5.5. Primitivna f-ja.

Def. 5.6. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f: I \to \mathbb{R}$. Primitivna f-ja ili antiderivacija f-je f na skupu I je svaka f-ja $F: I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Teorem 5.9. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f: I \to \mathbb{R}$ zadana f-ja. Ako su F i G bilo koje dvije primit. f-je od f na I, onda postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ t.d. $G(x) = F(x) + c$ $\forall x \in I$.

Dokaz: $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ na I tj. $H'(x) = 0$ $\forall x \in I$ gdje je $H = G - F$.

$\Rightarrow H(x) = c$ $\forall x \in I$ (d.z.)

Teorem 5.10. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f: I \to \mathbb{R}$ fj. neprekidna na I. Tada postoji primitivna fja. od f na I.

Dokaz: Neka je $a \in I$ proizvoljan. Za svaki $x \in I$ restrikcija fje. f na $[a,x]$ ili $[x,a]$ je neprekidna pa je integrabilna u Riem. smislu.

Tada je $F: I \to \mathbb{R}$ dobro definirana formulom

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in I.$$

Pokažimo da je F primit. fja. od f na I, tj. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Imamo $$F(x) - F(c) = \int_a^x - \int_a^c = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Prema Teorema 5.7.

$$\int_c^x f(t)\,dt = (x-c)\cdot f(c') \quad \text{gdje je } \overset{\substack{\text{postoji}\\ \downarrow}}{c'} \in [c,x] \text{ ili } [x,c]$$

Neka je $\Theta_x \in [0,1]$ t.d. $c' = c + \Theta_x(x-c)$. Vrijedi:

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c+\Theta_x\cdot(x-c)) \quad \text{gdje je } \Theta_x \in [0,1].$$

Iz neprekidnosti fje. f u točki c dobivamo

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} f(c+\Theta_x(x-c)) \overset{(d.z.)}{=} f(c).$$

Sada dokazujemo Newton-Leibnitzovu formulu koja povezuje primitivnu fju. s Riemannovim integralom.

Teorem 5.11. Ako je f neprekidna na otv. intervalu I i F bilo koja primitivna fj. od f na I, onda za svaki segment $[a,b] \subset I$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \left(= \cancel{F\Big|_a^b} = F\Big|_a^b \right)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

Dokaz: Ako je F primitivna fja. od f def. formulom

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{onda je} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b).$$

Ako je G bilo koja prim. fja. od f na I

onda postoji $c \in \mathbb{R}$ t.d. $G(x) = F(x) + c \ \forall \ x \in I$.

Sada je $G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = F(b)$

$$= \int_a^b f(t)\,dt.$$

Napomena 5.1. Prethodni teorem je istinit i bez pretp. da je f neprekidna na I. Dovoljno je pretpostaviti da je f integrabilna i da postoji primitivna fja. od f. Tada za bilo koju subdiviziju $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ segmenta $[a,b]$ iz Lagrangeovog tm. srednje vrijednosti imamo:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1}) \right)$$

Lagr. tm. $(\exists t_k \in [x_{k-1}, x_k])$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma$ za neke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1,\dots,n$ je integralna

suma pa vrijedi (*) $s \leq F(b)-F(a) \leq S$ gdje su s i S D-sume

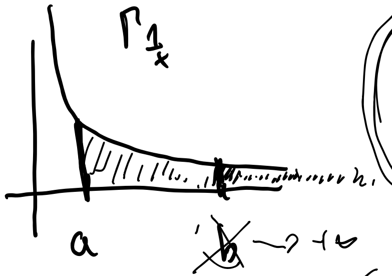
pridružene danoj subdiviziji. Budući da (*) vrijedi

za svaki subdiviziji prelaskom na supremum odnosno inf.

$$I_* \leq F(b)-F(a) \leq I^*.$$ Iz integrabilnosti fje. f slijedi

$$I_* = I^* = I \Rightarrow F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

5.8. Nepravi integral



$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = ?$$

$$\lim_{b\to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$

__Def.__ 5.7. Neka je funkcija $f:[a,b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a,B]$ gdje je $B<b\le +\infty$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{B\to b^-} \int_a^B f(x)\,dx ,$$

onda ~~taj~~ se taj limes zove __nepravi integral__ fj. f na $[a,b\rangle$ i označava s

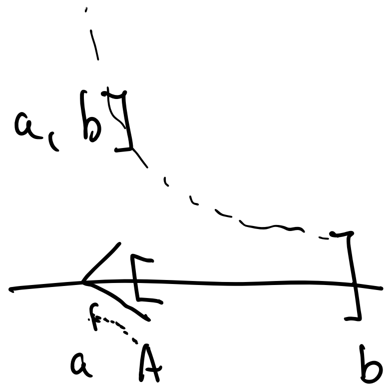
$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx .$$

Još se kaže da integral __konvergira__.

