slučaju twistova krivulji.

Neka je C/K glatka projektivna krivulja. Kako ne bi miješali grupu automorfizama krivulji s grupom automorfizama eliptičke krivulji, grupu automorfizama od $\mathcal{C}$ ćemo označiti s $\mathrm{Isom}(\mathcal{C})$ (a ne $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$).

Za svaki twist C'/K od C/K odaberimo $\bar{K}$-izomorfizam $\phi: C' \to C$ i definiramo $\xi_\sigma = \phi^\sigma \phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(C)$.

Teorem (twistovi krivulja)

a) preslikavanje ξ je 1-kociklus, tj.

$$\xi_{\sigma\tau} = (\xi_\sigma)^\tau \xi_\tau$$ ← lijevo djelovanje

Isom(C) nije nužno komutativ.

b) Klasa od ξ u $H^1(G_{\bar{K}/K}, \mathrm{Isom}(C))$ ← nije nužno grupa samo skup

ne ovisi o odabiru izomorfizma ϕ i

definira prirodno preslikavanje

$$\mathrm{Twist}(C/K) \longrightarrow H^1(G_{\bar{K}/K}, \mathrm{Isom}\, C)$$

↑ twistovi do na K-izom.

c) Preslikavanje iz b) je bijekcija.

Dokaz:

a) $\xi_{\sigma\tau} = \phi^{\sigma\tau}\phi^{-1} = (\phi^{\sigma}\phi^{-1})^{\tau}(\phi^{\tau}\phi^{-1})$

$$= (\xi_{\sigma})^{\tau}\xi_{\tau}$$

b) Neka je C''/K twist od C/K koji je K-izomorfan s C'. Neka je $\psi: C'' \to C$ neki $\bar{K}$-izomorfizam. Moramo pokazati da su kociklusi $\sigma \mapsto \phi^{\sigma}\phi^{-1}$ i $\sigma \mapsto \psi^{\sigma}\psi^{-1}$ kohomologni (ili kohomološki ekvivalentni).

Neka je $\theta: C'' \to C'$ K-izomorfizam.

Neka je $\alpha = \phi\theta\psi^{-1} \in \mathrm{Isom}\, C$. Pokazat ćemo $(\alpha^{\sigma})(\psi^{\sigma}\psi^{-1}) = (\phi^{\sigma}\phi^{-1})\alpha \quad \forall\sigma$

$\Rightarrow \sigma \mapsto \psi^{\sigma}\psi^{-1}$ i $\sigma \mapsto \phi^{\sigma}\phi^{-1}$ definiraju istu klasu u $H^1(G_{\bar{K}/K}, \mathrm{Isom}\, C)$

nekomutativnim kohomologiji

Računamo:

$$(\alpha^\sigma)(\psi^\sigma \psi^{-1}) = (\phi\,\theta\,\psi^{-1})^\sigma (\psi^\sigma \psi^{-1}) = \phi^\sigma \theta^\sigma \psi^{-1}$$

$$= \phi^\sigma \underset{\substack{\uparrow \\ K\text{-izom}}}{\theta} \psi^{-1} = (\phi^\sigma \phi^{-1})(\phi\,\theta\,\psi^{-1}) = (\phi^\sigma \phi^{-1})\,\alpha \quad \checkmark$$

c) injektivnost: Pretp. da su C'/K i C''/K twistovi koji daju istu klasu u $H^1(G_K, \mathrm{Isom}(C))$.

Neka su $\phi : C' \to C$ i $\psi : C'' \to C$ $\bar{K}$-izom.

Tada postoji $\alpha \in \mathrm{Isom}\, C$ t.d.

$$\alpha^\sigma (\psi^\sigma \psi^{-1}) = (\phi^\sigma \phi^{-1})\alpha \quad \forall \sigma \in G_K$$

Promatrimo $\theta : C'' \to C'$ definiran s

$$\theta = \phi^{-1} \alpha \psi$$

izomorfizam

Dokažimo da je def. nad K. Računamo za $\sigma \in G_K$

$$\theta^\sigma = (\phi^\sigma)^{-1}(\alpha^\sigma \psi^\sigma) = (\phi^\sigma)^{-1} \phi^\sigma \phi^{-1} \alpha \psi$$

$$= \phi^{-1} \alpha \psi = \theta$$

$\Rightarrow C''$ i C' su K-izom. $\Rightarrow C' = C'$ u $\mathrm{Twist}(C/K)$

$\Rightarrow$ preslikavanje je injektivno.

surjektivnost: Neka je dan kociklus $\xi : G_K \to \mathrm{Isom}(C)$.

