Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Martin Lazar

Poopćenja H-mjera i primjene

Disertacija

Zagreb, 2007.

Predgovor

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su krajem osamdesetih godina dvadesetog stoljeća neovisno uveli Luc Tartar i Patrick Gérard. Kako su se najprije pojavile vezano uz neke probleme iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su Radonove mjere definirane na kosferičnom svežnju $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ kao limes kvadratičnih izraza L^2 funkcija.

Kao relativno novo sredstvo H-mjere su se pokazale prikladne u primjeni na hiperboličke zadaće, te iz tog područja postoje brojni rezultati. Od toga spomenimo radove na valnoj jednadžbi ([T3], [G2], [FM], [L]), pri čemu se uz linearnu, proučavala i polulinearna jednadžba s neprekidnim koeficijentima ($\rho(\mathbf{x})u_n'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u_n) + u_n^3 = 0$), kao i rezultate dobivene za simetrične sustave ([A], [AL1]), koji su primjenjivi i na druge jednadžbe koje se mogu zapisati u tom obliku. Metode koje se pri tom koriste u pravilu se temelje na dva svojstva H-mjera: lokalizacijskom i prijenosnom. Prvo od njih opisuje nosač H-mjere, odnosno određuje skup točaka na kojem je mjera nošena, dok drugo omogućuje pridruživanje pojedinim sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi posebne prijenosne jednadžbe koja opisuje ne samo širenje oscilacija, već i koncentracija.

U prvom poglavlju ovog rada prikazana su dva pristupa definiciji H-mjera i navedena njihova osnovna svojstva. Izneseni su primjeri H-mjera za pojedine vrste slabo konvergentnih nizova. Također se u kratkim crtama opisuju metode korištene u njihovoj primjeni na hiperboličke zadaće, odnosno na valnu jednadžbu.

U drugom poglavlju pokušao sam ispitati primjenjivost tih metoda na nehiperboličke (posebno paraboličke) zadaće. Razmatranje sam započeo s jednadžbom provođenja, za koju najprije izvedem potrebne ocjene na rješenje u odgovarajućim prostorima. Pri tom proučavam utjecaj titrajućih (uključivo i koncentracijskih) efekata prisutnih u početnom trenutku, odnosno u nehomogenom članu na makroskopski limes disipacije energije. Primjenom analognog postupka na Schrödingerovu jednadžbu, koja ima neka zajednička svojstva s valnom jednadžbom, dobije se prijenosna jednadžba za odgovarajuću H-mjeru. Također komentirana je primjena metode na jednadžbu advekcije-difuzije. Kroz navedene primjene vidjet ćemo kako se razlika između paraboličkih i hiperboličkih jednadžbi odražava na svojstva H-mjera pridružena pripadnim rješenjima.

Primjenom H-mjera na paraboličke jednadžbe, za razliku od valne, odnosno hiperboličke jednadžbe, nije se uspjela dobiti relacija kojom bi se izrazila nepoznata H-mjera pridružena nizu (gradijenata) rješenja promatrane zadaće preko zadanih podataka. Razlog tome nalazimo u neodgovarajućem skaliranju dualne varijable iz definicije H-mjera, $\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$. Stoga sam u trećem poglavlju pristupio konstrukciji nove varijante (poopćenja) H-mjera koje bi u sebi sadržavalo drugačije skaliranje dualne varijable, bolje prilagođeno paraboličkim zadaćama. Nakon iznošenja osnovnih svojstava, kao i primjera za novouvedenu varijantu, pristupa se njenoj primjeni na zadaće razmatrane u drugom poglavlju, ne bi li uspjeli

ostvariti ciljeve koje s originalnim H-mjerama nismo.

U preostalom dijelu poglavlja izvodi se poopćenje lokalizacijskog svojstva s ciljem primjene na jednadžbe višeg reda po t (jednadžbu ploče). Također se daje primjer njihove primjene u teoriji homogenizacije, pri čemu se razmatra model temeljen na Stokesovom sustavu. U zadnjem poglavlju iznosimo ostale mogućnosti poopćenja H-mjera, kao i osnovne teoreme koje za takve mjere vrijede, te komentiramo mogućnosti njihovih primjena.

Ovaj rad nastao je pod vodstvom dr. sc. Nenada Antonića, mog mentora i prijatelja. Koristim priliku da mu se najtoplije zahvalim na dosadašnjoj suradnji i potpori, te svom znanju koje je prenio na mene. Također zahvaljujem dr. sc. Lucu Tartaru na posvećenom vremenu i korisnim prijedlozima iznesenim kroz višekratne kontakte, kao i dr. sc. Mladenu Juraku na danim primjedbama koje su doprinijele preciznosti i jasnoći ovog rada.

U Zagrebu, lipnja 2007.

Martin Lazar

Sadržaj

I. H-mjere

1. Uvod

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su krajem osamdesetih godina dvadesetog stoljeća neovisno uveli Luc Tartar [T3] i Patrick Gérard [G1]. Kako su se najprije pojavile vezano uz neke probleme iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su Radonove mjere definirane na kosferičnom svežnju $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ kao limes kvadratičnih izraza L^2 funkcija. Preciznije, neka je (u_n) omeđen niz u L^2 koji konvergira slabo k u. Tada je $(u_n - u)^2$ omeđen u L^1, stoga na podnizu konvergira slabo k pozitivnoj Radonovoj mjeri ν, koju zovemo defektna mjera. Međutim, za razliku od defektne mjere koja je indeksirana po x, H-mjere su indeksirane i po varijabli x i po njoj dualnoj varijabli u faznom prostoru ξ. Na taj način one razlučuju oscilacije s različitim pripadnim frekvencijama, što s klasičnim defektnim mjerama nije bio slučaj. Stoga ih je Gérard prozvao mikrolokalnim defektnim mjerama.

Nasuprot Youngovim mjerama, koje daju samo statički opis titranja, važna primjena H-mjera proizlazi iz *prijenosnog svojstva* koje zadovoljavaju. To svojstvo omogućuje pridruživanje pojedinim sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi posebne prijenosne jednadžbe koje opisuju ne samo širenje oscilacija, već i koncentracija.

Iako ne sadrže sve informacije koje u sebi nose Youngove mjere (ograničene su na računanje kvadratičnih izraza), mogu pomoći u provođenju određene vrste mikrolokanog računa s brojnim mogućnostima primjene. Posebno se to odnosi na računanje energije određenih sustava, jer je, u pravilu, upravo ta veličina izražena kvadratičnim članovima. Druga uspješna primjena H-mjera je u proširenju teorije kompaktnosti kompenzacijom s diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima na varijabilne (neprekidne) koeficijente.

U ovom poglavlju prikazat ću dva pristupa definiciji H-mjera i navesti njihova osnovna svojstva, te ih ilustrirati primjerima H-mjera za pojedine vrste slabo konvergentnih nizova. Također ću u kratkim crtama prikazati primjenu na hiperboličke zadaće (posebno valnu jednadžbu).

2. Postojanje i osnovni primjeri

Egzistencija H-mjera osigurana je sljedećim teoremom [T3].

Teorem 1. (postojanje H-mjera) *Neka je* (u_n) *niz iz* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ *takav da* $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} 0$ *(slabo). Tada postoji njegov podniz (označen istim indeksom) i hermitska matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}$ *na kosferičnom svežnju* $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ *takva da, za svaki izbor test funkcija* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ *i* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1};\mathbf{C})$, *vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}\Big(\varphi_1 \mathsf{u}_n\Big) \otimes \overline{\mathcal{F}\Big(\varphi_2 \mathsf{u}_n\Big)}\, \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} &= \langle \boldsymbol{\mu}, (\varphi_1 \bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \psi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\ .\end{aligned} \tag{1}$$

∎

Mjeru $\boldsymbol{\mu}$ iz gornjeg teorema nazivamo *H-mjerom* pridruženom (pod)nizu (u_n).

Za niz (u_n) kažemo da je *čist* ako je pripadna H-mjera jedinstvena za svaki njegov podniz.

U radu koristimo oznaku $\otimes$ za vektorski tenzorski produkt, definiran s $(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})\mathsf{v} = (\mathsf{v}\cdot\mathsf{b})\mathsf{a}$ (po komponentama $(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})_{ij} = a_i\overline{b}_j$), dok $\boxtimes$ označuje tenzorski produkt funkcija (distribucija) u različitim varijablama. Ukoliko nije drugačije naglašeno, pod (kompleksnom) Radonovom mjerom na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru X podrazumijevamo objekt iz $(\mathrm{C}_0(X))'$.

Dokaz Teorema 1. zasniva se na prvoj komutacijskoj lemi koja navodi da je razlika operatora pridruženih istom simbolu različitim kvantizacijama kompaktan operator [T3].

Lema 1. (prva komutacijska lema) *Neka su $a \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ i $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ neprekinute funkcije, te A i B njima pridruženi operatori na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A\mathsf{u})(\boldsymbol{\xi}) &:= a\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \\ B\mathsf{u}(\mathbf{x}) &:= b(\mathbf{x})\mathsf{u}(\mathbf{x})\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Tada je njihov komutator $K := [A, B] = AB - BA$ kompaktan operator na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

∎

Na osnovu gornje leme za limes iz iskaza Teorema 1. vrijedi da je

$$\lim_n \Big\langle \widehat{\varphi_1 u_{in}} \mid \overline{\psi}_0 \widehat{\varphi_2 u_{jn}} \Big\rangle_{\mathrm{L}^2} = \lim_n \Big\langle \varphi_1 u_{in} \mid \big(\overline{\psi}_0 \widehat{\varphi_2 u_{jn}}\big)^\vee \Big\rangle_{\mathrm{L}^2} = \lim_n \Big\langle \varphi_1 u_{in} \mid \varphi_2 \big(\overline{\psi}_0 \hat{u}_{jn}\big)^\vee \Big\rangle_{\mathrm{L}^2},$$

pri čemu je ψ_0 homogeno proširenje reda 0 funkcije ψ na $\mathbf{R}^d_*$, odnosno $\psi_0(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|})$. Stoga relaciju (1) možemo zapisati kao

$$\langle \mu_{ij}, \varphi \boxtimes \psi \rangle = \lim_n \Big\langle \widehat{\varphi u_{in}} \mid \overline{\psi}_0 \hat{u}_{jn} \Big\rangle_{\mathrm{L}^2},$$

gdje je $\varphi = \varphi_1 \overline{\varphi}_2$.

Direktna posljedica Teorema 1. su sljedeći korolari.

Korolar 1. *H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ je pozitivno semidefinitna, odnosno za svaku vektorsku funkciju $\boldsymbol{\phi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ mjera $\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}$ je (pozitivna) Radonova mjera na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$.*

∎

Korolar 2. *Neka je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera određena (pod)nizom $(\mathsf{u}_{n'})$. Ukoliko sve komponente $\mathsf{u}_{n'} \cdot \mathsf{e}_i$ imaju redom nosače u zatvorenim skupovima $K_i \subseteq \mathbf{R}^d$, tada nosač komponente $\boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j$ je sadržan u $(K_i \cap K_j) \times \mathrm{S}^{d-1}$.*

∎

Ukoliko je (u_n) omeđen niz u L^2 koji konvergira slabo k u, tada je $(u_n - u)^2$ omeđen u L^1, te stoga na podnizu konvergira slabo k pozitivnoj Radonovoj mjeri ν (defektnoj mjeri). Veza defektne i H-mjere dana je sljedećim korolarom.

Korolar 3. *Ako za niz funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ vrijedi da $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n$ konvergira slabo $*$ (vague) k mjeri $\boldsymbol{\nu}$, tada je za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \boxtimes 1 \rangle\ ,$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena (pod)nizu (u_n).

∎

Gornje tvrdnje također vrijede i za slabo konvergentne nizove (u_n) iz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, s tim da se test funkcije φ_1, φ_2 biraju iz prostora $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$. Pri tom pripadna H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ ne mora biti konačna Radonova mjera, već samo distribucija reda 0, odnosno objekt iz prostora $\big(\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)\big)'$.

Drugi pristup definiciji H-mjera je preko klasične teorije pseudodiferencijalnih operatora [G1]. *Klasični pseudodiferencijalni operator* je linearni operator $A : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ pridružen funkciji a, *simbolu*, iz prostora $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, koja zadovoljava dodatne ocjene na derivacije navedene ispod, takav da je:

$$Au(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Prostor pseudodiferencijalnih operatora na $\mathbf{R}^d$ reda $m \in \mathbf{Z}$, označen s $\Psi^m(\mathbf{R}^d)$, sastoji se od operatora čiji simboli zadovoljavaju sljedeće ocjene ($\partial_{\boldsymbol{\alpha}}$ predstavlja derivaciju obzirom na varijable x^i u fizikalnom prostoru, dok $\partial^{\boldsymbol{\beta}}$ označuje derivaciju po dualnim varijablama ξ_i):

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d)\, (\exists\, C_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{R}^+)\, (\forall\, \mathbf{x},\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} \Big(\sqrt{1 + 4\pi^2 |\boldsymbol{\xi}|^2} \Big)^{m - |\boldsymbol{\beta}|},$$

i.e. pripada Hörmanderovoj klasi $\mathrm{S}_{0,1}^m$. Nadalje, zahtijevamo da je a oblika

$$a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = a^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(1 - \phi(\boldsymbol{\xi})) + a^{m-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

gdje je a^m homogena funkcija reda m u $\boldsymbol{\xi}$, $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ s nosačem u jediničnoj kugli, te $\phi(\boldsymbol{\xi}) = 1$ oko ishodišta $\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, dok je $a^{m-1} \in \mathrm{S}_{0,1}^{m-1}$. Funkciju a^m nazivamo *glavnim simbolom* operatora $A \in \Psi^m$ i pišemo $a^m = \sigma_m(A)$. S $\Psi_c^m(\mathbf{R}^d)$ označit ćemo potprostor u $\Psi^m(\mathbf{R}^d)$ koji sadrži operatore čiji simboli su kompaktno nošeni u varijabli $\mathbf{x}$, rezultirajući operatorima A sa $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{E}'$ (prostor distribucija s kompaktnim nosačem).

Limes (1) iz iskaza Teorema 1. sada se može preformulirati na sljedeći način (podrazumijeva se kompleksni skalarani produkt vektora, odnosno matrica)

$$(\forall\, \mathbf{P} \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)) \quad \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{P}\mathsf{u}_n \cdot \mathsf{u}_n \, d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{p} \rangle,$$

gdje je $\mathbf{p}$ glavni simbol operatora $\mathbf{P}$.

H-mjere su općenito pridružene kompleksnim vektorskim funkcijama. Međutim ukoliko je niz (u_n) realan, pripadna H-mjera ima neka dodatna svojstva koja proizlaze iz sljedeće leme.

Lema 2. *Neka je (u_n) čist niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, te $\boldsymbol{\mu}$ pripadna H-mjera. Tada je i niz $(\overline{\mathsf{u}}_n)$ čist s pripadnom H-mjerom $\boldsymbol{\nu}$, te pri tom vrijedi da je $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\mu}^\top(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\xi})$.*

Posebno, H-mjera μ pridružena skalarnom realnom nizu je antipodalno simetrična, odnosno vrijedi da je $\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mu(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\xi})$.

Dem. Po definiciji H-mjera za test funkcije $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R})$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^0)$ imamo:

$$\langle \mu_{ij}, \varphi\psi \rangle = \lim_n \Big\langle \widehat{\varphi u_{in}} \mid \bar{\psi}_0 \hat{u}_{jn} \Big\rangle, \tag{3}$$

gdje je ψ_0 homogeno proširenje reda 0 funkcije ψ na $\mathbf{R}_*^d$. S druge strane, za niz $(\overline{\mathsf{u}}_n)$ vrijedi da je

$$\lim_n \Big\langle \widehat{\varphi \overline{u}_{in}} \mid \bar{\psi}_0 \widehat{\overline{u}_{jn}} \Big\rangle = \lim_n \overline{\Big\langle (\bar{\varphi} u_{in})^\vee \mid \psi_0 \check{u}_{jn} \Big\rangle} = \lim_n \overline{\Big\langle \widehat{\bar{\varphi} u_{in}} \mid \tilde{\psi}_0 \hat{u}_{jn} \Big\rangle}.$$

Pritom je druga nejednakost dobivena zamjenom varijabli ($\boldsymbol{\zeta} = -\boldsymbol{\xi}$), dok je s $\tilde{\psi}$ označena promjena predznaka argumenta u dualnoj varijabli ($\tilde{\psi}_0(\boldsymbol{\xi}) = \psi_0(-\boldsymbol{\xi})$). Korištenjem (3) imamo da je zadnji limes jednak

$$\overline{\langle \mu_{ij}, \overline{\varphi\tilde{\psi}} \rangle} = \overline{\langle \tilde{\mu}_{ij}, \bar{\varphi}\bar{\psi} \rangle} = \langle \tilde{\mu}_{ji}, \varphi\psi \rangle.$$

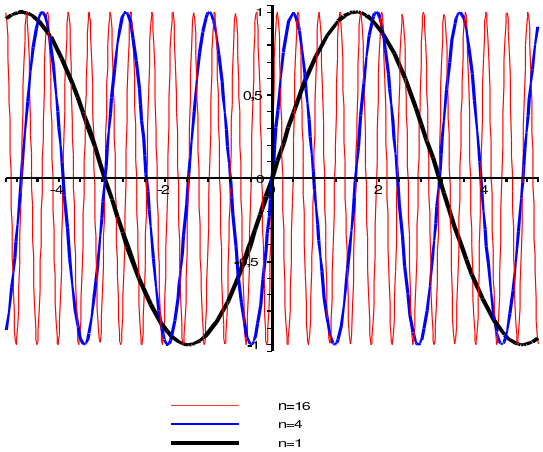
Q.E.D.

Kako H-mjere proučavaju limese kvadratičnih izraza slabo konvergentnih nizova, to se i osnovni primjeri H-mjera odnose na pojave koje uzrokuju odstupanje slabe od jake konvergencije (titranje i koncentracija).

Primjer 1. **(Titranje)** Neka je $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ periodična funkcija s jediničnim periodom (radi jednostavnosti) u svakoj od varijabli, te (u_n) niz iz istog prostora definiran relacijom

$$u_n(\mathbf{x}) := v(n\mathbf{x})$$

(vidi Sliku 1). Pri tom pretpostavljamo da je srednja vrijednost funkcije v nula, te stoga $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ i ima smisla gledati tom nizu pridruženu H-mjeru.



Slika 1. Primjer titrajućeg niza.

