Primjer 6.6. Alternirajući harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{konvergira.}$$

Vrijedi

$$S_{2n} = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}^{>0} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}^{>0} + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)}^{>0}$$

$\Rightarrow$ podniz $(S_{2n})_n$ je strogo rastući. Nadalje

$$S_{2n} = 1 - \overbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}^{>0} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \overbrace{\left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right)}^{>} - \frac{1}{2n} < 1$$

pokazuje da je niz $(S_{2n})_n$ odozgo ograničen.

$\Rightarrow$ niz $(S_{2n})_n$ je konvergentan.

Neka je $S = \lim_n S_n$. Zbog $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow \lim S_{2n+1} = \lim S_n + \lim \frac{1}{2n+1} = S + 0 = S$$

$\Rightarrow \lim S_n = S \Rightarrow$ niz je konvergentan.

Teorem 6.2. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi sa sumama A i B. Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ red $\sum \lambda a_n + \mu b_n$ je konvergentan i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Dokaz: D.Z.

Teorem 6.3. Za $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$$

konvergira i ima sumu $\frac{1}{1-q}$. Za $|q| \geq 1$ red divergira.

Dokaz: Za $|q|<1$ imamo

$$S_n = 1+q+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\cdot q^n$$

Zbog $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (jer $|q|<1$) dobivamo $\lim S_n = \dfrac{1}{1-q}$.

d.z.

Ako je $|q|\geq 1$, onda $\forall n\in\mathbb{N}$ $|q^n|\geq 1$ pa niz općih članova reda ne teži k nuli $\Rightarrow$ red divergira.

6.3. Uspoređivanje redova, apsolutna konvergencija redova

Def. 6.4. Za red $\sum a_n$ kažemo da je apsolutno konvergentan ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan. Red $\sum a_n$ uvjetno konvergira ako konvergira, ali red $\sum |a_n|$ divergira.

$\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$\sum \frac{1}{n}$ diverg.

$a_1+a_2+a_3 = a_1+a_3+a_2$

$\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$ $\rightsquigarrow$ ne mora vrijediti.

$\uparrow$

vrijedi za apsolutno konv. redova.

Def. 6.3. Za red $\sum a_n$ kažemo da je red s pozitivnim članovima ako je $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$.

Teorem 6.4.1. Red $\sum a_n$ s pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je njegov niz parcijalnih suma ograničen. Tada je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Ako red s pozitivnim članovima konvergira, onda njegova suma ne ovisi o poretku članova, tj. vrijedi
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$
gdje je $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ proizvoljna bijekcija.

Dokaz: 1. Niz $(S_n)_n$ je rastući pa je konvergentan ako i samo ako je ograničen.

2. Označimo sa $(S_n')_n$ niz parc. suma reda $\sum a_n' = \sum a_{\sigma(n)}$.

Označimo $A := \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{S_n' : n \in \mathbb{N}\}$.

Želimo pokazati $\sup A = \sup B$.

Pokazat ćemo da za svaki $S_n \in A$ postoji $S'_m \in B$ t.d. $S_n \leq S'_m$ i

obratno, da za svaki $S'_m \in B$ postoji $S_n \in A$ t.d. $S'_m \leq S_n$.

Onda će vrijediti da je $\sup A = \sup B$ (d.z.)

Uzmimo proizvoljan $S_n \in A$, Promotrimo niz $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k)}, \ldots$

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

postojat će neki $m \in \mathbb{N}$ t.d. svi elementi $a_1, \ldots, a_n$ nalaze u skupu

$\{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(m)}\}$, $\Rightarrow a_1 + \ldots + a_n \leq a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(m)} \Rightarrow S_n \leq S'_m$.

Obratno, neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Promotrimo $S'_m = a_{\sigma(1)} + \ldots + a_{\sigma(m)}$,

Neka je $\max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)\}$. Tada se svi elementi $\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}\}$ nalaze

u skupu $\{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \Rightarrow S'_m \leq S_n$.

$\boxtimes$.

Lema 6.1. (uspoređivanje redova) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji $K>0$ t.d.

$$a_n \leq K \cdot b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako konvergira red $\sum b_n$, onda konvergira i red $\sum a_n$. i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq K \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ako red $\sum a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum b_n$.

Dokaz: za vježbu.

Primjer 6.7. Red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan jer $(n+1)^2 \geq n(n+1)$ povlači $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teorem 6.5. Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$.

1. Ako konvergira red

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{onda konvergira i red} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i vrijedi $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2. Ako konvergira red $(*)$ i ako je $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija

onda konvergira i red $\sum a_{\sigma(n)}$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

<u>Dokaz:</u> I. Pretp. da je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$ i def.

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{inače.} \end{cases}$$

Za nizove $(a_n^+)_n$ i $(a_n^-)_n$ s ~~pozitivnim~~ nenegativnim članovima vrijedi

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Budući da po pretp. red $\sum |a_n|$ konvergira i $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n^+ \leq |a_n|$ i $a_n^- \leq |a_n|$ po Lemi 6.1. redovi $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ konvergiraju. Neka su A^+ i A^- sume tih redova.

Po Teoremu 6.2.

$$A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$\square$

Po Teoremu 6.4. imamo

$$A^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} \quad i \quad A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)}$$

$$\Rightarrow \sum a_n = A^+ - A^- = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a^+_{\sigma(n)} - a^-_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} .$$

II Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Zbog $|\alpha_n| \leq |a_n|$ i $|\beta_n| \leq |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (d.z.) imamo konvergenciju redova $\sum |\alpha_n|$ i $\sum |\beta_n|$, a odatle i redovi $\sum \alpha_n$ i $\sum \beta_n$ su konv.

$$\Rightarrow \sum (\alpha_n + i\beta_n) = \sum \alpha_n + i \sum \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(n)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{\sigma(n)} + i\beta_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} ,$$

$\blacksquare$