$$e^x \ldots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6.4. Neki dovoljni uvjeti za konv. reda

Promotrimo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ (*) red u $\mathbb{R}$ gdje je $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(alternirajući red) Primjer: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

Teorem 6.7. (Leibnizov kriterij) Ako niz $(a_n)_n$ realnih pozitivnih brojeva strogo pada i $\lim a_n = 0$. Tada red (*) konvergira k broju A za koji vrijedi $0 < A < a_1$.

<u>Dokaz:</u> Neka je $(S_n)_n$ niz parcijalnih suma reda (*).

Vrijedi $S_{2n} = \overset{>0}{(a_1 - a_2)} + \overset{>0}{(a_3 - a_4)} + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ tj.

niz $(S_{2n})_n$ je strogo rastući. Nadalje,

$$S_{2n} = a_1 - \overset{>0}{(a_2 - a_3)} - \overset{>0}{(a_4 - a_5)} \ldots - \overset{>0}{(a_{2n-2} - a_{2n-1})} - a_{2n} < a_1$$

pa je podniz ograničen odozgo $\Rightarrow (S_{2n})_n$ je konvergentan.

Neka je $A = \lim_n S_{2n}$. Zbog $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ / lim

$$\Rightarrow \lim_n S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim_n a_{2n+1} = A + 0 = A$$

$$\Rightarrow \lim S_n = A \Rightarrow 0 < A < a_1.$$

Teorem 6.8 (D'Alembertov kriterij) Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$ i $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

1. ako postoji $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ t.d. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \ \forall n \geq m$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

2. ako postoji $m \in \mathbb{N}$ t.d. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \ \forall n \geq m$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz. 1. Za $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$|a_{m+k}| \le q\,|a_{m+k-1}| \le q^2\,|a_{m+k-2}| \le \dots \le q^k \cdot |a_m|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}| \le |a_m| \sum_{k=1}^{\infty} q^k = |a_m| \cdot \frac{q}{1-q}$$

pa red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}|$ konvergira. Tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

2. Vrijedi $\forall n \ge m$ $|a_n| \ge |a_m| > 0$ pa onda niz $(a_n)_n$ ne konvergira k nuli $\Rightarrow$ red $\sum a_n$ divergira jer nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije.

Teorem 6.9. (Cauchyjev kriterij) Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$

1. Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1 \rangle$ t.d. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq m$, onda red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2. Ako vrijedi $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ za ∞ mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$, onda red $\sum a_n$ divergira.

Dokaz: 1. Za $n \geq m$ ~~$\forall n$~~ imamo $|a_n| \leq q^n$ pa je

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}.$$

Tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tj. red $\sum a_n$ konvergira apsolutno.

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1$ pa red $\sum a_n$ divergira jer nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije. $\blacksquare$

Korolar 6.1. Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Ako ~~nizova~~ neki od nizova $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ i $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_n$ konvergira k $r \in \mathbb{R}$, onda za $0 \leq r < 1$ red $\sum a_n$ apsolutno konvergira, a za $r > 1$ red divergira. Za $r = 1$ red može konvergirati i divergirati.

Dokaz. d.z.

Primjer 6.10.

- $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira i $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ (nema odluke).
- $\sum \frac{1}{n}$ divergira i $\left|\frac{a_n}{a_n}\right| \to 1$ -||-
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira i $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$ -||-
- $\sum \frac{1}{n}$ div. ~~as~~ i $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$ -||-

Napomena 6.1. Ako D'Alemb. kriterij daje odluku, onda ju daje i Cauchyjev kriterij. Naime, ako je

$|a_{m+k}| \leq q^k |a_m| \quad \forall k \in \mathbb{N}$ onda imamo

$$\sqrt[m+k]{|a_{m+k}|} \leq \sqrt[m+k]{|a_m|} \cdot q^{\frac{k}{m+k}} \longrightarrow q < 1.$$

$$\sqrt[m+k]{|a_m|} \xrightarrow{k \to \infty} 1, \qquad q^{\frac{k}{m+k}} \xrightarrow{k \to \infty} q$$

Primjer 6.11. $a_{2n} = \frac{1}{4^n}$ i $a_{2n+1} = \frac{2}{4^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tada je $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2$ i $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{8}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ D'Alemb. kriterij ne daje odluku.

S druge strane, $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{2}$ i $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{2}{2n+1}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

pa po Cauchyjevom kriteriju red konvergira.

Primjer 6.12. Za svaki $z \in \mathbb{C}$ red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ apsolutno konvergira.

Naime $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dots = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 = r < 1$ pa po

Korolaru 6.1. red konvergira apsolutno i definira fju.

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$E(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \; ; \; E(0) = 1 \; ; \; E(1) = e$$

kasnije:

$E(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$