Gore definiran niz je *čist*, odnosno pripadna H-mjera je jedinstvena za svaki njegov podniz. Nadalje, dotična H-mjera je kombinacija Diracovih masa u dualnom prostoru, te Lebesgueove mjere λ u fizikalnom prostoru, točnije

$$\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathsf{k} \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}} |v_{\mathsf{k}}|^2 \lambda(\mathbf{x})\, \delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}(\boldsymbol{\xi}),$$

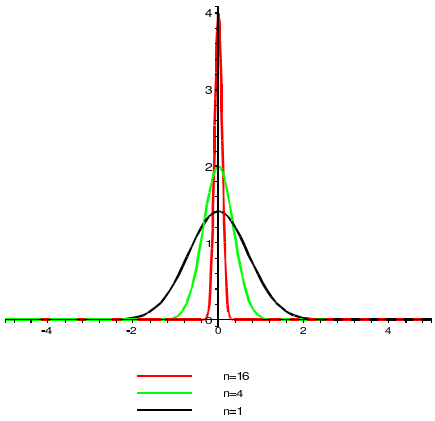
gdje su v_{k} Fourierovi koeficijenti funkcije v ($v(\mathbf{x}) = \sum_{\mathsf{k} \in \mathbf{Z}^d} v_{\mathsf{k}} e^{2\pi i \mathsf{k} \cdot \mathbf{x}}$).

∎

Primjer 2. **(Koncentracija)** Za zadanu funkciju $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ definiramo slabo konvergentan niz

$$u_n(\mathbf{x}) := n^{\frac{d}{2}} v\,(n\mathbf{x})$$

(vidi Sliku 2).



Slika 2. Primjer koncentracijskog niza.

Definirani niz je također čist, i pripadna H-mjera je oblika $\delta_0(\mathbf{x})\nu(\boldsymbol{\xi})$, gdje je ν mjera na S^d s površinskom gustoćom

$$\nu(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^\infty |\hat{v}(t\boldsymbol{\xi})|^2 t^{d-1} dt,$$

odnosno

$$\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}}(\boldsymbol{\xi}) \delta_0(\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\eta},$$

pri čemu je s $\hat{v}$ označena Fourierova pretvorba funkcije v. ∎

Direktna posljedica teorema postojanja je da je H-mjera pridružena L^2 jako konvergentnim nizovima trivijalna. Obrat te činjenice općenito ne vrijedi, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3. Polazeći od funkcije $v(x) = \frac{1}{2\pi x} \sin 2\pi x$, koja je u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$, ali ne i u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, definiramo niz L^2 funkcija

$$u_n(x) := \frac{n}{2\pi x} \sin\left(\frac{2\pi x}{n^2}\right).$$

L^2 norme funkcija u_n su konstante jednake $1/2$, a njihove Fourierove pretvorbe su funkcije

$$\hat{u}_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & |\xi| < \dfrac{1}{n^2} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nadalje, u_n konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Zaista, za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbf{R}} u_n(x) f(x) dx\right| &\le \int_{\mathbf{R}} \left|\frac{n}{2\pi x} \sin\left(\frac{2\pi x}{n^2}\right) f(x)\right| dx \\ &\le \int_{\mathbf{R}} \left|\frac{n}{2\pi x}\right| \left|\frac{2\pi x}{n^2}\right| \left|f(x)\right| dx = \frac{1}{n} \|f\|_{\mathrm{L}^1} \to 0\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo sad H-mjeru pridruženu nizu u_n. Uzimajući test funkcije $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^0)$ i operator $P \in \Psi_c^0(\mathbf{R})$ s glavnim simbolom $\sigma_0(P) = \varphi \boxtimes \psi_0$ dobijemo

$$\lim_n \langle\, Pu_n \mid u_n \,\rangle = \lim_n \Big\langle \Big(\psi_0(\widehat{\varphi u_n})\Big)^\vee \mid u_n \Big\rangle = \lim_n \Big\langle\, \widehat{\varphi u_n} \mid \overline{\psi}_0 \hat{u}_n \,\Big\rangle$$

$$= \lim_n \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi u_n}\ \psi(\frac{\xi}{|\xi|})\ \overline{\hat{u}_n(\xi)} d\xi = \lim_n \frac{n}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} \widehat{\varphi u_n}(\xi)\psi(\frac{\xi}{|\xi|}) d\xi.$$

Kako je

$$|\widehat{\varphi u_n}|(\xi) = \Big|\int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}_n(\eta)d\eta\Big| \le \frac{n}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|d\eta \le \frac{n}{2}\frac{2}{n^2}\|\hat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^\infty} = \frac{1}{n}\|\hat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^\infty},$$

to slijedi da

$$|\langle\, Pu_n \mid u_n \,\rangle| \le \frac{n}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} \frac{1}{n}\|\hat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^\infty}|\psi(\frac{\xi}{|\xi|})|d\xi \le \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}\frac{2}{n^2} \to 0.$$

Stoga je,

$$\langle \mu, \varphi \boxtimes \psi \rangle = \lim_n \langle\, Pu_n \mid u_n \,\rangle = 0,$$

što povlači da je H-mjera μ pridružena nizu u_n trivijalna. ∎

Gore navedeni primjer, odnosno skaliranje, može se generalizirati na klasu nizova generiranih netrivijalnom funkcijom $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$. Za takvu funkciju definiramo niz

$$u_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{n^d} v\left(\frac{\mathbf{x}}{n^2}\right).$$

Niz u_n ima konstantnu L^2 normu jednaku $\|v\|_{\mathrm{L}^2}$. S druge strane, za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ imamo da je

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} f(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big| \le \frac{1}{n^d}\int_{\mathbf{R}^d} |f(\mathbf{x})|\ |v(\frac{\mathbf{x}}{n^2})|d\mathbf{x} \le \frac{1}{n^d}\|f\|_{\mathrm{L}^1}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty} \to 0,$$

što povlači da $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Što je H-mjera pridružena nizu u_n? Kao prije, neka je $P \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^d)$ operator s glavnim simbolom $\sigma_0(P) = \varphi \boxtimes \psi_0$, gdje je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^{d-1})$. Računamo

$$\lim_n \langle\, Pu_n \mid u_n \,\rangle = \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(\mathbf{x})\,(\psi_0\hat{u}_n)^\vee(\mathbf{x})\ \overline{u}_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$= \lim_n \frac{1}{n^2}\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(\mathbf{x})\overline{v}(\frac{\mathbf{x}}{n^{2d}})\left(\psi_0(\sigma_{\frac{1}{n^2}}v)^\wedge\right)^\vee(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

gdje je σ_λ operator dilatacije $(\sigma_\lambda v)(\mathbf{x}) = v(\lambda\mathbf{x})$. Kako je

$$\left(\psi_0(\sigma_{\frac{1}{n^2}}v)^\wedge\right)^\vee(\mathbf{x}) = \big(\psi_0(\boldsymbol{\xi})n^2\,\hat{v}(n^2\boldsymbol{\xi})\big)^\vee(\mathbf{x}) = n^2\Big(\sigma_{n^2}(\psi_0\hat{v})\Big)^\vee(\mathbf{x}) = (\psi_0\hat{v})^\vee(\frac{\mathbf{x}}{n^2}),$$

to dobijemo da je gornji limes jednak limesu niza ($K := \operatorname{supp}\varphi$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{2d}}\int_K \varphi(\mathbf{x})\overline{v}(\frac{\mathbf{x}}{n^2})\,(\psi_0\hat{v})^\vee(\frac{\mathbf{x}}{n^2})d\mathbf{x} &= \int_{K/n^2}\varphi(n^2\mathbf{x})\overline{v}(\mathbf{x})\,(\psi_0\hat{v})^\vee(\mathbf{x})d\mathbf{x}\\ &\leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(K/n^2)}\|\,(\psi_0\hat{v})^\vee\,\|_{\mathrm{L}^2(K/n^2)}\\ &\leq \left(\frac{\mathsf{vol}(K)}{n^{2d}}\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\to 0.\end{aligned}$$

Gornja konvergencija povlači da je niz u_n čist, a pripadna H-mjera trivijalna.

Izneseno poopćenje napravljeno je proučavanjem fenomena suprotnog koncentraciji, kojeg možemo nazvati *disperzijom*. Slični rezultati se dobiju ako se uzme $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$, te definira niz funkcija $u_n(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x} - n\mathsf{e})$, e je jedinični vektor, čiji nosači se sve više udaljuju od ishodišta. U oba slučaja dolazi do izražaja lokalna narav H-mjera, koja ne vidi informacije koje pobjegnu u beskonačnost. Stoga su i pripadne H-mjere trivijalne, iako su generirane nizovima koji konvergiraju k nuli slabo, ali ne i jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Međutim, ukoliko je H-mjera pridružena nizu u_n trivijalna, onda niz (u_n) konvergira k nuli jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$.

3. Osnovna svojstva H-mjera

H-mjere su karakterizirane s dva važna svojstva: lokalizacijskim i prijenosnim. Prvo opisuje nosač H-mjere, odnosno određuje skup točaka na kojem je mjera nošena, dok drugo omogućuje proučavanje širenja koncentracijskih i oscilacijskih pojava.

Opći oblik lokalizacijskog svojstva iskazan je sljedećim teoremom (za dokaz vidi [G1]).

Teorem 2. (Lokalizacijsko svojstvo) *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbf{R}^d$, te $\mathbf{P}:\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r) \to \mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ diferencijalni operator zadan formulom*

$$\mathbf{P}\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha(\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x})\mathsf{u}(\mathbf{x})),$$

pri čemu su $\mathbf{A}_\alpha$ omeđeni, neprekidni (matrični) koeficijenti. Pretpostavimo nadalje da je (u_n) čisti niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, koji zadovoljava diferencijalnu relaciju

$$\mathbf{P}\mathsf{u}_n = \mathsf{f}_n,$$

pri čemu $\mathsf{f}_n \to 0$ jako u $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Tada na $\Omega\times\mathrm{S}^{d-1}$ vrijedi relacija

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0},$$

gdje je $\mathbf{p}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=m}\boldsymbol{\xi}^\alpha\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x})$ glavni simbol operatora $\mathbf{P}$, a $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena nizu (u_n). Drugim riječima, nosač H-mjere $\boldsymbol{\mu}$ je sadržan u skupu na kojem je $\mathbf{p}$ singularno.

∎

Prilikom pridruživanja H-mjere nizu funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ u gornjem teoremu implicitno pretpostavljamo da su one definirane na cijelom $\mathbf{R}^d$. Ukoliko u_n nemaju nosače sadržane u kompaktnom skupu unutar Ω, možemo pomnožiti diferencijalnu relaciju iz iskaza teorema test funkcijom $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$. Funkcije u_n se zatim prošire nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$, pri čemu uvedeno proširenje i dalje označujemo jednako.

Napomenimo da ukoliko je diferencijalni operator $\mathbf{P}$ eliptičan, odnosno ukoliko niz funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ rješava niz zadaća pridruženih eliptičkoj jednadžbi, onda će zbog gornjeg svojstva pripadna H-mjera biti nužno trivijalna.

Posebni oblik lokalizacijskog svojstva (čija varijanta će biti prikazana u trećem poglavlju) je sljedeći. Ukoliko je $\mathbf{A}$ neprekidna matrična funkcija, te

$$\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\mathsf{u}_n) \longrightarrow 0$$

u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, tada je

$$\boldsymbol{\mu}^\top(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}) = 0,$$

odnosno stupci mjere $\boldsymbol{\mu}$ su okomiti na vektor $\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}$.

Za razliku od lokalizacijskog svojstva koje se može izreći općenito i nije vezano za pojedini diferencijalni operator $\mathbf{P}$, prijenosno svojstvo ovisi o samoj jednadžbi, odnosno sustavu. U donjem dijelu iznijet ću njegovu verziju za simetrične sustave (za detalje vidi [A, AL1]), koji je koristan s obzirom da se brojne jednadžbe dadu zapisati u tom obliku.

Teorem 3. (Prijenosno svojstvo za simetrične sustave) *Neka su* $\mathbf{A}^k \in \mathrm{C}^1_0(\Omega; \mathrm{M}_{r\times r})$ *hermitske matrice, gdje je* $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ *otvoren skup, te* $\mathbf{B} \in \mathrm{C}_b(\Omega; \mathrm{M}_{r\times r})$. *Ako niz* $(\mathsf{u}_n, \mathsf{f}_n) \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^2(\Omega;\, \mathbf{C}^{2r})$ *i za svaki* n *zadovoljava sustav*

$$\sum_{k=1}^{d} \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}_n + \mathbf{B}\mathsf{u}_n = \mathsf{f}_n\ , \tag{4}$$

tada H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ *pridružena (pod)nizu* $(\mathsf{u}_n, \mathsf{f}_n)$, *oblika*

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{11} & \boldsymbol{\mu}_{12} \\ \boldsymbol{\mu}_{12}^* & \boldsymbol{\mu}_{22} \end{bmatrix},$$

zadovoljava izraz

$$\langle \boldsymbol{\mu}_{11}, \{\mathbf{p}, \Phi\} + \Phi \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}^k - 2\Phi\mathbf{S}\rangle + \langle 2\mathsf{Re}\,\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12}, \Phi\rangle = 0\ , \tag{5}$$

gdje je $\mathbf{S} := \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)$ *hermitski dio matrice* $\mathbf{B}$, $\Phi \in \mathrm{C}^1_0(\Omega \times S^{d-1})$ *test funkcija, dok* $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{k=1}^{d} \xi_k \mathbf{A}^k(\mathbf{x})$ *označuje glavni simbol operatora* $\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{d} \mathbf{A}^k \partial_k + \mathbf{B}$. *Poissonova zagrada* $\{\cdot,\cdot\}$ *se definira kao* $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\} := \sum \left(\partial^i \mathsf{a}\, \partial_i \mathsf{b} - \partial_i \mathsf{a}\, \partial^i \mathsf{b}\right) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathsf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathsf{b} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathsf{a} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathsf{b}$.

∎

Gornja H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ je $2r \times 2r$ matrična mjera pridružena nizu $(\mathsf{u}_n, \mathsf{f}_n)$, s kvadratnim blokovima $\boldsymbol{\mu}_{11}$ i $\boldsymbol{\mu}_{22}$ određenim redom s u_n, odnosno f_n, dok izvandijagonalni blokovi odgovaraju produktima u_n i f_n. Kao kod iskaza lokalizacijskog svojstva, i ovdje podrazumijevamo da su funkcije u_n i f_n proširene nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$.

Dokaz prijenosnog svojstva temelji se na drugoj komutacijskoj lemi koja osigurava dodatnu regularnost komutatora $[A, B]$. Za klasične pseudodiferencijalne operatore $A \in \Psi^m$ i $B \in \Psi^n$ vrijedi da je njihov komutator $[A, B] \in \Psi^{m+n-1}$. Tartar je u [T3] to svojstvo dokazao za operatore pridružene funkcijama s manjom glatkoćom (klase C^1_0). U tu svrhu, najprije je za $m \in \mathbf{N}_0$ uveo vektorski prostor $X^m(\mathbf{R}^d)$, koji se sastoji od svih funkcija sa svojstvom da sve njihove derivacije do reda m pripadaju prostoru $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, to jest da je njihova Fourierova pretvorba L^1 funkcija. Lako se vidi da je $X^m(\mathbf{R}^d)$ vektorski prostor, te da je s

$$\|w\|_{X^m} := \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^m)|\mathcal{F}w(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi}\ ,$$

dana norma na $X^m(\mathbf{R}^d)$. Za $m \in \mathbf{N}_0$ možemo definirati i prostore $X^m_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ svih funkcija w takvih da za proizvoljnu test funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi $\varphi w \in X^m(\mathbf{R}^d)$.

Lema 3. (druga komutacijska lema) *Neka su A i B operatori definirani relacijama (2), s pripadnim simbolima a i b koji zadovoljavaju jednu od sljedećih pretpostavki*

(i) $a \in \mathrm{C}^1(\mathrm{S}^d)$ *i* $b \in X^1(\mathbf{R}^d)$,

(ii) $a \in X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d_*)$ *i* $b \in \mathrm{C}^1_0(\mathbf{R}^d)$.

Tada je komutator $K := AB - BA \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d); \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)\right)$, *te (proširujući po homogenosti funkciju a na $\mathbf{R}^d$) operator $\nabla_{\mathbf{x}} K$ ima simbol $(\nabla^{\boldsymbol{\xi}} a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b)\boldsymbol{\xi}$.* ∎

Vratimo se sad na iskaz Teorema 3. i prokomentirajmo njegovo značenje. Bit jednadžbe (5) je da parcijalnim deriviranjem, odnosno prebacivanjem derivacija s test funkcije možemo dobiti diferencijalnu jednadžbu prvog reda za mjeru $\boldsymbol{\mu}$. U slučaju kad je jedna od razmatranih varijabli vremenska varijabla t, dobije se prijenosna jednadžba koju $\boldsymbol{\mu}$ zadovoljava. Na taj način prijenosno svojstvo omogućuje opis H-mjere određene nizom rješenja sustava (4) pomoću početnih uvjeta, odnosno njima pridruženih H-mjera. Drugim riječima, nepoznatu H-mjeru možemo izračunati bez da znamo niz koji je određuje, odnosno, bez da trebamo (znamo) riješiti odgovarajuću početnu zadaću. Makroskopsku veličinu (H-mjeru) direktno izražavamo pomoću makroskopskih veličina, bez prijelaza na mikroskalu (predstavljenu nizom rješenja).

Kao i za simetrične sustave, slični rezultati postoje i za (polulinearnu) valnu jednadžbu. Ti rezultati se mogu dobiti na dva načina: primjenom pseudodiferencijalnog računa direktno na jednadžbu [T3, FM, G2], ili zapisivanjem valne jednadžbe u obliku simetričnog sustava (4) [A, L].

Preciznije, razmotrimo niz zadaća:

$$
(6) \qquad \begin{cases} \rho(\mathbf{x}) u_n'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u_n) + u_n^3 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_n'(0) = \beta_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \end{cases}
$$

čiji koeficijenti $\rho, \mathbf{A}$ su realne funkcije klase $\mathrm{C}^1_0(\mathbf{R}^d)$, pri čemu je $\rho(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^+$ dok $\mathbf{A}$ poprima vrijednosti u prostoru simetričnih i pozitivno definitnih $d \times d$ matrica. Pri tom pretpostavljamo da je $d \leqslant 3$ (ta se pretpostavka može ispustiti u slučaju linearne jednadžbe).