Konstruirat ćemo krivulju C'/K i

$\bar{K}$-izomorfizam $\phi : C' \to C$ t.d.

$$\xi_\sigma = \phi^\sigma \phi^{-1} \quad \forall \sigma \in G_K.$$

Osnovna ideja: twisted action

na nivou skupova.

$$\begin{array}{ccc} C'(\bar{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\sim} & C(\bar{\mathbb{Q}}) \\ \phi^{-1}(P) & \longleftarrow & P \\ \vdots & & \\ (\phi^{-1}(P))^\sigma & \dashrightarrow & P \cdot \sigma \end{array}$$

$$P \cdot \sigma := \phi(\phi^{-1}(P)^\sigma)$$

ovo je definicija novog djelovanja na $C(\bar{\mathbb{Q}})$

zašto?: $P \cdot (\sigma\tau) = \phi(\phi^{-1}(P)^{\sigma\tau})$ očito: pullback djelovanja

$$P \cdot \sigma = \phi(\phi^{-1}(P)^\sigma)$$

$$(P \cdot \sigma) \cdot \tau = \phi(\phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(P)^\sigma)^\tau) = \phi(\phi^{-1}(P)^{\sigma\tau}) \checkmark$$

Vmyšli:

$$(\phi^{\sigma} \circ \phi^{-1})(P) = \phi^{\sigma}(\phi^{-1}(P))$$

$$= \left(\phi\left(\phi^{-1}(P)^{\sigma^{-1}}\right)\right)^{\sigma}$$

tj. $\xi_{\sigma}(P) = (P \cdot \sigma^{-1})^{\sigma}$

$$\xi_{\sigma}(P)^{\sigma^{-1}} = P \cdot \sigma^{-1}$$

tj. $\boxed{P \cdot \sigma = \xi_{\sigma^{-1}}(P)^{\sigma}} = \xi^{\sigma}_{\sigma^{-1}}(P^{\sigma}) = \xi^{-1}_{\sigma}(P^{\sigma})$

prověrka: $P \cdot \sigma\tau = \xi_{\tau^{-1}\sigma^{-1}}(P)^{\sigma\tau} = \left(\xi^{\sigma^{-1}}_{\tau^{-1}} \circ \xi_{\sigma^{-1}}(P)\right)^{\sigma\tau}$

$$= \left(\xi^{\sigma^{-1}}_{\tau^{-1}}\left(\xi_{\sigma^{-1}}(P)\right)\right)^{\sigma\tau} = \left(\xi_{\tau^{-1}}\left(\xi_{\sigma^{-1}}(P)^{\sigma}\right)\right)^{\tau}$$

dok ji $P \cdot \sigma = \xi_{\sigma^{-1}}(P)^{\sigma}$ ohnom

$$P \cdot \sigma\tau = \xi_{\tau^{-1}}\left(\xi_{\sigma^{-1}}(P)^{\sigma}\right)^{\tau}$$

✓

$$\boxed{p^{\bullet\sigma} = \xi_{\sigma^{-1}}(p)^{\sigma}}$$

Na nivou funkcija, ϕ inducira izomorfizam

$$\phi^* : \bar{K}(C) \to \bar{K}(C')$$
$$f \mapsto f \circ \phi$$

$\overset{\shortparallel}{Z}$

želimo opisati: $K(C') \subseteq \bar{K}(C')$

jasno: to je fiksno polje od $\bar{K}(C')$

Kako ga vidjeti unutar $\bar{K}(C)$?

$$Z(f)^{\sigma} = (f \circ \phi)^{\sigma} = f^{\sigma} \circ \phi^{\sigma}$$

$$Z(f^{\sigma} \xi_{\sigma}) = Z(f^{\sigma} \circ \phi^{\sigma} \circ \phi^{-1})$$

$$= f^{\sigma} \circ \phi^{\sigma} \circ \phi^{-1} \circ \phi = f^{\sigma} \circ \phi^{\sigma}$$

usklađenost djelovanja G_K na $\bar{K}(C)$ i $Z(\bar{K}(C))$ pomoću koje možemo definirati novo djelovanje na $\bar{K}(C)$ koje reflektira djelovanje od G_K na $\bar{K}(C')$.

$$f^{\bullet\sigma} = f^{\sigma} \circ \xi_{\sigma}$$

Problem: Kako iz ovog djelovanja rekonstruirati C'? Odnosno $K(C')$? Jasno kako.

