Teorija skupova

11. veljače 2009.

[20] 1. Nađite nužne i dovoljne uvjete na skupove A i B, tako da postoji skup X za koji je

$$A \cup X = X \setminus B\,.$$

Je li moguće da X bude jedinstveno određen? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

2. Odredite kardinalni broj skupa

[10] (a) svih realnih brojeva koji u niti jednom svom decimalnom zapisu nemaju beskonačno mnogo nula.

[15] (b) svih surjekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ koje imaju konačno mnogo nultočaka i na segmentu $[-\pi, \pi]$ poprimaju samo iracionalne vrijednosti.

3. Za skup $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je *konveksan* ako za svake dvije točke $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ iz skupa K i svaki $t \in [0, 1]$, vrijedi

$$(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in K \text{ (tj. dužina } \overline{PQ} \text{ je podskup skupa } K).$$

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Maksimalni konveksni podskup od S nazivamo *konveksna skela* od S.

[15] (a) Dokažite da svaki $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ima konveksnu skelu.

[5] (b) Dokažite da konveksna skela ne mora biti jedinstvena.

[20] 4. Izračunajte:

$$\sum_{i \in 3} \prod_{j \in \omega+1} (\omega + j)^i$$

5. Bez pozivanja na ordinalne brojeve:

[7] (a) definirajte prirodne brojeve,

[5] (b) definirajte zbrajanje prirodnih brojeva i

[3] (c) dokažite (detaljno!) da je $2 + 2 = 4$.

U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak, odnosno dio zadatka.
Na ispitu nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Rezultati: ponedjeljak, 16. veljače u 13:00.

Marko Doko