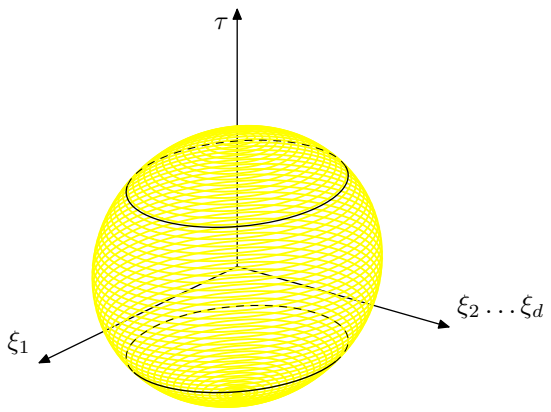
Pripadna mikroskopska gustoća energije je L^2 funkcija

$$
d_n = \frac{1}{2}\left(\rho(\partial_t u_n)^2 + \mathbf{A}\nabla u_n \cdot \nabla u_n + \frac{1}{2} u_n^4\right) \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^d).
$$

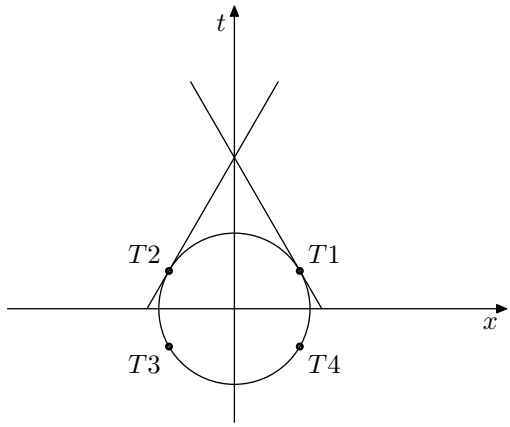
H-mjera μ pridružena gornjem nizu (d_n) opisuje pripadnu makroskopsku veličinu. Lokalizacijsko svojstvo u ovom primjeru glasi $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,\mu = 0$, gdje je $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \rho(\mathbf{x})\tau^2 - \mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}$. To znači da je μ nošena na presjeku jedinične sfere s konusnim plohama

$$
(\tau, \boldsymbol{\xi}) = \left(\pm\sqrt{\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\rho}}, \boldsymbol{\xi}\right).
$$

U posebnom slučaju $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$, gdje je λ realna skalarna funkcija, krivulje presjeka su kružnice označene na Slici 3.



Slika 3. Nosač H-mjere pridružene nizu d_n, za $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}$.



Slika 4. Karakteristike i nosač H-mjere za $d = 1$.

Primjenom Teorema 2 na (6) dobije se transportna jednadžba za H-mjeru μ. Projekcije pripadnih integralnih krivulja na fizikalni $(t, \mathbf{x})$ prostor podudaraju se s karakteristikama polazne (valne) jednadžbe. Te projekcije su tangencijalne na jediničnu sferu u točkama u kojima je μ nošena, što je skicirano na Slici 4. za slučaj $d = 1$. Na taj način H-mjera sadrži informacije o smjeru širenja oscilacijskih i koncentracijskih pojava.

Kao i kod simetričnih sustava, prijenosna jednadžba omogućuje da se pripadna H-mjera μ može izraziti direktno pomoću H-mjera pridruženih početnim uvjetima, tako izbjegavajući eksplicitno računanje mikroskopske energije pomoću rješenja zadaće (6).

Na kraju ovog poglavlja napomenimo da u određivanju veze između nepoznate H-mjere i početnih uvjeta postoje dva osnovna pristupa. Prvi od njih definira trag H-mjere $\boldsymbol{\mu}$ u trenutku $t = 0$, u oznaci $\boldsymbol{\mu}(t = 0)$. Na osnovu prijenosnog svojstva mjera $\boldsymbol{\mu}(t = 0)$ se propagira uzduž integralnih krivulja jednadžbe (5), te se iz nje može rekonstruirati mjera $\boldsymbol{\mu}$. Te integralne krivulje se mogu interpretirati kao projekcije na $\mathbf{R}^{1+d} \times \mathrm{S}^d$ integralnih krivulja Hamiltonovog sustava koje se nazivaju bikarakteristikama. Poteškoća koja se pri tom javlja je što je mjera $\boldsymbol{\mu}(t = 0)$ objekt na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d$ (u varijablama $\mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}$), dok je mjera $\boldsymbol{\mu}^0$ određena nizom početnih uvjeta $u_n^0(\mathbf{x}) := u_n(0, \mathbf{x})$ definirana na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ (u varijablama $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$), odnosno radi se o objektima različitog tipa. Problem se rješava pomoću lokalizacijskog svojstva koje daje vezu između τ i $\boldsymbol{\xi}$ varijable, i nosač mjere $\boldsymbol{\mu}(t = 0)$ reducira na kružnice bijektivne s S^{d-1} (domenom mjere $\boldsymbol{\mu}^0$), na taj način omogućujući nalaženje relacija između tih mjera.

Drugi pristup (npr. [BM], [G2]) polazi od ideje da se zamrzne vremenska varijabla t, odnosno da se za svaki trenutak definira niz funkcija $u_n^t(\mathbf{x}) := u_n(t, \mathbf{x})$. Kako su uvedene funkcije u_n^t funkcije samo varijable $\mathbf{x}$, to su i njima pridružene H-mjere $\boldsymbol{\mu}^t$ definirane na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$, odnosno, radi se o objektima istog tipa kao i mjera $\boldsymbol{\mu}^0$ određena početnim uvjetima. Zbog toga je račun koji se koristi znatno jednostavniji nego li kod prvog pristupa, čime se olakšava uspostava veze između nepoznate H-mjere i zadanih veličina. Međutim, nedostatak takvog pristupa je da dobivena mjera nije definirana u obje dualne varijable (τ i $\boldsymbol{\xi}$), zbog čega se gube podatci o smjeru širenja koje inače H-mjera sadrži (skicirani na Slici 4).

II. Primjena H-mjera na paraboličke zadaće

1. Uvod

H-mjere su se kao relativno novo sredstvo pokazale prikladne u primjeni na hiperboličke zadaće, te iz tog područja postoje brojni rezultati. Pri tom spomenimo radove o valnoj jednadžbi ([T3], [G2], [FM], [L]), pri čemu se uz linearnu, proučavala i polulinearna jednadžba s neprekidnim koeficijentima ($\rho(\mathbf{x})u_n'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u_n) + u_n^3 = 0$), kao i rezultate dobivene za simetrične sustave ([A], [AL1]), koji su primjenjivi i na druge jednadžbe koje se mogu zapisati u tom obliku. Metode koje se pri tom koriste u pravilu se temelje na dva svojstva H-mjera: lokalizacijskom i prijenosnom.

U ovom poglavlju pokušao sam ispitati primjenjivost tih metoda na nehiperboličke (posebno paraboličke) zadaće. Razmatranje sam započeo s jednadžbom provođenja, za koju najprije izvedem potrebne ocjene na rješenje u odgovarajućim prostorima. Jednadžbu zapisujemo u obliku simetričnog sustava, kako bismo mogli primijeniti lokalizacijsko i prijenosno svojstvo. Pri tom proučavam utjecaj titrajućih (uključivo i koncentracijskih) efekata prisutnih u početnom trenutku, odnosno nehomogenom članu na makroskopski limes disipacije energije.

Primjenom analognog postupka na Schrödingerovu jednadžbu, koja ima neka zajednička svojstva s valnom jednadžbom, dobijemo prijenosnu jednadžbu za odgovarajuću H-mjeru. Također komentiramo primjenu metode na jednadžbu advekcije-difuzije. Kroz sve te primjene vidjet ćemo kako se razlika između paraboličkih i hiperboličkih jednadžbi odražava na svojstva H-mjera pridružena pripadnim rješenjima. Dobiveni rezultati su dodatno objašnjeni nizom primjera.

2. Ocjene na rješenje jednadžbe provođenja

U ovom odjeljku želimo dokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja za jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = f \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

u odgovarajućem prostoru, kao i dobiti ocjene na rješenje.

Zadaću ćemo postaviti u apstraktnom obliku, s ciljem primjene varijacijskih metoda predstavljenih u [DL, Ch. XVIII, §3]. Pretpostavit ćemo da su V, H realni, separabilni Hilbertovi prostori, takvi da je

$$V \overset{g}{\hookrightarrow} H \overset{g}{\hookrightarrow} V',$$

pri čemu je H identificiran sa svojim dualom H', V' označuje dual prostora V, dok $\overset{g}{\hookrightarrow}$ označuje neprekidno gusto ulaganje. Drugim riječima, prostori V, H, V' čine Geljfandovu trojku.

Vezano uz gornje prostore, u daljnjem razmatranju ćemo trebati neke činjenice iz funkcionalne analize, sadržane u sljedećoj lemi (za dokaz vidi [DL]).

Lema 1. *Neka su X, Y dva (kompleksna) Hilbertova prostora, pri čemu je $X \overset{g}{\hookrightarrow} Y$, te $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. Tada je*

$$W(a,b;X,Y) := \{u : u \in \mathrm{L}^2([a,b];X), u' \in \mathrm{L}^2([a,b];Y)\}$$

Hilbertov prostor s normom definiranom izrazom $\|u\|_W^2 = \|u\|^2_{\mathrm{L}^2([a,b];X)} + \|u'\|^2_{\mathrm{L}^2([a,b];Y)}$. Nadalje, prostor $\mathrm{C}_c^\infty([a,b];X)$ (restrikcije funkcija iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R};X)$ na $[a,b] \cap \mathbf{R}$) je gust u $W(a,b;X,Y)$.

Posebno, neka je $X = V$, $Y = V'$, te H Hilbertov prostor takav da je

$$V \overset{g}{\hookrightarrow} H \overset{g}{\hookrightarrow} V',$$

odnosno, neka prostori V, H, V' čine Geljfandovu trojku. Tada vrijedi da je

$$W(a,b;V) := W(a,b;V,V') \hookrightarrow \mathrm{C}([a,b];H).$$

∎

Nadalje, neka je s $a(t;\cdot,\cdot)$ označena neprekidna, bilinearna forma na $V \times V$ sa svojstvom da je $a(\cdot;u,v)$ izmjeriva na $[0,T]$ za svaki $u,v \in V$, $T \in \mathbf{R}^+$, te da postoje $M, \alpha \in \mathbf{R}^+$ takvi da je

$$\begin{cases} a(t;u,v) \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, & (\text{ss } t \in [0,T]),\ u,v \in V \\ a(t;u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, & (\text{ss } t \in [0,T]),\ u \in V. \end{cases} \tag{1}$$

Uz gornje pretpostavke, za skoro svaki $t \in [0,T]$ forma a definira neprekidan linearan operator $A(t) : V \to V'$ zadan izrazom

$${}_{V'}\langle\, A(t)u, v \,\rangle_V := a(t;u,v),$$

pri čemu je

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')} \leqslant M. \tag{2}$$

Postojanje rješenja varijacijske zadaće

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle\, u(\cdot) \mid v \,\rangle_H + a(\cdot;u(\cdot),v) = \langle f(\cdot), v\rangle, & v \in V \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

pri čemu je gornja jednakost shvaćena u smislu distribucija na $\langle 0,T\rangle$, dok su u_0, f *prikladne* funkcije, osigurano je sljedećim teoremom [DL].

Teorem 1. *Uz pretpostavku da je $u_0 \in H$, $f \in \mathrm{L}^2([0,T];V')$, te da bilinearna forma a na $V \times V$ zadovoljava ocjene (1), postoji jedinstveno rješenje zadaće (3), $u \in W(0,T;V)$.* ∎

Napomenimo da zahtjev (3_2) ima smisla zato što rješenje tražimo u prostoru $W(0,T;V)$ koji je uložen u $\mathrm{C}([0,T];H)$.

Teorem 1. također vrijedi i uz slabiju pretpostavku na formu a, točnije, umjesto (1_2) dovoljno je zahtijevati da postoje $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takvi da je

$$a(t;u,u) + \lambda\|u\|_H^2 \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \quad (\text{ss } t \in [0,T]),\ u \in V. \tag{4}$$

Naime, za funkciju $\tilde{u} = ue^{-kt}, k \in \mathbf{R}$ vrijedi da je

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle\, \tilde{u}(\cdot) \mid v \,\rangle_H + k\langle\, \tilde{u}(\cdot) \mid v \,\rangle_H + a(\cdot;\tilde{u}(\cdot),v) = \langle e^{-kt}f(\cdot), v\rangle \\ \tilde{u}(0) = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Stoga forma $\tilde{a}(t;u,v) = k\langle\, u \mid v \,\rangle_H + a(t;u,v)$, uz izbor $k = \lambda$ zadovoljava uvjete Teorema 1, pa je $\tilde{u} \in W(V)$ jedinstveno rješenje zadaće (5), iz čega slijedi da je $u = \tilde{u}e^{kt}$ jedinstveno rješenje zadaće (3).

Rješenje se dobije Galjorkinovom metodom kao jaki limes u $\mathrm{L}^2([0,T];V)\cap\mathrm{L}^\infty([0,T];H)$ niza aproksimativnih rješenja u_m koja zadovoljavaju ocjene

$$\|u_m(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t\|u_m(s)\|_V^2\,ds\leqslant C\left(\|u_0\|_H^2+\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2\,ds\right),\quad t\in[0,T].$$

Stoga i traženo rješenje u zadovoljava iste ocjene. Štoviše, za $t\in[0,T]$ ono zadovoljava *energetsku jednakost*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2+\int_0^t a(s;u(s),u(s))ds=\frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2+\int_0^t\langle f(s),u(s)\rangle ds, \tag{6}$$

pri čemu izraz na lijevoj strani predstavlja energiju sustava. Nadalje, polazeći od jednakosti

$$\partial_t u=f-A(t)u,$$

primjenom ocjene (2) dobijemo da je

$$\begin{aligned}\|\partial_t u\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V')}&\leqslant\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V')}+M\|u\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V)}\\&\leqslant C\left(\|u_0\|_H+\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V')}\right).\end{aligned}$$

Napomenimo da su gornje ocjene dobivene uz pretpostavku $A(t;u,u)\geqslant\alpha\|u\|_V^2$. Međutim, općenito taj uvjet neće biti ispunjen za zadaće koje ćemo razmatrati, već će vrijediti slabiji uvjet (4). Pitamo se da li će odgovarajuće ocjene za rješenje vrijediti i u tom slučaju. Kao što smo već komentirali, za funkciju $\tilde{u}=ue^{-\lambda t}$ vrijede gornje ocjene, pri čemu je ona rješenje jednadžbe

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\langle\,\tilde{u}(\cdot)\mid v\,\rangle_H+\tilde{a}(\cdot;\tilde{u}(\cdot),v)=\langle e^{-\lambda t}f(\cdot),v\rangle\\ \tilde{u}(0)=u_0,\end{cases}$$

gdje je $\tilde{a}(t;u,v)=\lambda\langle\,u\mid v\,\rangle_H+a(t;u,v)$. Stoga je

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t\|\tilde{u}(s)\|_V^2\,ds&\leqslant\tilde{C}\left(\|u_0\|_H^2+\int_0^T\|e^{-\lambda s}f(s)\|_{V'}^2\,ds\right)\\&\leqslant\tilde{C}\left(\|u_0\|_H^2+\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2\,ds\right),\quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

S druge strane za $t\in[0,T]$ je

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t\|\tilde{u}(s)\|_V^2\,ds&=e^{-2\lambda t}\|u(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)\|_V^2\,ds\\&\geqslant e^{-2\lambda T}\left(\|u(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t\|u(s)\|_V^2\,ds\right).\end{aligned}$$

Usporedbom gornjih jednakosti dobivamo traženu ocjenu

$$\|u(t)\|_H^2+\alpha\int_0^t\|u(s)\|_V^2\,ds\leqslant C\left(\|u_0\|_H^2+\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2\,ds\right),\quad t\in[0,T].$$

Zanima nas da li u općem slučaju također vrijedi jednakost (6). Uvrštavanjem $\tilde{u} = ue^{-\lambda t}$ i $\tilde{a}(t;u,v) = \lambda\langle\, u \mid v\,\rangle_H + a(t;u,v)$ u (6) dobijemo da je

$$\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\|u(t)\|_H^2+\int_0^t e^{-2\lambda s}\Big(\lambda\|u(s)\|_H^2+a(s;u(s),u(s))\Big)ds=\frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2+\int_0^t e^{-2\lambda s}\langle f(s),u(s)\rangle ds,$$

odnosno

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(e^{-2\lambda s}\|u(s)\|_H^2\right) + e^{-2\lambda s}\Big(\lambda\|u(s)\|_H^2 + a(s;u(s),u(s)) - \langle f(s),u(s)\rangle\Big)ds \\ &= \int_0^t e^{-2\lambda s}\Big(\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u(s)\|_H^2 + a(s;u(s),u(s)) - \langle f(s),u(s)\rangle\Big)ds. \end{aligned}$$

Deriviranjem gornje jednakosti sljedi da je

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + a(t;u(t),u(t)) = \langle f(t),u(t)\rangle,$$

odnosno, jednakost (6) vrijedi i u općem slučaju.

Gornja razmatranja želimo primijeniti na prostore $V = \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d), H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te formu

$$a(t;u,v) = {}_{\mathrm{H}^{-1}}\langle -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u), v\,\rangle_{\mathrm{H}^1} = \langle\, \mathbf{A}\nabla u \mid \nabla v\,\rangle_{\mathrm{L}^2}, \tag{7}$$

pri čemu je $\mathbf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{R}))$. Uz dodatnu pretpostavku da postoji $\alpha > 0$ takav da je $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geqslant \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$,

$$a(t;u,u) = \langle\, \mathbf{A}\nabla u \mid \nabla u\,\rangle_{\mathrm{L}^2} \geqslant \alpha\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \alpha(\|u\|_{\mathrm{H}^1}^2 - \|u\|_{\mathrm{L}^2}^2),$$

odnosno, forma a definirana s (7) ispunjava svojstva (1_1) i (4). Time smo dokazali sljedeći korolar Teorema 1.

Korolar 1. *Uz gornje pretpostavke na matričnu funkciju* $\mathbf{A}$, *postoji jedinstveno rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = f \in \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)) \\ u(0) = u_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d), \end{cases}$$

$u \in W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)) \hookrightarrow \mathrm{C}([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$, *te pritom vrijedi da su norme* $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))}$ *i* $\|u\|_{W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))}$, *odozgo omeđene normama funkcija* u_0 *i* f. ∎

Pri primjeni H-mjera na jednadžbu provođenja razmatrat ćemo niz zadaća

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)) \\ u_n(0) = u_n^0 \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d). \end{cases} \tag{8}$$

Zbog omeđenosti nizova $(f_n), (u_n^0)$, na osnovu Korolara 1. slijedi omeđenost niza rješenja (u_n) u $W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, zbog čega on konvergira slabo (na podnizu) u odgovarajućim prostorima. Jaku pak konvergenciju niza (u_n) dobijemo primjenom sljedeće leme (dokaz se može naći npr. u [T1]).