Korespodencija: krivulje ⟷ polja

Objekti: glatke krivulje def. nad K

Preslikavanja: nekonst. racionalna preslikavanja $/K$ $\Leftrightarrow$ surjektivni mofizmi def. nad K

ekvivalencija kategorija!

Objekti: konačno generirana proširenja $\mathcal{K}/K$ transc. stupnja 1 s $\mathcal{K} \cap \overline{K} = K$

Preslikavanja: injekcije koje fiksiraju K

Neka je $\mathcal{F} = \{ f \in \bar{K}(C) : f^{\cdot\sigma} = f \ \forall \sigma \in G_K \}$.

Pokazat ćemo da je $\mathcal{F}$ funkcijsko

polje $K(C')$ u nekoliko koraka. Pokazat ćemo

(1) $\mathcal{F} \cap \bar{K} = K$ => $\mathcal{F}$ je funkcijsk. polje neke glatke krivulje nad K

(2) $\bar{K}\mathcal{F} = \bar{K}(C)$ => ta krivulja je twist od C

tj. $\mathcal{F} = K(\tilde{C})$. Kako znamo da

je $\tilde{C} = C'$? Po djelovanju od G_K.

$K(C')$ je fiksno polje djelovanja

G_K na $\bar{K}(C')$ odnosno fiksno

polje twistnog djelovanja G_K

na $\bar{K}(C)$,

dokaz (1): Neka je $f \in \mathcal{F} \cap \bar{K}$. f^{σ} je konstanta.

Tada $\forall \sigma \in G_K$, $f^{\cdot\sigma} := f^{\sigma} \circ \}_{\sigma} = f^{\sigma} = f$

$\Rightarrow f \in K$ uzmemo $V = \bar{K}(C)$ i $V_K = \mathcal{F}$

djelovanje $f^{\cdot\sigma}$

dokaz (2): slijedi iz direktno iz sljedeće leme.

Lema: Neka je $V/\bar{K}$ v. prostor i neka G_K djeluje neprekidno na V, kompatibilno s prirodnim djelovanjem od G_K na $\bar{K}$.

Neka je $V_K = V^{G_K} = \{ v \in V : v^{\sigma} = v \ \forall \sigma \in G_K \}$.

očito je v.p. nad K

Tada $V \simeq V_K \otimes_K \bar{K}$, tj. V ima bazu koja se sastoji od G_K invarijantnih vektora.

želimo v prikazati kao $\bar{K}$-linearnu kombinaciju vektora iz V_K

Dokaz: Neka je $v \in V$. Djelovanje je neprekidno pa podgrupa $\{\sigma : G_K : v^{\sigma} = v\}$ ima konačan indeks u G_K, tj. v je "definiran" nad konačnim proširenjem od K. Označimo s L

Galoisova zatvorenj od K. Neka je $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

baza za L/K i neka je $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = Gal(L/K)$.

Za $1 \leq i \leq n$ neka je

$$w_i := \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i v)^{\sigma_j} = Trace_{L/K}(\alpha_i v).$$

Lako se vidi da je w_i G_K invarijantn

pa je $w_i \in V_K$.

Tvrdnja (d.z.) Matrica $M := (\alpha_i^{\sigma_j})_{i,j}$ je nesingularna.

Tada $M \begin{bmatrix} v^{\sigma_1} \\ \vdots \\ v^{\sigma_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

elementi iz $\bar{K}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} v^{\sigma_1} \\ \vdots \\ v^{\sigma_n} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

svi iz V_K

$\Rightarrow$ svaki od v^{σ_i} je element od $V_K \otimes_K \bar{K}$

$\Rightarrow$ v je element od $V_K \otimes_K \bar{K}$.