Ako limes ne postoji, kažemo da integral __divergira__.

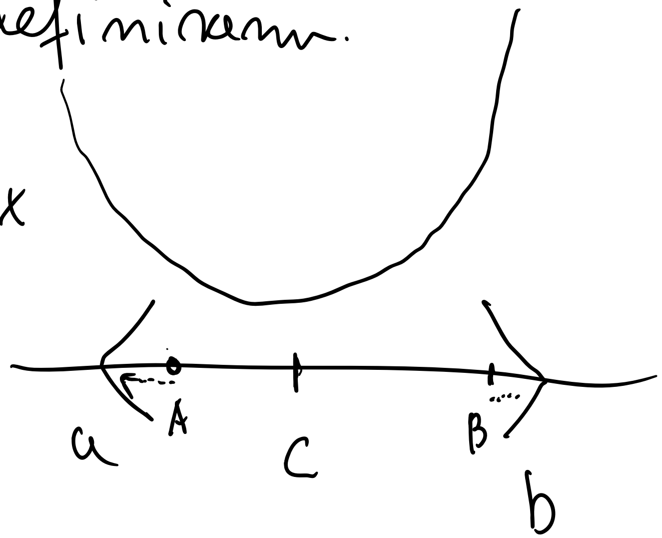
Analogno definiramo integral na $\langle a, b]$

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+} \int_A^b f(x)\,dx$$



Ako je f integrabilna na svakom segmentu $[A, B] \subset \langle a, b\rangle$ onda uz uvjet da su limesi postoje, definiramo

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+} \int_A^c f(x)\,dx + \lim_{B\to b^-} \int_c^B f(x)\,dx$$



gdje je $c \in \langle a, b\rangle$ bilo koja točka.

Prethodna definicija ne ovisi o odabiru točke c (d.z.).

Primjer 5.18.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+X} = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty}\left(\mathrm{Tg}^{-1}x\Big|_0^B\right) = \lim_{B\to+\infty}\mathrm{Tg}^{-1}B = \frac{\pi}{2}$$

Primjer 5.19.

$$\int_{-1\epsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to-1^+}\int_{\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to-1^+}\left(-\mathrm{Sin}^{-1}\varepsilon\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Primjer 5.20.

$$\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$$ divergira jer $$\lim_{F\to+\infty}\int_0^F \cos x\,dx = \lim_{F\to+\infty}\sin F$$ ne postoji.

Teorem 5.17. Neka je $a>0$.

1. Integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p>1$ i divergira za $p \leq 1$.

2. Integral $\displaystyle\int_{0\epsilon}^{a} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $0<p<1$ divergira za $p \geq 1$.

3. Integral $\displaystyle\int_{0\epsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ divergira za svaki $p \geq 0$.

Dokaz: 1. Za $p=1$ imamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \ln x \Big|_a^B = \lim_{B\to+\infty} \ln B - \ln a = +\infty$$ pa integral divergira.

Za $p \neq 1$ je

$$\int_a^B \frac{dx}{x^p} = \left(\frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\right)\Big|_a^B = \frac{1}{1-p}\left(B^{1-p} - a^{1-p}\right)$$

Zbog $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{za } \alpha>0 \\ 0 & \text{za } \alpha<0 \end{cases}$ imamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & \text{za } 1-p>0 \dots\ p<1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{za } 1-p<0 \dots\ p>1 \end{cases}$$ $\square$.

2. se slično dokaže (d.z.) 3. slijedi iz 1. i 2.

5.8.1. Kriterij konvergencije nepravog integrala.

Teorem 5.18. Neka je $a \geq 0$ i neka su fje.

$f, \varphi : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ t.d. vrijedi:

(i) $0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq x_0 > a$

(ii) $\forall B \geq 0$ postoje integrali

$$\int_a^B f(x)\,dx \quad i \quad \int_a^B \varphi(x)\,dx.$$

Ako je integral $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ konvergentan, onda je konvergentan i integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ i vrijedi

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Korolar 5.4. Neka su fje. $f, \varphi : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ pozitivne i neka postoji $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$ $(0 \le c \le +\infty)$.

Neka je $c < +\infty$ i ako konvergira integral $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ (2) onda konvergira i integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (1), odnosno ako divergira (1) onda divergira i (2). Ako je $c > 0$ i ako konvergira (1), onda konvergira (2), odnosno ako divergira (2) onda konvergira (1).

Ako je $0 < c < +\infty$ onda oba integrala istovremeno konvergiraju ili divergiraju (d.z.)