Lema 2. (Aubinova lema o kompaktnosti) *Neka su* B_0, B_1 *i* B_2 *Banachovi prostori takvi da je* $B_1 \hookrightarrow B_2$ *neprekidno i* $B_0 \hookrightarrow B_1$ *kompaktno. Ukoliko je niz* (u_n) *omeđen u* $\mathrm{L}^p([0,T];B_0)$ *i* (u_n') *omeđen u* $\mathrm{L}^p([0,T];B_2)$ *za neki* $T < \infty$ *i* $p \in \langle 1,\infty\rangle$, *tada je* (u_n) *sadržan u kompaktnom skupu u* $\mathrm{L}^p([0,T];B_1)$. ∎

Lemu ćemo primijeniti na prostore $B_0 = \mathrm{H}_0^1(\Omega), B_1 = \mathrm{H}^s(\Omega), B_2 = \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, gdje je $s \in \langle -1, 1\rangle$, dok je Ω omeđen skup u $\mathbf{R}^d$. Zbog ocjene na rješenja niza zadaća (8) dobijemo da je za svaki $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, niz (ϕu_n) relativno kompaktan u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^s(\Omega))$, iz čega za $s = 0$ slijedi da $u_n \to u$ (do na podniz) u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$.

Želimo pokazati da je limes $u = 0$. Prelaskom na limes u jednadžbi (8_1) (u smislu distribucija) slijedi da je

$$\partial_t u - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = 0. \tag{9}$$

Ostaje provjeriti da je $u(0) = 0$, odakle će zbog jedinstvenoosti rješenja slijediti tražena tvrdnja. Napomenimo da $u(0)$ ima smisla jer je $u \in W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)) \hookrightarrow \mathrm{C}([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$. Dualnim množenjem (u smislu dualnosti $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}_0^1(\mathbf{R}^d))$ i $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))$) jednakosti (8_1) s test funkcijom $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$ imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \langle \partial_t u_n, \phi\rangle - \int_0^\infty \langle \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n), \phi\rangle - \int_0^\infty \langle f_n, \phi\rangle \\ &= -\int_0^\infty \langle u_n, \partial_t \phi\rangle - \langle u_n(0), \phi(0)\rangle - \int_0^\infty \langle u_n, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\phi)\rangle - \int_0^\infty \langle f_n, \phi\rangle \\ &\longrightarrow -\int_0^\infty \langle u, \partial_t\phi\rangle - \int_0^\infty \langle u, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\phi)\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

S druge strane

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \langle \partial_t u_n, \phi\rangle - \int_0^\infty \langle u_n, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\phi)\rangle - \int_0^\infty \langle f_n, \phi\rangle \\ &\longrightarrow \int_0^\infty \langle \partial_t u, \phi\rangle - \int_0^\infty \langle u, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\phi)\rangle \\ &= -\int_0^\infty \langle u, \partial_t\phi\rangle - \langle u(0), \phi(0)\rangle - \int_0^\infty \langle u, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\phi)\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Usporedbom relacija (11) i (10) zaključujemo da je $\langle u(0), \phi(0)\rangle = 0$ za svaku test funkciju $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$ iz čega uz pomoć jednakosti (9) zaključujemo da je $u = 0$, odnosno,

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)) \\ u_n &\longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d). \end{aligned}$$

Također, prva od gornjih konvergencija povlači i da

$$\nabla u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)),$$

zbog čega je dobro definirana H-mjera pridružena (pod)nizu (∇u_n).

3. Primjena H-mjera na jednadžbu provođenja

H-mjere ćemo najprije primijeniti na homogenu jednadžbu provođenja s varijabilnim koeficijentima. Točnije, razmatrat ćemo sljedeći niz početnih zadaća

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = 0 \\ \qquad\qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,. \end{cases} \tag{12}$$

U cilju primjene prijenosnog svojstva na gornji niz zadaća pretpostavit ćemo da je $\mathbf{A}$ realna, uniformno pozitivno definitna matrična funkcija klase $\mathrm{C}_0^1(\mathbf{R}^{1+d};\mathrm{M}_{d\times d})$, čime su ujedno osigurani uvjeti Korolara 1, odnosno egzistencija i jedinstvenost rješenja zadaća (12), kao i ocjene (konvergencije) u odgovarajućim prostorima.

Disipacija energije za jednadžbu provođenja (12) određena je izrazom $\mathbf{A}\nabla u_n\cdot\nabla u_n$, pri čemu $\nabla u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$. Stoga nizu (∇u_n) možemo pridružiti H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ koja će predstavljati makroskopski limes disipacije energije. Cilj nam je mjeru $\boldsymbol{\mu}$ izraziti preko niza početnih uvjeta γ_n, odnosno njima pridružene H-mjere.

U tu svrhu pokušat ćemo primijeniti postupak opisan za valnu jednadžbu. Zapisujući (12_1) u obliku ekvivalentnog simetričnog sustava (a^i označuje i-ti stupac matrice $\mathbf{A}$ i $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$)

$$\begin{bmatrix}1 & 0^\top\\ 0 & \mathbf{0}\end{bmatrix}\partial_t\begin{bmatrix}u_n\\ \mathsf{v}_n\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^d\begin{bmatrix}\operatorname{div}\mathsf{a}^i & (\mathsf{a}^i)^\top\\ \mathsf{a}^i & \mathbf{0}\end{bmatrix}\partial_{x^i}\begin{bmatrix}u_n\\ \mathsf{v}_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0^\top\\ 0 & \mathbf{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\ \mathsf{v}_n\end{bmatrix}=0, \tag{13}$$

možemo primijeniti prijenosno svojstvo za simetrične sustave (Teorem I.3). Ono nam daje da je

$$\Big\langle\tilde{\boldsymbol{\mu}},\{\mathbf{p},\Phi\}+\Phi\sum_{k=0}^d\partial_k\mathbf{A}^k-2\Phi\mathbf{S}\Big\rangle=0\ , \tag{14}$$

pri čemu je

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}\tau & 0^\top\\ 0 & \mathbf{0}\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^d\xi_i\begin{bmatrix}\operatorname{div}\mathsf{a}^i & (\mathsf{a}^i)^\top\\ \mathsf{a}^i & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau-\operatorname{div}(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) & -(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})^\top\\ -\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

glavni simbol diferencijalnog operatora u (13), Φ proizvoljna test funkcija iz prostora $\mathrm{C}_c^1\left(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d\right)$, dok su $\mathbf{A}^0,\mathbf{A}^i$ matrice koje se u (13) nalaze uz derivacije ∂_t, odnosno ∂_{x^i}, $i=1,\dots,d$. Nadalje, sa $\mathbf{S}$ je označena matrica $\begin{bmatrix}0 & 0^\top\\ 0 & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, gdje je $\mathbf{B}:=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top)$ simetrični dio $\mathbf{A}$, a $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ je H-mjera pridružena nizu (u_n,v_n). Zbog jake konvergencije $u_n\to 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$, mjera $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ je oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}=\begin{bmatrix}0 & 0^\top\\ 0 & \boldsymbol{\mu}\end{bmatrix}\ ,$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena nizu funkcija $\mathsf{v}_n=\nabla u_n$. Zbog rasporeda trivijalnih elemenata u mjeri $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$, odnosno matricama $\mathbf{A}^k$, $k=0,\dots,d$, na lijevoj strani izraza (14) ostane samo član $2\langle\tilde{\boldsymbol{\mu}},\Phi\mathbf{S}\rangle=2\langle\mathbf{S}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}},\Phi\rangle=2\langle\mathsf{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}),\Phi\rangle$. Zbog proizvoljnosti test funkcije, slijedi da je $\mathsf{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})=0$. Na osnovu te tvrdnje želimo zaključiti da je $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$. U tu svrhu provedimo sljedeće razmatranje.

Kako je $\mathbf{B}$ neprekidna, realna, simetrična matrična funkcija, to postoje dijagonalna, D, i ortogonalna matrična funkcija $\mathbf{P}$, takve da je

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{x})=\mathbf{P}^\top(t,\mathbf{x})\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\mathbf{P}(t,\mathbf{x}).$$

Napomenimo da su zbog neprekidnosti svojstvenih vrijednosti, te svojstvenih vektora (što vrijedi barem u slučaju jednostrukih svojstvenih vrijednosti, [K]), funkcije $\mathbf{D},\mathbf{P}$ također neprekidne, štoviše klase C_b, te ih se kao takve smije množiti s H-mjerom $\boldsymbol{\mu}$.

Stoga je

$$0=\mathsf{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})=\mathsf{tr}(\mathbf{P}^\top\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}\mathbf{P})=\mathsf{tr}(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}})=\sum d_i(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}})_{ii}, \tag{15}$$

gdje je s $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}}$ označena mjera $\mathbf{P}^\top \boldsymbol{\mu}\mathbf{P}$, dok je $d_i = (\mathbf{D})_{ii}$. Zbog pozitivne definitnosti matrične funkcije $\mathbf{B}$ je $d_i(t,\mathbf{x}) > 0$ za svaki $(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{1+d}$, te $i = 1,\ldots,d$. Slična nejednakost vrijedi i za mjere $(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}})_{ii}$. Naime, na osnovu Korolara I.1. znamo da je za svaku vektorsku funkciju $\boldsymbol{\phi} = \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{C}^d)$ mjera $\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}$ (pozitivna) Radonova mjera na $\mathrm{C}(\mathbf{R}^{1+d}\times \mathrm{S}^d)$. Stoga je

$$(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}})_{ii} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}}\mathsf{e}_i\cdot\mathsf{e}_i = \mathbf{P}^\top\boldsymbol{\mu}\mathbf{P}\mathsf{e}_i\cdot\mathsf{e}_i = \boldsymbol{\mu}\mathbf{P}\mathsf{e}_i\cdot\mathbf{P}\mathsf{e}_i \geqslant 0,$$

gdje je e_i vektor kanonske baze u $\mathbf{R}^d$. Usporedbom s (15), zbog pozitivnosti funkcija d_i, slijedi da je $(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}})_{ii} = 0$ za svaki $i = 1,\ldots,d$, odnosno $\mathsf{tr}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}}) = \mathsf{tr}(\boldsymbol{\mu}) = 0$. Tvrdnja sad slijedi na osnovu sljedeće leme.

Lema 3. *Ako za H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ vrijedi da je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0$ onda je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.*

Dem. H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ je hermitska, pozitivno definitna, zbog čega vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^{d}\mu_{ij}\varphi_i\overline{\varphi}_j \geqslant 0, \tag{16}$$

za proizvoljnu d-torku funkcija $\varphi_i \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d), i = 1,\ldots,d$. Posebno, za proizvoljnu $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ definirajmo slog

$$\varphi_j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \varphi, & j = i. \end{cases}$$

Tada relacija (16) povlači

$$\mu_{ii}|\varphi|^2 \geqslant 0.$$

Ukoliko je $\mu_{ii}|\varphi|^2 > 0$ za neki $i \in \{1,\ldots,d\}, \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, tada je

$$\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{d}\mu_{ii}|\varphi|^2 > 0,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je $tr\boldsymbol{\mu} = 0$. Stoga su svi dijagonalni elementi mjere $\boldsymbol{\mu}$ nulmjere.

Nadalje, definirajmo d-torku funkcija

$$\varphi_k = \begin{cases} \varphi, & k = i \\ \alpha\varphi, & k = j \\ 0, & k \neq i,j, \end{cases}$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbf{C}$ proizvoljan. Relacija (16) nam daje

$$\mu_{ij}\varphi\overline{\alpha\varphi} + \mu_{ji}\overline{\varphi}\alpha\varphi \geqslant 0.$$

Zbog $\mu_{ij} = \overline{\mu_{ji}}$ slijedi da je

$$2\mathsf{Re}\,(\mu_{ij}\alpha|\varphi|^2) \geqslant 0.$$

Uzimajući $\alpha = \pm 1$ zaključujemo da je $\mathsf{Re}\,\mu_{ij} = 0$. Analogno, stavljajući $\alpha = \pm i$ dobijemo da je $\mathsf{Im}\,\mu_{ij} = 0$.

Q.E.D.

Na taj način smo dobili da je H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu ∇u_n trivijalna, odnosno da poremećaji prisutni u trenutku $t = 0$, izraženi preko H-mjere pridružene nizu $u_n(0)$, trnu za $t > 0$ i nisu uočljivi na makroskopskoj razini.

U posebnom slučaju konstantnih koeficijenata, ovaj rezultat se mogao dobiti koristeći regularnost rješenja za homogenu jednadžbu provođenja. Ono daje da $\nabla u_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ što direktno povlači da je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Međutim, gornjim računom taj smo rezultat poopćili na slučaj varijabilnih koeficijenata.

Napomenimo da smo rezultat mogli dobiti i na drugi način, zapisujući (12_1) kao

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathsf{0}^\top \\ \mathsf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{d} \begin{bmatrix} 0 & (\mathsf{e}^i)^\top \\ \mathsf{e}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_{x^i} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{0}^\top \\ \mathsf{0} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} = \mathsf{0},$$

gdje je sad s v_n označen niz $\mathbf{A}\nabla u_n$, te računajući njemu pridruženu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$. Primjenom prijenosnog svojstva (Teorem I.3) dobijemo da je $\mathsf{tr}(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}) = 0$, gdje je $\mathbf{B}^{-1}$ simetrični dio matrice $\mathbf{A}^{-1}$, iz čega na gore opisan način zaključujemo da je $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$. Tvrdnja sad slijedi iz dolje navedenog korolara (za dokaz v. [G1] ili [T3]).

Korolar 2. *Neka je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena nizu funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, te neka je $\mathbf{A} \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{r\times r}(\mathbf{C}))$. Tada je H-mjera $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ pridružena nizu $(\mathbf{A}\mathsf{u}_n)$ dana formulom $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}^*$.* ∎

U cilju daljnjeg proučavanja jednadžbe provođenja, i eventualnog dobivanja zanimljivih (netrivijalnih) rezultata, promijenimo zadaću (11) uvođenjem netrivijalne desne strane:

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = \mathsf{div}\,\mathsf{f}_n \\ \qquad\qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \end{cases} \tag{17}$$

gdje $\mathsf{f}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$, dok $\mathbf{A}$ ima svojstva navedena na početku odjeljka. Označujući s $\boldsymbol{\mu}_f$ H-mjeru pridruženu (pod)nizu (f_n), želimo naći vezu između nje i nepoznate H-mjere koja opisuje disipaciju energije, $\boldsymbol{\mu} \sim \nabla u_n$.

Zapisana kao (simetrični) sustav, jednadžba (17_1) glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathsf{0}^\top & \mathsf{0}^\top \\ \mathsf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathsf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \\ \mathsf{f}_n \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{d} \begin{bmatrix} \mathsf{div}\,\mathsf{a}^i & (\mathsf{a}^i)^\top & (\mathsf{e}_i)^\top \\ \mathsf{a}^i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathsf{e}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_{x^i} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \\ \mathsf{f}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{0}^\top & \mathsf{0}^\top \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \\ \mathsf{f}_n \end{bmatrix} = 0, \tag{18}$$

pri čemu je $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$. Simbol pripadnog diferencijalnog operatora je

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \tau - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) & -(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})^\top & -\boldsymbol{\xi}^\top \\ -\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\xi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

dok je H-mjera $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ pridružena nizu $(u_n, \mathsf{v}_n, \mathsf{f}_n)$ oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathsf{0}^\top & \mathsf{0}^\top \\ \mathsf{0} & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}_{12} \\ \mathsf{0} & \boldsymbol{\mu}_{21} & \boldsymbol{\mu}_f \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\boldsymbol{\mu}$ mjera pridružena nizu $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$, $\boldsymbol{\mu}_f$ pridružena nizu f_n, dok preostale dvije mjere, $\boldsymbol{\mu}_{12}$ i $\boldsymbol{\mu}_{21}$, odgovaraju produktima v_n i f_n.

Primjenom prijenosnog svojstva na sustav (18) dobijemo da je

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}) = -\mathsf{trRe}\,\boldsymbol{\mu}_{12}.$$

Kako je mjera $\boldsymbol{\mu}_{12}$ nepoznata (ovisi i o rješenju u_n), iz gornje relacije ne možemo rekonstruirati mjeru $\boldsymbol{\mu}$. Stoga ćemo korisniji rezultat pokušati dobiti primjenom lokalizacijskog svojstva, odnosno Teorema I.2. Na taj način dobijemo jednakost

$$\mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}\begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})^\top\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\mu}_{21} & (\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})^\top\boldsymbol{\mu}_{12} + \boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\mu}_f \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

iz čega (zbog $\boldsymbol{\mu}_{12} = \boldsymbol{\mu}_{21}^*$, te $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$) slijedi da je

$$(\boldsymbol{\mu}\mathbf{A} + \boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi} = 0, \tag{19}$$

odnosno

$$(\boldsymbol{\mu}_{21}\mathbf{A} + \boldsymbol{\mu}_f)\boldsymbol{\xi} = 0. \tag{20}$$

Pomoću gornjih relacija htjeli bismo dobiti vezu između mjera $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\mu}_f$. Da bismo to postigli trebat ćemo najprije saznati nešto više o obliku gornjih matričnih mjera, što je sadržaj sljedeće dvije leme i Korolara 3.

Lema 4. *H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu funkcija oblika $\mathsf{v}_n = \nabla u_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d}; \mathrm{M}_{d\times d})$, zadovoljava relaciju*

$$(1-\tau^2)\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}.$$

Posebno, vrijedi da je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}, \qquad \boldsymbol{\xi} \neq 0\,, \tag{21}$$

zbog čega je mjera $\boldsymbol{\mu}$ realna.

Dem. Na osnovu Schwarzovih relacija za parcijalne derivacije slijedi da je $\partial_i(\mathsf{v}_n)_j = \partial_j(\mathsf{v}_n)_i$ za $i, j = 1, \ldots, d$, odnosno, $\mathsf{div}\,(\mathbf{A}_{ij}\mathsf{v}_n) = 0$, pri čemu su elementi matrice $\mathbf{A}_{ij}$ zadani relacijama

$$(\mathbf{A}_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & k=i,\, l=j \\ -1, & k=j,\, l=i \\ 0, & \text{ina"ce} \end{cases}$$

Stoga, na osnovu lokalizacijskog svojstva vrijedi da je

$$\xi_j\mu^{im} = \xi_i\mu^{jm} \quad i,j,m = 1,\ldots,d\,. \tag{22}$$

Posebno, uvrštavajući $m = i$, sumacijom po i slijedi

$$(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\xi}\,. \tag{23}$$

Nadalje, koristeći (22) dobijemo da je

$$\xi_j\mu^{im} = \xi_i\mu^{jm} = \xi_i\bar{\mu}^{mj} = \xi_m\bar{\mu}^{ij} = \xi_m\mu^{ji}\,. \tag{24}$$

Pri tome smo u drugoj jednakosti koristili hermitičnost matrice $\boldsymbol{\mu}$, u trećoj evidentnu činjenicu da (22) vrijedi i za matricu $\overline{\boldsymbol{\mu}}$, te na koncu, u posljednjoj jednakosti nanovo hermitičnost.

