$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$$

6.5. Produkt redova

<u>Def. 6.5.</u> Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ redovi u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Definiramo niz $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$

Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zovemo produktom redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

u analogiji s množenjem polinoma

$$\boxed{\sum_{n=0}^{n_1} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{n_2} b_n x^n = \sum_{n=0}^{n_1+n_2} c_n x^n}$$

<u>Teorem 6.11.</u> Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ aps. konv sa sumom A i ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira k B, onda red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira k $A \cdot B$.

<u>Dokaz:</u> Označimo $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ i $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$; $B_n' = B_n - B$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ i $a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Ako je $a=0$ onda je $a_n = 0$ $\forall n$ pa se lako vidi da tvrdnja vrijedi. Pretp. da je $a > 0$, pa za parcijalne sume reda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ imamo:

$$
\begin{aligned}
C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \\
&= a_0 \cdot B_n + a_1 \cdot B_{n-1} + \dots + a_n \cdot B_0 \\
&= a_0 (B_n' + B) + a_1 (B_{n-1}' + B) + \dots + a_n (B_0' + B)
\end{aligned}
$$

tj. $C_n = A_n \cdot B + C_n'$, gdje je $C_n' = a_0 B_n' + \dots + a_n B_0'$.

Pokažimo da vrijedi $\lim C_n' = 0$. Budući da je $\lim B_n' = \lim (B_n - B) = 0$, postoji $M > 0$ t.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|B_n'| \le M$.

Neka je dan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > p \Rightarrow |B_n'| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2a}.$$

Zbog konvergencije reda $\sum a_n$ vrijedi $\lim a_n = 0$ pa za

$\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(p+1)M} > 0$ postoji $q \in \mathbb{N}$ t.d. $q \ge p$ t.d.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > q) \Rightarrow (|a_n| < \varepsilon_0).$$

Uzmimo sada $n_\varepsilon = p + q$. Za $n > n_\varepsilon$ imamo:

$$|C_n'| \le \left(|B_0'| \cdot |a_n| + \dots + |B_p'| \cdot |a_{n-p}|\right) + \left(|B_{p+1}'| \cdot |a_{n-p-1}| + \dots + |B_n'| \cdot |a_0|\right)$$

$$\le \varepsilon_2 \cdot M (p+1) + \varepsilon_1 \cdot a = \varepsilon \quad \checkmark$$

Dakle, $\lim C_n' = 0 \Rightarrow \lim C_n = A \cdot B$ $\blacksquare$

Napomena: U prethodnom teoremu nije moguće izostaviti uvjet apsolutne konvergencije kod oba reda. Naime, red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}}$$

konv. po Leibnitzovom kriteriju. Kvadrat tog reda

ima opći član

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k(2+n-k)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+n}} \right)$$

$k, n-k$

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{1+k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{1+(n-k)}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(1+k)(1+n-k)}}$$

Zbog,

$$\frac{1}{\sqrt{k(2+n-k)}} \geq \frac{1}{1+n} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n+1\}$$

jer je

$(1+n)^2 \geq k(2+n-k)$ (D.Z.).

imamo $|c_n| \geq 1$ (zašto? $|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+n}} \geq \frac{1}{1+n}(1+n) = 1$)

$\Rightarrow$ pa ~~kv~~ kvadrat polaznog reda divergira.

Primjer 6.16. Pokažimo da za fju. E iz Primjera 6.13 vrijedi $E(x) \cdot E(y) = E(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

prethodni teorem jer redovi $E(x)$ i $E(y)$ apsolutno konvergentni.

$$E(x) \cdot E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}_{= \binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \right) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

6.6. Redovi potencija

Neka je $(f_n)_n$ niz fja. $f_n : I \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$), $I \subseteq \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

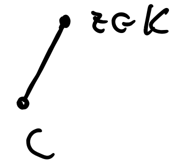
Red $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ zovemo <u>redom funkcija</u>.

Ako je $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $f_n(x) = a_n(x-c)^n$, $\forall x \in \mathbb{C}$, onda se red

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ naziva <u>red potencija</u> oko točke c.

Neka je $K = \{ z \in \mathbb{C} : \text{red } (*) \text{ konvergira u } z \}$

Def. $r := \sup \{ |z-c| : z \in K \}$ i nazivamo



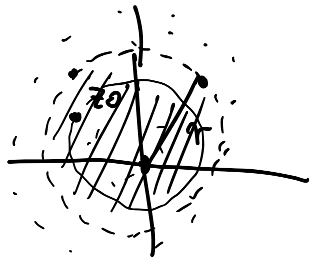
ga radijus konvergencije reda (*). Neka je $c = 0$, tj. promotrimo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(*_1)$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $(*_2)$

zovemo derivacija reda $(*_1)$ član po član, a red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (*_3)$$ zovemo antiderivacija reda $(*_1)$ član po član.

Teorem 6.12. (o radijusu konvergencije)

1. Redovi $(*_1)$, $(*_2)$ i $(*_3)$ imaju jednak radijus konvergencije.
2. Ako je r radijus konvergencije reda $(*_1)$ i $r>0$, onda svi redovi apsolutno konvergiraju $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|<r$ i divergiraju $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|>r$.



3. Ako je $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, onda je
$$r = \frac{1}{\rho}.$$

Dokaz:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (*)$

$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1} \quad (**)$

Pretp. $r > 0$. Tada su

$f, f_1 : K(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$

↑

otvoreni krug

Korolar 6.2. Neka su $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ i $f_1 : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ fj. def. s $(*)$ i $(**)$

Tada je $f_1(x) = f'(x)$, $\forall x \in \langle -r, r\rangle$. Fj. f ima derivaciju svakog reda na $\langle -r, r\rangle$, tj. $f \in C^\infty(\langle -r, r\rangle)$.

Također za $a, b \in \langle -r, r\rangle$, $a<b$ imamo

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

■