Množeći zadnju relaciju s ξ_m, te sumacijom po m i korištenjem (23), slijedi da je

$$\left(\sum_m \xi_m^2\right) \mu^{ji} = \xi_j(\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\xi})_i = \xi_j\xi_i\,\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}.$$

Kako dualna varijabla $\boldsymbol{\eta} = (\tau, \boldsymbol{\xi})$ poprima vrijednosti na jediničnoj sferi, slijedi da je

$$(1-\tau^2)\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}.$$

Q.E.D.

Lema 5. *Za mjeru $\boldsymbol{\mu}_{12}$ pridruženu produktu funkcija v_n i f_n vrijedi da je*

$$\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\big(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi} - (1-\tau^2)\mathbf{I}\big) = 0.$$

Štoviše mjera $\boldsymbol{\mu}_{12}$ zadovoljava matričnu jednakost

$$\big(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi} - (1-\tau^2)\mathbf{I}\big)\,\boldsymbol{\mu}_{12} = \mathbf{0},$$

odnosno, za $\boldsymbol{\xi}\neq 0$ ona je oblika $\boldsymbol{\mu}_{12} = (\nu_1\boldsymbol{\xi},\, \nu_2\boldsymbol{\xi}, \ldots, \nu_d\boldsymbol{\xi})$, pri čemu je $\nu_i = \frac{\boldsymbol{\mu}_{12}^i\cdot\boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}^2}$, dok $\boldsymbol{\mu}_{12}^i$ označuje i-ti stupac mjere $\boldsymbol{\mu}_{12}$.

Posebno, vrijedi da je $\boldsymbol{\mu}_{12}\,\boldsymbol{\xi} = (\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12})\,\boldsymbol{\xi}$.

Dem. Označimo s $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ H-mjeru pridruženu nizu $(\mathsf{v}_n, \mathsf{f}_n)$. Budući da je $\partial_i(\mathsf{v}_n)_j = \partial_j(\mathsf{v}_n)_i$ za $i, j = 1, \ldots, d$, analogno kao u prethodnoj lemi pokaže se da je

$$\xi_j\tilde{\mu}^{im} = \xi_i\tilde{\mu}^{jm}, \quad i, j = 1, \ldots, d,\ m = 1, \ldots 2d.$$

Kako je $\tilde{\mu}^{im} = \mu_{12}^{i,m-d}$ za $m = d+1, \ldots, 2d$, to slijedi da je

$$\xi_j\mu_{12}^{im} = \xi_i\mu_{12}^{jm}, \quad i, j, m = 1, \ldots, d, \tag{25}$$

što je relacija analogna relaciji (22). Uvrštavajući $m = i$ i sumirajući po i dobijemo da je

$$\xi_j\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12} = \sum_i \xi_i\mu_{12}^{ji} = (\boldsymbol{\mu}_{12}\boldsymbol{\xi})_j,$$

odnosno,

$$(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12})\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu}_{12}\,\boldsymbol{\xi}\ ,$$

što je analogon relacije (23). Međutim, izraz analogan (24) iz dokaza prethodne leme ne možemo dobiti jer mjera $\boldsymbol{\mu}_{12}$ nije hermitska, odnosno relacije (25) ne vrijede za mjeru $\boldsymbol{\mu}_{21}$. Množeći zadnju relaciju skalarno s $\boldsymbol{\xi}$ dobijemo da je

$$(1-\tau^2)\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12} = \boldsymbol{\mu}_{12}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}),$$

iz čega slijedi prva tražena tvrdnja.

Nadalje, množeći (25) s ξ_j i zbrajajući po j dobije se da je

$$(1-\tau^2)\mu_{12}^{im} = \xi_i\boldsymbol{\mu}_{12}^m\cdot\boldsymbol{\xi},$$

odnosno

$$(1-\tau^2)\boldsymbol{\mu}_{12}^m = (\boldsymbol{\mu}_{12}^m\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}_{12}^m,$$

iz čega slijedi da je za $\boldsymbol{\xi}\neq 0$ i-ti stupac matrice $\boldsymbol{\mu}_{12}$ jednak $\nu_i\boldsymbol{\xi}$, gdje je $\nu_i = \frac{\boldsymbol{\mu}_{12}^i\cdot\boldsymbol{\xi}}{1-\tau^2}$ skalarna (neomeđena) Radonova mjera, odnosno distribucija reda nula.

Q.E.D.

Korolar 3. *Za mjeru $\boldsymbol{\mu}_{21}$ pridruženu produktu funkcija f_n i v_n vrijedi da je*

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_{21} \cdot \big(\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} - (1-\tau^2)\mathbf{I}\big) = 0.$$

Također vrijedi da je $(1-\tau^2)\boldsymbol{\mu}_{21} = \boldsymbol{\mu}_{21}(\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})$, te $\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\mu}_{21} = (\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{21})\boldsymbol{\xi}^\top$.

Dem. Uz oznaku $\mathbf{C} := \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} - (1-\tau^2)\mathbf{I}$ vrijedi

$$0 = \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \mathbf{C} = \mathsf{tr}\,(\boldsymbol{\mu}_{12}\mathbf{C}) = \mathsf{tr}\,((\boldsymbol{\mu}_{12}\mathbf{C})^\tau) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{C}\,\overline{\boldsymbol{\mu}}_{21}) = \mathsf{tr}\,(\overline{\boldsymbol{\mu}}_{21}\mathbf{C}) = \overline{\boldsymbol{\mu}}_{21} \cdot \mathbf{C},$$

pri čemu je korištena realnost i simetričnost matrice $\mathbf{C}$.

Preostale tvrdnje se dobiju adjungiranjem odgovarajućih tvrdnji za mjeru $\boldsymbol{\mu}_{12}$ i koristeći da je $\boldsymbol{\mu}_{12}^* = \boldsymbol{\mu}_{21}$.

Q.E.D.

Korištenjem Leme 5. relaciju (19) možemo zapisati kao $\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = -(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi}$, što konjugiranjem, zbog realnosti mjere $\boldsymbol{\mu}$, prelazi u

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = -(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{21})\,\boldsymbol{\xi}.$$

Nadalje, množeći (20) skalarno s $\boldsymbol{\xi}$ i uzimajući u obzir svojstva mjere $\boldsymbol{\mu}_{21}$, imamo da je

$$\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\mu}_{21}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\mu}_{21}^*\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\mu}_{21}^\top\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = -(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{21})\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}.$$

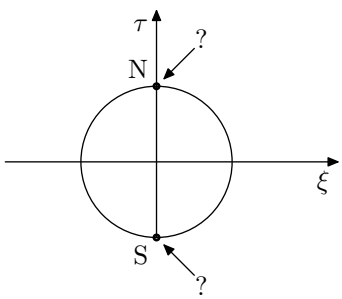
Kombiniranjem zadnjih dviju relacija dobijemo da je

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi},$$

odnosno, uvrštavanjem oblika (21):

$$\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\xi}^2 \frac{\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}}{(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi})^2}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0, \tag{26}$$

što je tražena relacija između nepoznate mjere $\boldsymbol{\mu}$ i H-mjere određene desnom stranom, $\boldsymbol{\mu}_f$. Primijetimo da dobivena relacija vrijedi svugdje osim u točkama $\tau = \pm 1$ (polovima sfere u dualnom prostoru).



Slika 5. Točke u kojima mjera $\boldsymbol{\mu}$ nije određena.

Posebno, za $d = 1$ ($\mathbf{A} = a$) gornja relacija prelazi u

$$a^2\mu = \mu_f, \quad \xi \neq 0. \tag{27}$$

U svrhu boljeg razumijevanja dobivenih rezultata razmotrimo sljedeće primjere.

Primjer 1. Za

$$f_n(t,x) = \sin\left(2\pi n(\alpha t + \beta x)\right)$$

je rješenje zadaće provođenja

$$\begin{cases} \partial_t u_n - a\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \dfrac{\partial f_n}{\partial x} \\ u_n(0) = 0, \end{cases}$$

dano izrazom

$$u_n(t,x) = \frac{1}{(2\pi na)^2+1}\Big(2\pi na\cos(2\pi n(t+x)) + \sin(2\pi n(t+x)) \\ - e^{-(2\pi n)^2 at}\Big(2\pi na\cos(2\pi nx) + \sin(2\pi nx)\Big)\Big).$$

Niz (f_n) je čist, te je na osnovu Primjera I.1. pripadna H-mjera

$$\mu_f = \frac{1}{4}\left(\delta_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(\tau,\xi) + \delta_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(\tau,\xi)\right)\lambda(t,x)\ .$$

Ostaje naći H-mjeru μ pridruženu nizu funkcija

$$\partial_x u_n(t,x) = \frac{2\pi n}{(2\pi na)^2+1}\Big(2\pi na\cos(2\pi n(t+x)) + \sin(2\pi n(t+x)) \\ - e^{-(2\pi n)^2 at}\Big(2\pi na\cos(2\pi nx) + \sin(2\pi nx)\Big)\Big).$$

Kako u gornjem izrazu svi članovi osim prvog konvergiraju jako k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$, lako se provjeri da je za prizvoljni pseudodiferencijalni operator $P\in\Psi^0_c$ limes $\langle P\partial_x u_n, \partial_x u_n\rangle$ jednak limesu izraza $\langle P\partial_x f_n, \partial_x f_n\rangle/a^2$. Stoga je, $a^2\mu = \mu_f$, kao što smo i očekivali na osnovu izraza (27). ∎

Zanimljiviji problem je onaj u kojem je mjera μ_f nošena na polovima, jer u tim točkama nemamo nikakve relacije između mjera. Stoga promatramo sljedeću višeskalnu zadaću koja sadrži asimetriju između vremenske i prostorne koordinate. Kao i prije, početne uvjete uzimamo da su jednaki nuli, jer oni ne utječu na mjeru $\boldsymbol{\mu}$.

Primjer 2. Promotrimo niz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ funkcija (α i β su proizvoljne realne konstante):

$$f_n(t,x) = \sin\big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta nx)\big) = \frac{1}{2i}\left(e^{2\pi i(\alpha n^2 t+\beta nx)} - e^{-2\pi i(\alpha n^2 t+\beta nx)}\right)\ .$$

Želimo izračunati H-mjeru μ_f pridruženu nizu f_n, odnosno, limes

$$\lim_n\Big\langle \psi(\tau,\xi)\hat{f}_n(\tau,\xi), \widehat{\bar{\varphi} f_n}\,(\tau,\xi)\Big\rangle\ ,$$

gdje je $\psi(\tau,\xi)\varphi(t,x)$ glavni simbol operatora $P\in\Psi^0_c(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$. Kako je

$$\hat{f}_n(\tau,\xi) = \frac{1}{2i}\Big(\delta_{\alpha n^2}(\tau)\delta_{\beta n}(\xi) - \delta_{-\alpha n^2}(\tau)\delta_{-\beta n}(\xi)\Big)$$

slijedi da je traženi limes jednak

$$\lim_n \frac{1}{4}\Big(\psi(\alpha n^2,\beta n)\Big(\check{\varphi}(0,0) - \check{\varphi}(-2\alpha n^2,-2\beta n)\Big) - \psi(-\alpha n^2,-\beta n)\Big(\check{\varphi}(2\alpha n^2,2\beta n) - \check{\varphi}(0,0)\Big)\Big).$$

Kako je ψ homogena funkcija reda 0, te $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}), \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, dobijemo da je

$$\mu_f = \frac{1}{4}\left(\delta_{(1,0)}(\tau,\xi) + \delta_{(-1,0)}(\tau,\xi)\right)\lambda(t,x),$$

i.e. H-mjera je nošena u dvije točke dualnog prostora, sjevernom i južnom polu, kao što smo i htjeli.

S druge strane, eksplicitno rješenje zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \dfrac{\partial f_n}{\partial x} \\ u_n(0) = 0, \end{cases}$$

dano je formulom

$$u_n = \frac{\beta}{n((2\pi\beta^2)^2+\alpha^2)}\Big(2\pi\beta^2\cos\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) + \alpha\sin\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) \\ - e^{-(2\pi\beta n)^2 t}\Big(2\pi\beta^2\cos(2\pi\beta n x) + \alpha\sin(2\pi\beta n x)\Big)\Big).$$

Kako je $\partial_x u_n$ jednak (do na jako konvergentan član u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$)

$$\frac{2\pi\beta^2}{(2\pi\beta^2)^2+\alpha^2}\left(-2\pi\beta^2\sin\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) + \alpha\cos\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big)\right),$$

vidimo da je

$$\mu = \left(\left(\frac{(2\pi\beta^2)^2}{(2\pi\beta^2)^2+\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\alpha\beta^2}{(2\pi\beta^2)^2+\alpha^2}\right)^2\right)\mu_f,$$

odnosno relacija između dviju H-mjera je

$$\mu = \frac{(2\pi\beta^2)^2}{\alpha^2+(2\pi\beta^2)^2}\,\mu_f. \tag{28}$$

∎

Iz zadnjeg primjera vidljivo je najprije da se mjere $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\mu}_f$ razlikuju ukoliko su nošene u polovima. Također, zbog proizvoljnosti konstanti α i β, iz relacije (28) slijedi da ne postoji opća formula koja bi povezivala vrijednosti tih mjera u polovima za proizvoljnu desnu stranu.

U gornjim primjerima je dimenzija prostorne varijable d bila 1. Zanima nas kako izgledaju konkretne mjere $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\mu}_f$ u slučaju kad je $d > 1$, te možemo li između njih dobiti jaču relaciju od (26)? Točnije, želimo provjeriti da li je $\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} = (\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\,\boldsymbol{\xi}$, odnosno da li je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi})$ svojstvena vrijednost za $\boldsymbol{\mu}_f(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi})$, što je tvrdnja dobivena usmenim priopćenjem. Također bismo na primjerima htjeli potvrditi relacije (19) i (20).

Primjer 3. Definirajmo niz funkcija $\mathsf{f}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+2})$

$$f_n^1(t,x^1,x^2) = f_n^2(t,x^1,x^2) = \sin(2\pi n(t+x^1)).$$

Rješenje zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n = \mathsf{div}\,\mathsf{f}_n = (2\pi n)\cos(2\pi n(t+x^1)) \\ u_n(0) = 0, \end{cases}$$

dano je formulom

$$u_n(t,x^1,x^2) = \frac{1}{(2\pi n)^2+1}\Big(2\pi n\cos(2\pi n(t+x^1)) + \sin(2\pi n(t+x^1)) \\ - e^{-(2\pi n)^2 t}\Big(2\pi n\cos(2\pi n x^1) + \sin(2\pi n x^1)\Big)\Big).$$

H-mjera pridružena nizu (f_n) dana je izrazom

$$\boldsymbol{\mu}_f = \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix},$$

pri čemu je μ H-mjera pridružena nizu funkcija $\sin(2\pi n(t+x^1))$, odnosno,

$$\mu = \frac{1}{4}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)(\tau,\xi_1,\xi_2)\,\lambda(t,x^1,x^2).$$

S druge strane, H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu (∇u_n) (zbog $\partial_2 u_n = 0$) je oblika

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nadalje, mjera $\boldsymbol{\mu}_{12}$ pridružena produktu ∇u_n i f_n je oblika

$$\boldsymbol{\mu}_{12} = -\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -\xi_2\,\mu \\ 0 \end{pmatrix} = \mathsf{0} = \begin{pmatrix} \xi_2\,\mu \\ \xi_2\,\mu \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_{21}+\boldsymbol{\mu}_f)\boldsymbol{\xi},$$

što je u skladu s relacijama (19) i (20).

Također,

$$\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1\,\mu \\ \xi_1\,\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}})\boxtimes\lambda\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

što je različito od

$$(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\,\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1\,\mu \\ \xi_2\,\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}})\boxtimes\lambda\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Štoviše, $\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi} \neq \nu\boldsymbol{\xi}$ za svaku skalarnu Radonovu mjeru ν na $\mathbf{R}^{1+2}\times\mathrm{S}^2$. Zaista, u suprotnom bi vrijedilo da je

$$\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)\boxtimes\lambda = \xi_1\nu = \xi_2\nu. \tag{29}$$

Iz prve jednakosti u gornjem izrazu slijedi da je

$$\nu(\tau,\xi_1,\xi_2) = \delta_0(\xi_1)\tilde{\nu}(\tau,\xi_2) + \frac{1}{\xi_1}\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)(\tau,\xi_1,\xi_2)\,\lambda(t,x^1,x^2) \\ = \delta_0(\xi_1)\tilde{\nu}(\tau,\xi_2) + \frac{1}{4}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)(\tau,\xi_1,\xi_2)\,\lambda(t,x^1,x^2).$$

Međutim, tada je

$$\xi_2\nu = \xi_2\delta_0(\xi_1)\tilde{\nu}(\tau,\xi_2) \neq \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)(\tau,\xi_1,\xi_2)\,\lambda(t,x^1,x^2)$$

što je u suprotnosti s (29). ∎

Gornji primjer se može priopćiti i na proizvoljni $d \in \mathbf{N}$. Ukoliko definiramo niz funkcija f_n tako da je

$$f_n^1(t, x^1, \ldots, x^d) = f_n^2(t, x^1, \ldots, x^d) = \ldots = f_n^d(t, x^1, \ldots, x^d) = v(n\,t, n\,x^1),$$

pri čemu je $v(t, x) = \sin(2\pi(t+x))$ ili $v(t, \mathbf{x}) = \cos(2\pi(t+x))$ (očekujemo da bi tvrdnje vrijedile i za proizvoljnu funkciju $v \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$, proširenu po periodičnosti na $\mathbf{R}^2$, međutim u tom slučaju ne znamo eksplicitan izraz za rješenje u_n, pa ni za pripadnu H-mjeru pridruženu nizu funkcija ∇u_n). Pripadna H-mjera je

$$\boldsymbol{\mu}_f = \begin{pmatrix} \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \mu \end{pmatrix},$$

pri čemu je μ H-mjera pridružena nizu funkcija $v(nt, nx)$:

$$\mu = \frac{1}{4}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0,\ldots,0)}{|(1,1,0\ldots,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0\ldots,0)}{|(1,1,0\ldots,0)|}}\Big)\lambda(t, x^1, x^2, \ldots, x^d).$$

Nadalje, kako je $\partial_i u_n = 0, i > 2$, to slijedi da je

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{12} = \begin{pmatrix} -\mu & -\mu & \cdots & -\mu \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Stoga je

$$(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -\left(\sum_{i=2}^d \xi_i\right)\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=2}^d \xi_i\right)\mu \\ \left(\sum_{i=2}^d \xi_i\right)\mu \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=2}^d \xi_i\right)\mu \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_{21} + \boldsymbol{\mu}_f)\boldsymbol{\xi},$$

što još jednom potvrđuje relacije (19) i (20).

Drugo moguće priopćenje je slučaj kad je

$$f_n^1 = v(nt, nx), f_n^i = 0, i \geqslant 2,$$

pri čemu je v kao gore. U tom slučaju je $\boldsymbol{\mu}_f = \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}_{12}$, dok je $\boldsymbol{\mu}$ oblika kao u (30).

Primjer 4. Definirajmo niz funkcija $\mathsf{f}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+2})$

$$\begin{aligned} f_n^1(t, x^1, x^2) &= \sin(2\pi n(t + x^1)) \\ f_n^2(t, x^1, x^2) &= \sin(2\pi n(t + x^2)). \end{aligned}$$

Rješenje početne zadaće za jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n = \mathsf{div}\,\mathsf{f}_n = (2\pi n)\left(\cos(2\pi n(t + x^1)) + \cos(2\pi n(t + x^2))\right) \\ \qquad u_n(0) = 0, \end{cases}$$

u tom je slučaju dano formulom

$$\begin{aligned} u_n(t,x^1,x^2) = \frac{1}{(2\pi n)^2+1}\Big(&2\pi n\cos(2\pi n(t+x^1)) + \sin(2\pi n(t+x^1)) \\ &- e^{-(2\pi n)^2 t}\Big(2\pi n\cos(2\pi n x^1) + \sin(2\pi n x^1) + 2\pi n\cos(2\pi n x^2) + \sin(2\pi n x^2)\Big) \\ &+ 2\pi n\cos(2\pi n(x^2+t)) + \sin(2\pi n(x^2+t))\Big). \end{aligned}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} f_n^1(t,x^1,x^2) &= \frac{1}{2i}(e^{2\pi i n(t+x^1)} - e^{2\pi i n(t+x^1)}) \\ f_n^2(t,x^1,x^2) &= \frac{1}{2i}(e^{2\pi i n(t+x^2)} - e^{2\pi i n(t+x^2)}), \end{aligned}$$

to je

$$\boldsymbol{\mu}_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big) \boxtimes \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Big(\delta_{\frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|}} + \delta_{\frac{-(1,0,1)}{|(1,0,1)|}}\Big) \boxtimes \lambda \end{pmatrix}.$$

Lako se provjeri i da je $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_f = -\boldsymbol{\mu}_{21}$. Također je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_f \boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \Big(\delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} + \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}}\Big)\xi_1 \\ \Big(\delta_{\frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|}} + \delta_{\frac{-(1,0,1)}{|(1,0,1)|}}\Big)\xi_2 \end{pmatrix} \boxtimes \lambda \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \delta_{\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} - \delta_{\frac{-(1,1,0)}{|(1,1,0)|}} \\ \delta_{\frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|}} - \delta_{\frac{-(1,0,1)}{|(1,0,1)|}} \end{pmatrix} \boxtimes \lambda = (\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\,\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

odnosno u ovom slučaju je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$ svojstvena vrijednost za mjeru $\boldsymbol{\mu}_f$.

∎

I ovaj primjer se lako poopćuje na slučaj proizvoljnog $d \in \mathbf{N}$.

4. Ocjene na rješenje Schrödingerove jednadžbe

U cilju primjene H-mjera, trebamo precizne rezultate za postojanje i jedinstvenost rješenja Schrödingeove jednadžbe

$$\begin{cases} \partial_t u - i\,\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = f \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{31}$$

u odgovarajućem prostoru, kao i pripadne ocjene na rješenje.

Zadaću ćemo postaviti u apstraktnom obliku, s ciljem primjene varijacijskih metoda predstavljenih u [DL, Ch. XVIII, §7]. Pretpostavit ćemo da su V, H kompleksni Hilbertovi prostori, takvi da je

$$V \overset{g}{\hookrightarrow} H \overset{g}{\hookrightarrow} V',$$

odnosno, da prostori V, H, V' čine Geljfandovu trojku.

Nadalje, neka je za $T \in \mathbf{R}^+$ s $a(t;\cdot,\cdot)$, $t \in [0,T]$, označena familija neprekidnih, seskvilinearnih formi na $V \times V$ sa svojstvom da postoji $\alpha \in \mathbf{R}^+$, te $\lambda \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$\begin{cases} a(\cdot;u,v) \in \mathrm{C}^1([0,T]), \quad u,v \in V \\ a(t;u,v) = \overline{a(t;v,u)}, \quad t \in [0,T],\ u,v \in V \\ a(t;u,u) + \lambda\|u\|_H^2 \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \quad t \in [0,T],\ u \in V. \end{cases} \tag{32}$$

Primijetimo da na osnovu Banach-Steinhausovog teorema gornje pretpostavke povlače da postoji $M \in \mathbf{R}^+$ takav da je

$$|a(t;u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \quad t \in [0,T],\ u,v \in V.$$

Uz navedene pretpostavke, forma a definira familiju neprekidnih linearnih operatora $A(t) : V \to V'$ zadanih izrazom

$$_{V'}\langle\, A(t)u, v\,\rangle_V := a(t;u,v),$$

pri čemu je

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V,V')} \leqslant M. \tag{33}$$

Razmatrat ćemo varijacijsku zadaću

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle\, u(\cdot) \mid v\,\rangle_H + ia(\cdot;u(\cdot),v) = \langle\, f(\cdot) \mid v\,\rangle_H, \quad v \in V, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{34}$$

pri čemu je gornja jednakost zadana u smislu distribucija na $\langle 0,T\rangle$, dok su u_0, f *prikladne* funkcije. Njeno rješenje osigurano je sljedećim teoremom [DL].

Teorem 2. *Uz pretpostavku da je $u_0 \in V$, $f \in W(0,T;H,V')$, te da bilinearna forma a na $V \times V$ zadovoljava svojstva (32), postoji jedinstveno rješenje zadaće (34), $u \in W(0,T;V)$, Štoviše, vrijedi da je*

$$u \in \mathrm{C}([0,T];V) \quad \text{i} \quad u' \in \mathrm{C}([0,T];V').$$

∎

Napomenimo da zahtjev (34_2) ima smisla stoga što rješenje tražimo u $W(0,T;V) \hookrightarrow \mathrm{C}([0,T];H)$. Primijetimo, međutim, da je početni uvjet zadan u V.

Rješenje se konstruira Galjorkinovom metodom kao slabi $*$ limes u $\mathrm{L}^\infty([0,T];V)$ niza aproksimativnih rješenja u_m koja zadovoljavaju ocjene

$$\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant C\left(\|u_0\|_V^2 + \|f\|^2_{W(0,T;H,V')}\right), \quad t \in [0,T],$$
$$\|u_m(t)\|_H^2 \leqslant C\left(\|u_0\|_H^2 + \|f\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T];H)}\right), \quad t \in [0,T],$$

pri čemu je $\|f\|^2_{W(0,T;H,V')} = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T];H)} + \|f'\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T];V')}$. Na osnovu Banach-Alaouglu-Bourbakijeva teorema traženo rješenje u također zadovoljava gornje ocjene.

Nadalje, polazeći od vektorskog zapisa jednadžbe (34_1)

$$\partial_t u + iA(t)u = f \tag{35}$$

(u smislu jednakosti u $\mathrm{L}^2([0,T];V')$), korištenjem (33) slijedi da je

$$\begin{aligned} \|\partial_t u\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V')} &\leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V')} + M\|u\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V)} \\ &\leqslant C\left(\|u_0\|_V + \|f\|_{W(0,T;H,V')}\right). \end{aligned}$$

U slučaju $f = 0$, dualnim množenjem jednadžbe (35_1) s u, te integriranjem po vremenskoj varijabli od 0 do t dobijemo:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \langle \partial_t u(s), u(s)\rangle ds + i\int_0^t \langle A(s)u(s), u(s)\rangle ds = 0.$$

S obzirom da je drugi član u gornjoj jednakosti čisto imaginaran, slijedi da je

$$0=\int_0^t \mathsf{Re}\,\langle \partial_t u(s), u(s)\rangle ds = \frac{1}{2}\int_0^t (\langle \partial_t u(s), u(s)\rangle + \langle u(s), \partial_t u(s)\rangle)\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t \partial_t \|u(s)\|_H^2 ds,$$

odnosno vrijedi zakon sačuvanja norme

$$\|u(t)\|_H = \|u(0)\|_H, \quad t \in [0,T]. \tag{36}$$

S druge strane, dualnim množenjem jednadžbe (35_1) s $\partial_t u$, imamo da je

$$\langle\, \partial_t u(t) \mid \partial_t u(t)\,\rangle + i\langle A(t)u(t), \partial_t u(t)\rangle = \langle f(t), \partial_t u(t)\rangle \tag{37}$$

Kako je $\langle A(t)u(t), \partial_t u(t)\rangle = \langle u(t), A(t)\partial_t u(t)\rangle = \overline{\langle A(t)\partial_t u(t), u(t)\rangle}$, to za imaginarni dio izraza (37) vrijedi:

$$\begin{aligned} 2\mathsf{Im}\,\langle f(t), \partial_t u(t)\rangle &= \langle A(t)u(t), \partial_t u(t)\rangle + \langle A(t)\partial_t u(t), u(t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle - \langle A'(t)u(t), u(t)\rangle. \end{aligned}$$

Integriranjem gornjeg izraza dobijemo *energetsku jednakost* za Schrödingerovu jednadžbu

$$\langle A(t)u(t), u(t)\rangle = \langle A(0)u(0), u(0)\rangle + \int_0^t \langle A'(s)u(s), u(s)\rangle ds + 2\mathsf{Im}\int_0^t \langle f(s), \partial_t u(s)\rangle ds.$$

U daljnjem ćemo razmatrati slučaj $V = \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d), H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te

$$a(t;u,v) = {}_{\mathrm{H}^{-1}}\langle\, -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u), v\,\rangle_{\mathrm{H}^1} = \overline{\langle\, \mathbf{A}\nabla u \mid \nabla v\,\rangle_{\mathrm{L}^2}}, \tag{38}$$

gdje je $\mathbf{A}$ hermitska, koercitivna matrična funkcija glatka po t. Točnije, pretpostavljamo da je $\mathbf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$, te $\mathbf{A}(\cdot, \mathbf{x}) \in \mathrm{C}^1([0,T]; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, i $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geqslant \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2$ uniformno za neki $\alpha > 0$. Tada vrijedi da je

$$a(t;u,u) = \langle\, \mathbf{A}\nabla u \mid \nabla u\,\rangle_{\mathrm{L}^2} \geqslant \alpha\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \alpha(\|u\|_{\mathrm{H}^1}^2 - \|u\|_{\mathrm{L}^2}^2),$$

odnosno, forma a definirana s (38) ispunjava svojstva (32).

Time smo dokazali sljedeći korolar Teorema 2.

Korolar 4. *Uz gornje pretpostavke na matričnu funkciju* $\mathbf{A}$*, postoji jedinstveno rješenje* $u \in \mathrm{C}([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$ *početne zadaće*

$$\begin{cases} \partial_t u - i\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = f \in W(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d), \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)) \\ u(0) = u_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d), \end{cases} \tag{39}$$

takvo da je $u' \in \mathrm{C}([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))$*, te pritom vrijedi da su norme* $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))}$ *i* $\|u'\|_{\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))}$ *odozgo omeđene normama funkcija* u_0 *i* f*.*

Štoviše, u slučaju $f = 0$ *vrijedi zakon sačuvanja norme*

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} = \|u(0)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}, \quad t \in [0,T].$$

∎

U primjeni H-mjera na Schrödingerovu jednadžbu razmatrat ćemo niz zadaća

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad W(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)) \\ u_n(0) = u_n^0 \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d). \end{cases} \tag{40}$$

Napomenimo da je gornji zapis Schrödingerove jednadžbe ekvivalentan zapisu (31_1) iz kojeg se dobije množenjem imaginarnom jedinicom i. Zbog omeđenosti nizova (u_n^0) i (f_n), na osnovu Korolara 4. slijedi i omeđenost nizova (u_n) i (u_n') u odgovarajućim prostorima, te stoga oni konvergiraju slabo (do na podniz) k nekoj funkciji u, odnosno u'. Na način kojim je to napravljeno u 2. dijelu ovog poglavlja može se pokazati se da je $u = 0$, odnosno da

$$\begin{aligned} u_n &\overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)) \\ u_n' &\overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)). \end{aligned} \tag{41}$$

Predzadnja konvergencija pak povlači da $\nabla u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.

Jaku konvergenciju niza u_n u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ možemo dobiti bilo korištenjem Aubinove leme o kompaktnosti na način kojim je to napravljeno u 2. odjeljku, bilo direktnim razmatranjem. Naime, na osnovu konvergencije (41_1) i neprekidnosti funkcije u na $[0,T]$, slijedi da je $u_n(t)$ omeđen u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d) \overset{k}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, te stoga za svaki $t \in [0,T]$ niz funkcija $u_n(t)$ konvergira jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Korištenjem Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, te jedinstvenosti limesa dobijemo da $u_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$. U slučaju niza homogenih zadaća (40), zbog zakona sačuvanja norme, zadnja konvergencija prelazi u $u_n \to 0$ u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d))$.

5. Primjena H-mjera na Schrödingerovu jednadžbu

U ovom odjeljku ćemo na Schrödingerovu jednadžbu primijeniti proceduru sličnu onoj napravljenoj za jednažbu provođenja u 3. dijelu ovog poglavlja. Razmatrat ćemo niz početnih zadaća

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = 0 \\ u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d), \end{cases} \tag{42}$$

pri čemu je $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^1_0(\mathbf{R}^{1+d};\mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$ hermitska, uniformno pozitivno definitna matrična funkcija.

Napomenimo da je u kvantnoj fizici $\mathbf{A} = a\mathbf{I}$. Međutim, kao je cilj ovog rada ispitati primjenljivost H-mjera na jednadžbe općenitog (posebno paraboličkog) tipa, te napraviti usporedbu s poznatim rezultatima za valnu jednadžbu, to stoga uzimamo $\mathbf{A}$ iz nešto šire, gore navedene klase.

Na osnovu rezultata prijašnjeg odjeljka slijedi da niz rješenja (u_n) zadaća (42) konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, dok $\nabla u_n \longrightarrow 0$ slabo u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$. Stoga ima smisla proučavati H-mjeru pridruženu zadnjem nizu i pomoću nje izraziti limes $\langle\, \mathbf{A}\nabla u_n \mid \nabla u_n \,\rangle$, odnosno veličine koja određuje energiju pridruženu Schrödingerovoj jednadžbi. Kao i prije, cilj nam je izraziti $\boldsymbol{\mu}$ preko početnih uvjeta γ_n, odnosno H-mjere pridružene nizu $(\nabla\gamma_n)$.

Zapišimo Schrödingerovu jednadžbu u obliku ekvivalentnog sustava. Uvođenjem nove varijable $\mathsf{v}_n := \nabla u_n$ sustav glasi:

$$\begin{bmatrix} i & 0^\top \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^d \begin{bmatrix} \mathsf{div}\,\mathsf{a}^i & (\mathsf{a}^i)^\top \\ \mathsf{a}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \partial_{x^i} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0^\top \\ 0 & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \mathsf{v}_n \end{bmatrix} = 0,$$

gdje a^i označava i-ti stupac matrice $\mathbf{A}$. Na njega bismo htjeli primijeniti svojstva H-mjera predstavljena u odjeljku I.3. Međutim, gornji sustav nije hermitski, te stoga ne možemo koristiti prijenosno svojstvo, odnosno Teorem I.3. Međutim, lokalizacijsko svojstvo (Teorem I.2) nije ograničeno na simetrične (hermitske) sustave, te njegovom primjenom dobijemo da je

$$\mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}\,, \tag{43}$$

pri čemu je

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} i\tau & 0^\top \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{d} \xi_i \begin{bmatrix} \mathsf{div}\,\mathsf{a}^i & (\mathsf{a}^i)^\top \\ \mathsf{a}^i & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\tau + \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}) & (\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})^\top \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

a $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ H-mjera pridružena (pod)nizu (u_n, v_n). Zbog jake konvergencije niza (u_n) u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$, mjera $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ je oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} 0 & 0^\top \\ 0 & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix},$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena (pod)nizu $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$. Stoga (43) povlači da je

$$\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = 0. \tag{44}$$

Primijetimo da gornja relacija ne povlači automatski da je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ za $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Za protuprimjer možemo uzeti $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, te hermitsku, pozitivno semidefinitnu matričnu funkciju

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{sign}\,(\xi_2) \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_1 \\ -\xi_1 & \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \end{pmatrix}.$$

Međutim, na osnovu Schwarzovog teorema za parcijalne derivacije, odnosno Leme 4. znamo da je $\boldsymbol{\mu}$ oblika

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}^2} \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}, \qquad \boldsymbol{\xi} \neq 0\,.$$

Uvrštavajući zadnju jednakost u (44) dobijemo da je

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0\,, \tag{45}$$

iz čega zbog uniformne pozitivne definitnosti funkcije $\mathbf{A}$ slijedi da je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0$ za $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, odnosno mjera $\boldsymbol{\mu}$ je nošena samo u polovima ($\tau = \pm 1$) jedinične sfere u dualnom prostoru, što je rezultat sličan onom dobivenom za jednadžbu provođenja.

Kao što smo već spomenuli, prijenosno svojstvo za mjeru $\boldsymbol{\mu}$ ne možemo dobiti korištenjem Teorema I.3. Stoga moramo dokazati analogni teorem primjenljiv na zadaće (42).

Teorem 3. *H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena (pod)nizu (∇u_n), pri čemu je u_n rješenje zadaće (42) zadovoljava jednadžbu*

$$2\,\mathsf{div}\,(\mathsf{Re}\,\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{A}) + \Big((d+1)\boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \sum \partial_T^i \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_i \mathbf{A}\Big)\,\boldsymbol{\xi} = 0\,,$$

gdje je $\partial_T^i := \partial^i - \eta_i(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla^{\boldsymbol{\eta}})$ tangencijalni gradijent na jediničnu sferu, a $\boldsymbol{\eta} = (\tau, \boldsymbol{\xi})$ vektor na S^d.

Dem. Djelujući sa skalarnim pseudodiferencijalnim operatorom $P \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^{1+d})$ na jednadžbu (42_1), te dualno ju množeći s $\partial_m u_n, m \in \{1, \dots, d\}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, dobijemo da je

$$\langle iP\partial_t u_n, \partial_m u_n\rangle + \langle P\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n), \partial_m u_n\rangle = 0. \tag{46}$$

Parcijalnim deriviranjem s obzirom na vremensku i prostorne varijable, prvi član u gornjoj jednakosti postaje

$$-\langle i(\partial_m P)\partial_t u_n, u_n\rangle + \langle i(\partial_t P)\partial_m u_n, u_n\rangle - \langle P\partial_m u_n, i\partial_t u_n\rangle. \tag{47}$$

Primjenom iste procedure na drugi član u (46) on poprima oblik

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{A}^\top \nabla P \cdot \overline{\nabla u_n}, \partial_m u_n\rangle + \langle \partial_m(PA)\nabla u_n, \nabla u_n\rangle + \langle [P, \mathbf{A}]\nabla\partial_m u_n, \nabla u_n\rangle \\ - \langle \mathbf{A}(\nabla P)\partial_m u_n, \nabla u_n\rangle - \langle P\partial_m u_n, \mathsf{div}\,(\mathbf{A}^*\nabla u_n)\rangle, \end{aligned} \tag{48}$$

gdje $[A, B] := AB - BA$ označuje komutator pseudodiferencijalnih operatora A i B. Koristeći hermitičnost matrice $\mathbf{A}$, te da je u_n rješenje Schrödingerove jednadžbe, (46) postaje

$$\begin{aligned} -\langle (i\partial_m P)\partial_t u_n, u_n\rangle + \langle i(\partial_t P)\partial_m u_n, u_n\rangle - \langle \mathbf{A}^\top \nabla P \cdot \overline{\nabla u_n}, \partial_m u_n\rangle + \langle \partial_m(PA)\nabla u_n, \nabla u_n\rangle \\ + \langle [P, \mathbf{A}]\nabla\partial_m u_n, \nabla u_n\rangle - \langle \mathbf{A}(\nabla P)\partial_m u_n, \nabla u_n\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Napomenimo da neki od članova u (46–48) možda nisu definirani bez dodatnih pretpostavki na regularnost rješenja u_n. Međutim, kako su svi članovi u polaznom izrazu (Schrödingerova jednadžba), kao i u zadnjoj jednakosti dobro definirani za funkcije iz $\mathrm{C}([0, T]; \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, korištenjem gustoće glatkih funkcija u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)$, slijedi da (49) vrijedi za svako rješenje $u_n \in \mathrm{C}([0, T]; \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$.

Prelazeći na limes u (49), koristeći da $u_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$, dobijemo da je

$$-\langle \boldsymbol{\mu}^m, \mathbf{A}^\top \nabla p\rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, \partial_m(p\,\mathbf{A})\rangle + \sum_j \langle \boldsymbol{\mu}, \xi_m \partial^j p\, \partial_j \mathbf{A}\rangle - \langle (\boldsymbol{\mu}_m)^\top, \mathbf{A}\nabla p\rangle = \lim_n \overline{\langle i(\partial_m P)\partial_t u_n, u_n\rangle}\,, \tag{50}$$

gdje $\boldsymbol{\mu}^m$ ($\boldsymbol{\mu}_m$) predstavlja m-ti stupac (redak) matrične mjere $\boldsymbol{\mu}$, dok je $p = \sigma_0(P)$ glavni simbol operatora P. Pri tom koristimo drugu komutacijsku lemu po kojoj je $[P, \mathbf{A}]\,\partial_m \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\right)$ sa simbolom $\left(\sum \partial^j p\, \partial_j \mathbf{A}\right)\xi_m$.

Međutim, desna strana gornje jednakosti nam ostaje nepoznata. Kako bismo i nju izrazili preko mjere $\boldsymbol{\mu}$, ponovit ćemo gornji postupak, ali uzimajući sada dualni produkt jednadžbe (42_1) s u_n umjesto s $\partial_m u_n$. Primjenom parcijalne integracije s obzirom na prostorne varijable na član $\langle P\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n), u_n\rangle$, dobijemo jednakost

$$\langle iP\partial_t u_n, u_n\rangle - \langle \mathbf{A}^\top \nabla P \cdot \overline{\nabla u_n}, u_n\rangle - \langle P\mathbf{A}\nabla u_n, \nabla u_n\rangle = 0.$$

Prelaskom na limes slijedi da je

$$\lim_n \overline{\langle iP\partial_t u_n, u_n\rangle} = \langle \boldsymbol{\mu}, p\,\mathbf{A}\rangle. \tag{51}$$

Napomenimo da smo zadnju relaciju mogli dobiti i zapisujući jednadžbu u obliku ekvivalentnog sustava, te zatim slijedeći dokaz Teorema I.3, pri tom uzimajući u obzir da je matrica $\mathbf{A}^0$ uz ∂_t antihermitska. Međutim, gornji neposredni izvod je jednostavniji.

Uvrštavanjem (51) u (50) i koristeći da je $(\boldsymbol{\mu}_m)^\top = \overline{\boldsymbol{\mu}^m}$, dobije se izraz za mjeru $\boldsymbol{\mu}$

$$-2\langle \mathsf{Re}\,(\overline{\mathbf{A}}\,\boldsymbol{\mu}^m), \nabla p\rangle + \langle \boldsymbol{\mu}\cdot\partial_m \mathbf{A}, p\rangle + \sum_j \langle \xi_m\, \boldsymbol{\mu}\cdot\partial_j \mathbf{A}, \partial^j p\rangle = 0. \tag{52}$$

U sljedećem koraku ponovno provodimo parcijalnu integraciju s ciljem eliminacije test funkcije p. Kako p ima kompaktan nosač u varijablama $(t, \mathbf{x})$, prvi član je jednak

$$2\langle \mathsf{div}\,\mathsf{Re}\,(\overline{\mathbf{A}}\,\boldsymbol{\mu}^m), p\rangle.$$

Postupak s trećim članom je složeniji, jer se integracija s obzirom na dualne varijable $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ provodi na sferi S^d. Stoga moramo iskoristiti sljedeći identitet za parcijalno integriranje po mnogostrukostima ([GT], Lema 16.1):

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \nabla_{\boldsymbol{\eta}} p\rangle - \langle \boldsymbol{\nu}\cdot \mathsf{n}, \partial_{\mathsf{n}} p\rangle + \langle \mathsf{div}_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\nu} - \nabla_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\nu}\mathsf{n}\cdot\mathsf{n}, p\rangle = d\langle \boldsymbol{\nu}\cdot\mathsf{n}, p\rangle,$$

gdje n označava vektorsko polje vanjske normale na S^d, a $\boldsymbol{\nu}$ vektorsku Radonovu mjeru. Budući da je p homogeno proširen s S^d na $\mathbf{R}^{1+d}\setminus\{0\}$, te $\mathsf{n} = \boldsymbol{\eta}$, slijedi da je

$$\partial_{\mathsf{n}} p = \nabla_{\boldsymbol{\eta}} p\cdot\boldsymbol{\eta} = 0.$$

U našem slučaju je $\boldsymbol{\nu} = \xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{A}$ (u smislu da je $\boldsymbol{\nu}_j = \xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot\partial_j\mathbf{A}$), te treći član u (52) postaje

$$\begin{aligned} d\langle \xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla_{\mathbf{y}})\mathbf{A}, p\rangle - \langle \xi_m\sum \partial^i\boldsymbol{\mu}\cdot\partial_i\mathbf{A}, p\rangle - \langle \boldsymbol{\mu}\cdot\partial_m\mathbf{A}, p\rangle \\ + \langle \xi_m\sum \eta_i(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla^{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{\mu}\cdot\partial_i\mathbf{A}, p\rangle + \langle \xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\mathbf{A}, p\rangle. \end{aligned}$$

Izraz (52) sada poprima oblik

$$\langle 2\mathsf{div}\,\mathsf{Re}\,(\overline{\mathbf{A}}\boldsymbol{\mu}^m) + (d+1)\xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \xi_m\sum \partial_T^i\boldsymbol{\mu}\cdot\partial_i\mathbf{A}, p\rangle = 0,$$

gdje je ∂_T^i tangencijalni gradijent na jediničnu sferu. Koristeći da je p proizvoljna glatka funkcija s kompaktnim nosačem na $\mathbf{R}^{1+d}\times\mathrm{S}^d$, slijedi prijenosna jednadžba za $\boldsymbol{\mu}$:

$$2\,\mathsf{div}\,\mathsf{Re}\,(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^m) + (d+1)\xi_m\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \xi_m\sum \partial_T^i\boldsymbol{\mu}\cdot\partial_i\mathbf{A} = 0.$$

Q.E.D.

Usporedimo rezultate posljednjeg teorema s lokalizacijskim svojstvom (45). Kako je H-mjera nošena samo u polovima sfere u dualnom prostoru, član pomnožen s $\boldsymbol{\xi}$ u prijenosnoj jednadžbi za $\boldsymbol{\mu}$ iščezava za $\boldsymbol{\xi}\neq 0$, te na taj način dobijemo sljedeći rezultat.

Korolar 5. *H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena ∇u_n, gdje je (u_n) niz rješenja zadaće (42) zadovoljava jednadžbu*

$$\mathsf{div}\,(\mathsf{Re}\,\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{A}) = 0\,.$$

∎

Primjer 5. (**Konstantni koeficijenti**) Gornji rezultat ćemo ilustrirati na primjeru zadanom nizom početnih uvjeta:

$$\gamma_n = -\frac{1}{2\pi n}e^{2\pi i n\mathsf{b}\cdot\mathbf{x}},$$

gdje je b proizvoljni jedinični vektor u $\mathbf{R}^d$. Rješenje zadaće (42) za $n\in\mathbf{N}$ glasi

$$u_n = -\frac{1}{2\pi n}e^{-i\,(2\pi n)^2\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}\,t + 2\pi i n\mathsf{b}\cdot\mathbf{x}}.$$

Želimo izračunati H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ pridruženu

$$\nabla u_n = -i\mathsf{b}\, e^{-i\,(2\pi n)^2 \mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}\, t + 2\pi i n \mathsf{b}\cdot\mathbf{x}}.$$

U tu svrhu računamo

$$\widehat{\nabla u_n}(\tau,\boldsymbol{\xi}) = -i\frac{\mathsf{b}}{2}\,\delta_{-2\pi n^2 \mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}}(\tau)\delta_{n\mathsf{b}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Direktnim računom se dobije da je za $\varphi \boxtimes \psi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathrm{S}^d)$

$$\lim_n \Big\langle\, \psi \frac{(\tau,\boldsymbol{\xi})}{|(\tau,\boldsymbol{\xi})|} \widehat{\partial_i u_n}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \mid (\widehat{\overline{\varphi}\partial_j u_n})\,(\tau,\boldsymbol{\xi}) \,\Big\rangle = \frac{1}{2}\check{\varphi}(0,\mathsf{0})\psi(-1,\mathsf{0})b_i b_j,$$

i.e.

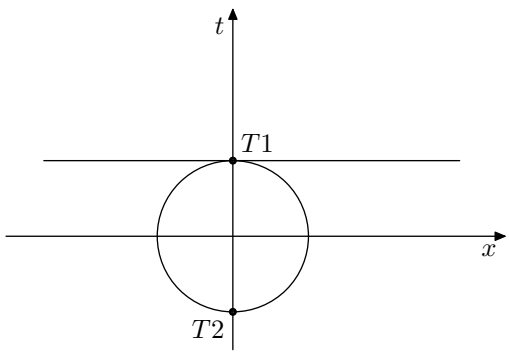
$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\delta_{(-1,\mathsf{0})}(\tau,\boldsymbol{\xi})\lambda(t,\mathbf{x})\mathsf{b}\otimes\mathsf{b}.$$

∎

Gornja mjera $\boldsymbol{\mu}$ je invarijantna u prostoru i vremenu, te nošena samo u južnom polu sfere u dualnom prostoru, što je u skladu s lokalizacijskim svojstvom (45) i Teoremom 3. (budući da je Lebesgueova mjera translatorno invarijantna, shodno tome s iščezavajućom divergencijom). Uočimo da za razliku od jednadžbe provođenja, Schrödingerova jednadžba omogućuje širenje početnih poremećaja, koji rezultiraju netrivijalnom mjerom $\boldsymbol{\mu}$. Razlog tome može biti skriven u činjenici da je prva jednadžba hipoeliptična, dok potonja nije.

Međutim, dobivena mjera je nošena (najviše) u dvije točke (polovima) dualnog prostora, zbog čega ne možemo govoriti o širenju mjere u dualnom prostoru. Također, u dobivenoj prijenosnoj jednadžbi nije uključen član koji sadrži vremensku derivaciju, te stoga nemamo opis promjene mjere u vremenu. Iz tog razloga ne možemo dobiti ni traženu vezu između mjere $\boldsymbol{\mu}$ i početnih uvjeta.

Slično kao i za valnu jednadžbu, i u ovom slučaju imamo da su karakteristike jednadžbe tangencijalne na jediničnu sferu u točkama u kojima je pripadna H-mjera nošena (Slika 6).



Slika 6. Karakteristike Schrödingerove jednadžbe i nosač pripadne H-mjere.

Međutim primijetimo da za razliku od mjera pridruženih nizu rješenja valne jednadžbe, odnosno jednadžbe provođenja, H-mjera iz gornjeg primjera nije antipodalno simetrična. Tu činjenicu povezujemo s imaginarnom jedinicom prisutnom u Schrödingerovoj jednadžbi, odnosno kompleksnosti rješenja u_n. Naime, općenito vrijedi da je mjera $\boldsymbol{\nu}$ pridružena nizu $\overline{\mathsf{v}}_n$ povezana izrazom $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \overline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x},-\boldsymbol{\xi})$ s H-mjerom $\boldsymbol{\mu}$ pridruženom

nizu v_n (Lema I.2), iz čega slijedi antipodalna simetričnost (realne) mjere određene nizom realnih funkcija.

Na kraju ovog odjeljka navedimo samo rezultate koji se dobiju primjenom H-mjera na niz nehomogenih zadaća (42) s desnom stranom određenom nizom funkcija $f_n \longrightharpoonup 0$ u $W(O,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))$. Primjenom lokalizacijskog svojstva dobije se isti rezultat kao i u slučaju homogene jednadžbe, odnosno izraz (44). Pri tom možemo primjetiti razliku u odnosu na nehomogenu jednadžbu provođenja u čijem slučaju smo dobili da je $(\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}+\boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi}=0$. Razlog tome proistječe iz jačih zahtjeva na regularnost desne strane za Schrödingerovu jednadžbu, zbog čega je mjera $\boldsymbol{\mu}$, osim u polovima, nužno jednaka nulmjeri, bez obzira na izbor niza (f_n).

Što se prijenosnog svojstva tiče, u slučaju nehomogene Schrödingerove jednadžbe izvod Teorema 3. se modificira zbog dodatnog člana $\langle Pf_n,\partial_m u_n\rangle$ na desnoj strani jednakosti (46), koji na limesu teži k $\langle \boldsymbol{\mu}_{21}^m,p\rangle$. Stoga prijenosna jednadžba u tom slučaju glasi

$$2\mathsf{div}\,(\mathsf{Re}\,\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{A})=\boldsymbol{\mu}_{21},$$

pri čemu su obje mjere iz gornjeg izraza nošene samo u polovima.

6. Primjena H-mjera na jednadžbu advekcije-difuzije

Na kraju poglavlja želimo primijeniti H-mjere na niz rješenja jednadžbe advekcije-difuzije

$$\partial_t u-\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u)+\mathsf{b}\cdot\nabla u=f.$$

Egzistencija i jedinstvenost rješenja za odgovarajuću zadaću dobije se analogno kao i za jednadžbu provođenja, odnosno korištenjem Teorema 1. Pri tom se u ovom slučaju teorem primijenjuje na formu

$$a(t;u,v)={}_{\mathrm{H}^{-1}}\langle -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u),v\rangle_{\mathrm{H}^1}+{}_{\mathrm{H}^{-1}}\langle \mathsf{b}\cdot\nabla u,v\rangle_{\mathrm{H}^1}=\langle \mathbf{A}\nabla u\mid\nabla v\rangle_{\mathrm{L}^2}+\langle \mathsf{b}\cdot\nabla u\mid v\rangle_{\mathrm{L}^2},$$

pri čemu je $\mathsf{div}\,\mathsf{b}=0$, $\mathbf{A}\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}^d;\mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{R}))$, $\mathsf{b}\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$, te $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\geqslant\alpha|\boldsymbol{\xi}|^2$ uniformno za neki $\alpha>0$. Na taj način se dokaže da vrijedi analogon Korolara 1.

Korolar 6. *Uz gornje pretpostavke na funkcije* $\mathbf{A}$, b *postoji jedinstveno rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases}\partial_t u-\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u)+\mathsf{b}\cdot\nabla u=f\in\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))\\ u(0)=u_0\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\end{cases}\tag{53}$$

$u\in W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, te pritom vrijedi da su norme $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))}$ i $\|u\|_{W(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)}$, odozgo omeđene normama funkcija u_0 i f. ∎

Stoga za niz zadaća

$$\begin{aligned}\partial_t u_n-\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n)+\mathsf{b}\cdot\nabla u_n=f_n\rightharpoonup 0\quad\text{u}\quad \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))\\ u_n(0)=u_n^0\rightharpoonup 0\quad\text{u}\quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\end{aligned}$$

zbog omeđenosti nizova (f_n), (u_n^0), imamo i da su (u_n) i $(\partial_t u_n)$ omeđeni u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, odnosno $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))$. Nadalje, primjenom Aubinove leme o kompaktnosti pokaže se da $u_n\to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$.

Kako za (∇u_n) imamo da

$$\nabla u_n\longrightharpoonup 0\quad\text{u}\quad \mathrm{L}^2([0,\mathrm{T}];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{\mathrm{d}})),$$

to ima smisla proučavati njemu pridruženu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$.

Zapisujući jednadžbu (53_1) kao ekvivalentan simetričan sustav, uz dodatne pretpostavke da je $\mathbf{A} \in \mathrm{C}_0^1(\mathbf{R}^{1+d}; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{R}))$, te $b \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{R}^d)$, možemo primijeniti Teorem I.3 (prijenosno svojstvo). U slučaju $f_n = 0$ (ili $f_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2([0,T]; \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d))$) ono daje da je $\mathsf{tr}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}) = 0$. Koristeći argumente iznesene u drugom odjeljku, kao i pozitivnu definitnost matrice $\mathbf{A}$ zaključujemo da je $\boldsymbol{\mu} = 0$. Ovaj rezultat povlači jaku konvergenciju niza (∇u_n) k 0 u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$, što je rezultat jednak onom dobivenom za jednadžbu provođenja.

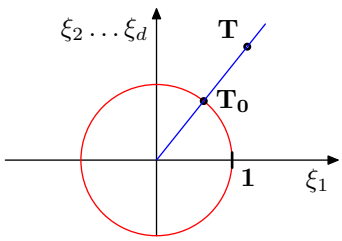
III. Paraboličke H-mjere i primjene

1. Uvod

U prethodnom poglavlju smo primijenili (originalne) H-mjere na niz jednadžbi paraboličkog tipa. Cilj nam je bio dobiti relaciju kojom bismo izrazili H-mjeru pridruženu nizu (gradijenata) rješenja preko početnih uvjeta, odnosno desne strane, analogno onom što je napravljeno za valnu (hiperboličku) jednadžbu. Međutim dobiveni rezultati nisu ispunili taj cilj u potpunosti. Naime, uspjeli smo dobiti vezu između nepoznate H-mjere i zadanih podataka koja vrijedi svugdje osim u polovima sfere u dualnom prostoru. Međutim, upravo informacije sadržane u te dvije točke imaju posebnu važnost, jer su s jedne strane za određene višeskalne zadaće H-mjere upravo nošene u polovima, dok je s druge strane razmatrana H-mjera u slučaju Schrödingerove jednadžbe isključivo nošena u polovima. Štoviše, pokazali smo da izraz koji bi opisao razmatrane H-mjere na cijeloj njihovoj domeni i ne postoji.

Izuzetak je jedino slučaj homogene jednadžbe provođenja, odnosno jednadžbe advekcije-difuzije, u kojem smo pokazali da je razmatrana H-mjera nula i da na nju ne utječu poremećaji prisutni u trenutku $t = 0$. Posljedica toga je da niz gradijenata rješenja konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ i u slučaju varijabilnih koeficijenata.

Razlog neadekvatnim rezultatima možemo tražiti u neodgovarajućem skaliranju dualne varijable u definiciji H-mjera ($\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$, Slika 7).



Slika 7. Hiperboličko skaliranje dualne varijable $\boldsymbol{\xi}$.

Stoga sam pristupio konstrukciji nove varijante (poopćenja) H-mjera koje bi u sebi sadržavalo drugačije skaliranje dualne varijable, bolje prilagođeno nehiperboličkim zadaćama. Ta konstrukcija je sadržaj prvog dijela ovog poglavlja, u kojem će također biti navedena osnovna svojstva novouvedenih varijanti. U drugom dijelu primijenit ćemo ih na zadaće razmatrane u drugom poglavlju, ne bismo li uspjeli ostvariti ciljeve koje s originalnim H-mjerama nismo. Također ćemo ispitati mogućnost primjene na jednadžbe višeg reda po t (jednadžba ploče). Na kraju poglavlja dat ćemo primjer njihove primjene u teoriji homogenizacije, pri čemu ćemo razmatrati model temeljen na Stokesovom sustavu.

2. Postojanje i osnovni primjeri

Želimo konstruirati varijantu H-mjera bolje prilagođenu primjenama na paraboličke zadaće. U tu svrhu ćemo promijeniti skaliranje dualne varijable iz definicije originalnih H-mjera ($\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$), kako bismo novim skaliranjem pokušali bolje opisati razliku koja postoji između varijabli (vremenske i prostornih) u zadaćama paraboličkog tipa. Sukladno tome, zamijenit ćemo i domenu H-mjera, te dualna varijabla više neće ležati na sferi.

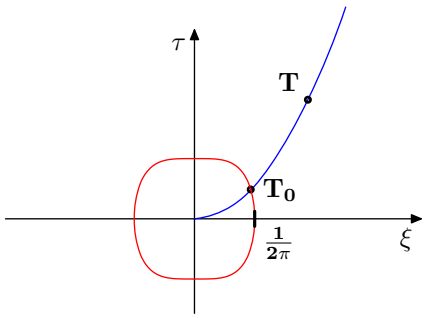
Označimo s P^d glatku razinsku hiperplohu u $\mathbf{R}^{1+d}$ zadanu s $(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4 = 1$, a s p *paraboličku projekciju* skupa $\mathbf{R}^{1+d}_* := \mathbf{R}^{1+d} \setminus \{0\}$ na P^d definiranu relacijom

$$p(\tau, \boldsymbol{\xi}) := \left(\frac{\tau}{\sqrt{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}} \right).$$

U daljnjem ćemo uvedenu projekciju točke $T = (\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T) \in \mathbf{R}_*^{1+d}$ označavati s

$$T_0 = (\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) := p(\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T) = \left(\frac{\tau_T}{\rho^2(\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T)}, \frac{\boldsymbol{\xi}_T}{\rho(\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T)} \right),$$

pri čemu je s ρ označeno preslikavanje definirano izrazom $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) := \sqrt[4]{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}$. Primijetimo da točke T i T_0 leže na paraboloidu $\tau = a\boldsymbol{\xi}^2$, $a = \frac{\tau_T}{\boldsymbol{\xi}_T^2}$ (odnosno na pravcu $\boldsymbol{\xi} = 0$ za $\boldsymbol{\xi}_T = 0$, te na ravnini $\tau = 0$ za $\tau_T = 0$), kao i da je uvedena projekcija konstantna na meridijanu tog paraboloida (odnosno na polupravcu) kroz točku T (Slika 8).



Slika 8. Paraboličko skaliranje dualne varijable $(\tau, \boldsymbol{\xi})$.

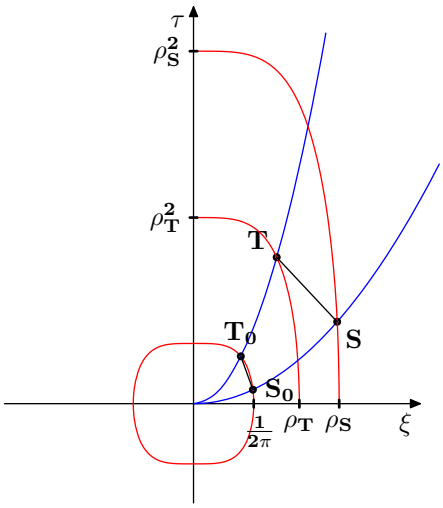
U daljnjem ćemo koristiti sljedeće svojstvo novouvedenog skaliranja.

Lema 1. *Neka su $T = (\tau, \boldsymbol{\xi})$ i $S = (\sigma, \boldsymbol{\eta})$ točke iz $\mathbf{R}_*^{1+d}$, sa svojstvom da su skalari $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}), \rho(\sigma, \boldsymbol{\eta})$ veći od 1. Tada one zadovoljavaju nejednakost*

$$|(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) - (\sigma_0, \boldsymbol{\eta}_0)| < C \frac{|(\tau, \boldsymbol{\xi}) - (\sigma, \boldsymbol{\eta})|}{\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \rho(\sigma, \boldsymbol{\eta})}, \tag{1}$$

pri čemu su s T_0 i S_0 označene njihove paraboličke projekcije na P^d, dok je C pozitivna konstanta (Slika 9). ∎

Dokaz leme je zbog svoje opsežnosti izdvojen i nalazi se u Dodatku.



Slika 9. Prikaz varijabli u nejednakosti (1).

Pri definiranju nove varijante H-mjera, razmatrat ćemo operatore određene funkcijama zadanim na P^d. Točnije, funkciji $a \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ pridružit ćemo operator $A \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})\right)$ definiran na sljedeći način:

$$(2) \qquad Au(t,\mathbf{x}) := \left(a\left(\frac{\tau}{\rho^2(\tau,\boldsymbol{\xi})}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\right)\hat{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})\right)^{\vee}(t,\mathbf{x}) = \left(a\left(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0\right)\hat{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})\right)^{\vee}(t,\mathbf{x}).$$

Kao neprekidna funkcija na kompaktnom skupu, a je i omeđena, te je stoga

$$\|Au\|_{\mathrm{L}^2} = \|\widehat{Au}\|_{\mathrm{L}^2} = \|a(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|a\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2},$$

odnosno, A je neprekidan operator na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ s normom (manjom ili) jednakom $\|a\|_{\mathrm{L}^\infty}$ i nazivamo ga *(Fourierovim) množiteljem*.

Za funkciju $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ definiramo linearan operator B na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ sljedećom relacijom

$$(3) \qquad Bu(t,\mathbf{x}) := b(t,\mathbf{x})u(t,\mathbf{x}),$$

koji nazivamo operatorom *množenja* (funkcijom b).

Komutator gore definiranih operatora je kompaktan, što proizlazi iz sljedeće leme.

Lema 2. (Prva komutacijska lema) *Neka su A i B operatori na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ definirani relacijom (2), odnosno (3). Tada je $K = AB - BA$ kompaktan operator na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$.*

Dem. Na osnovu Stone-Weierstrassova teorema, te kompaktnosti skupa P^d, funkciju $a = \sigma(A) \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ možemo uniformno aproksimirati nizom funkcija $a_n \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathrm{P}^d)$. Nadalje, funkciju b možemo uniformno aproksimirati u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ nizom funkcija $b_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d})$ sa svojstvom da njihova Fourierova pretvorba ima kompaktan nosač. Zaista, najprije izaberimo niz $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d})$ takav da $f_n \to b$ u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$. Svakoj od funkcija f_n možemo pridružiti niz funkcija $g_n^m \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$ takvih da $g_n^m \to \hat{f}_n$ u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{1+d})$. Stoga $(g_n^m)^\vee \to f_n \to b$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$. Korištenjem dijagonalnog postupka možemo izabrati niz $b_n = (g_n^{m(n)})^\vee$ takav da $b_n \to b$ u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$.

Operatori A_n, B_n pridruženi funcijama a_n, b_n konvergiraju u normi k operatorima A i B. Također, operatori $K_n := A_nB_n - B_nA_n$ konvergiraju u normi k operatoru K. Zaista, imamo da je

$$\begin{aligned}\|K_n - K\| &\leqslant \|A_nB_n - AB\| + \|B_nA_n - BA\| \\ &\leqslant \|A_nB_n - AB_n\| + \|AB_n - AB\| + \|B_nA_n - B_nA\| + \|B_nA - BA\| \\ &\leqslant 2\left(\|A_n - A\|\|B_n\| + \|A\|\|B_n - B\|\right) \to 0.\end{aligned}$$

Preostaje nam pokazati da su operatori K_n kompaktni, iz čega će slijediti da je K kao limes kompaktnih operatora također kompaktan.

Izračunajmo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(K_nu\right)(\tau,\boldsymbol{\xi}) &= a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\mathcal{F}(b_nu)(\tau,\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{F}(b_n(A_nu))(\tau,\boldsymbol{\xi}) \\ &= a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)(\hat{b}_n * \hat{u})(\tau,\boldsymbol{\xi}) - (\hat{b}_n * (\widehat{A_nu}))(\tau,\boldsymbol{\xi}) \\ &= \int k_n(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta})\hat{u}(\sigma,\boldsymbol{\eta})d\sigma d\boldsymbol{\eta},\end{aligned}$$

gdje je $k_n(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta}) = \hat{b}_n(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\left(a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - a_n(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)\right)$. Kako su funcije a_n Lipschitzove, to je na osnovu nejednakosti (1)

$$|a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - a_n(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)| < C_n^1|(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - (\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)| < C_n^2\frac{|(\tau,\boldsymbol{\xi}) - (\sigma,\boldsymbol{\eta})|}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi}) + \rho(\sigma,\boldsymbol{\eta})},$$

za sve točke $(\tau,\boldsymbol{\xi})$ i $(\sigma,\boldsymbol{\eta})$ sa svojstvom da su skalari $\rho(\tau,\boldsymbol{\xi}), \rho(\sigma,\boldsymbol{\eta})$ veći od 1, pri čemu su C_n^1, C_n^2 pozitivne konstante. Stoga za parove točaka $(\tau,\boldsymbol{\xi}), (\sigma,\boldsymbol{\eta})$ sa svojstvom da je $(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) \in \operatorname{supp} b_n$, te $\max\{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi}), \rho(\sigma,\boldsymbol{\eta})\} > m$, vrijedi nejednakost

$$|a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - a_n(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)| < \frac{C_n}{m}. \tag{4}$$

Zbog toga možemo pisati

$$k_n(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta}) = \hat{b}_n(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})X_n^m(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta}) + \hat{b}_n(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})Y_n^m(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta}),$$

pri čemu je za $m \in \mathbf{N}$, funkcija $X_n^m = \left(a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - a_n(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)\right)\chi_{S_n^m}$, gdje je s S_n^m označen skup $\{(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{R}^{2(1+d)} : (\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) \in \operatorname{supp}\hat{b}_n,\ \max\{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi}), \rho(\sigma,\boldsymbol{\eta})\} \leqslant m\}$. Skupovi S_n^m su kompaktni zbog kompaktnosti skupa $\{(\tau,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^{1+d} : \rho(\tau,\boldsymbol{\xi}) \leqslant m\}$. Nadalje, s Y_n^m je označena funkcija na $\mathbf{R}^{2(1+d)}$ zadana relacijom $Y_n^m = \left(a_n(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0) - a_n(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)\right)\chi_{(S_n^m)^c}$.

Budući da je $\hat{b}_n(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})X_n^m(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta})$ omeđena funkcija s kompaktnim nosačem, to je ona iz prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{2(1+d)})$, odnosno ona je jezgra Hilbert-Schmidtovog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{(1+d)})$, koji je kompaktan (vidi [Ba]).

S druge strane, na osnovu Youngove nejednakosti i nejednakosti (4) imamo da je

$$\begin{aligned}\left\|\int \hat{b}_n(\tau-\sigma,\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})Y_n^m(\tau,\boldsymbol{\xi},\sigma,\boldsymbol{\eta})\hat{u}(\sigma,\boldsymbol{\eta})d\sigma d\boldsymbol{\eta}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} &\leqslant \left(\frac{C_n}{m}\right)^2 \|(|\hat{b}_n| * |\hat{u}|)(\tau,\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} \\ &\leqslant \left(\frac{C_n}{m}\right)^2 \|\hat{b}_n\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{1+d})}\|\hat{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} \\ &\leqslant \left(\frac{\tilde{C}_n}{m}\right)^2 \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})},\end{aligned}$$

odnosno operator K_n je limes (u normi) niza kompaktnih operatora, te je stoga i sam kompaktan.

Q.E.D.

Korištenjem rezultata prve komutacijske leme u stanju smo dokazati postojanje nove varijante.

Teorem 1. (Postojanje paraboličkih H-mjera) *Neka niz funkcija* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup 0$ *u prostoru* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{C}^r)$. *Tada postoji njegov podniz (kojeg u daljnjem označujemo jednako), te* $r\times r$ *hermitska matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}$ *na* $\mathbf{R}^{1+d}\times \mathrm{P}^d$ *takva da za svaki izbor funkcija* $\phi_1,\phi_2\in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d}), \psi\in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ *vrijedi*

$$\lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \mathcal{F}\Big(\phi_1\mathsf{u}_n\Big)(\tau,\boldsymbol{\xi})\otimes \overline{\mathcal{F}\Big(\phi_2\mathsf{u}_n\Big)}(\tau,\boldsymbol{\xi})\,\psi\Big(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0\Big)d\tau d\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\mu}, \phi_1\overline{\phi}_2\boxtimes\psi\rangle\ . \tag{5}$$

Dem. Označimo li s A operator pridružen simbolu $\overline{\psi}$ formulom (2), na osnovu Plancherelove formule limes iz iskaza teorema je jednak

$$\lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} (\phi_1\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi})\otimes \overline{(A\phi_2\mathsf{u}_n)}(\tau,\boldsymbol{\xi})d\tau d\boldsymbol{\xi}.$$

Kako zbog prve komutacijske leme vrijedi da je $(A\phi_2-\phi_2A)\mathsf{u}_n = K\mathsf{u}_n$, gdje je K kompaktan operator na L^2, to traženi limes možemo zapisati kao

$$\lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} (\phi_1\overline{\phi_2}\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi})\otimes \overline{(A\mathsf{u}_n)}(\tau,\boldsymbol{\xi})d\tau d\boldsymbol{\xi}. \tag{6}$$

Gornji niz operatora je omeđen s $C\|\phi_1\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\phi_2\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}$, gdje je $C=\sup_n \|\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{C}^r)}$.

Kako su prostori $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ i $\mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ separabilni, to možemo sa S, odnosno T, označiti njihove prebrojive guste podskupove. Primijenimo dijagonalni postupak za konstrukciju podniza u_{n_r} takvog da niz u (6) konvergira za svaki izbor funkcija $(\phi_1,\phi_2,\psi)\in S\times S\times T$. U tu svrhu indeksirajmo s m sve uređene trojke funkcija iz $S\times S\times T$. Zbog omeđenosti niza iz (6) u $\mathcal{L}(\mathbf{C}^r)$, to za $m=1$ postoji podniz $\mathsf{u}_{n_1(n)}$ takav da konvergira niz operatora

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} (\phi_1^1\overline{\phi_2^1}\mathsf{u}_{n_1(n)})(\tau,\boldsymbol{\xi})\otimes \overline{\big(A^1\mathsf{u}_{n_1(n)}\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi})d\tau d\boldsymbol{\xi}.$$

Za taj podniz, postoji njegov podniz, $\mathsf{u}_{n_2(n)}$ za kojeg konvergira niz analogan gornjem nizu uz zamjenu $m=2$. Nastavljajući postupak, na taj način konstruiramo podniz $\mathsf{u}_{n_1(1)},\mathsf{u}_{n_2(2)},\ldots$. Za taj podniz, niz

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} (\phi_1^m\overline{\phi_2^m}\mathsf{u}_{n_r(r)})(\tau,\boldsymbol{\xi})\otimes \overline{\big(A^m\mathsf{u}_{n_r(r)}\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi})d\tau d\boldsymbol{\xi}$$

konvergira za svaki m, odnosno za svaki izbor funkcija (ϕ_1,ϕ_2,ψ) iz gustog skupa $S\times S\times T$. Konstruirani podniz u daljnjem dijelu dokaza označavat ćemo jednako kao i sam niz.

U sljedećem koraku dokažimo da niz u (6) konvergira i za proizvoljnu trojku funkcija $(\phi_1,\phi_2,\psi)\in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})\times \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})\times \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$. Zaista, neka je $(\phi_1^k,\phi_2^k,\psi^k)\in S\times S\times T$ niz

koji konvergira k (ϕ_1, ϕ_2, ψ). Tada je

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \Big((\phi_1\overline{\phi_2}\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{(A\mathsf{u}_n)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) - (\phi_1\overline{\phi_2}\mathsf{u}_m)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{(A\mathsf{u}_m)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \Big)\, d\tau d\boldsymbol{\xi}$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \Big(((\phi_1\overline{\phi_2} - \phi_1^k\overline{\phi_2^k})\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{(A\mathsf{u}_n)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) + (\phi_1^k\overline{\phi_2^k}\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{\big((A-A^k)\mathsf{u}_n\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \Big) d\tau d\boldsymbol{\xi}$$

$$- \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \Big(((\phi_1\overline{\phi_2} - \phi_1^k\overline{\phi_2^k})\mathsf{u}_m)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{(A\mathsf{u}_m)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) + (\phi_1^k\overline{\phi_2^k}\mathsf{u}_m)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{\big((A-A^k)\mathsf{u}_m\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \Big) d\tau d\boldsymbol{\xi}$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \Big((\phi_1^k\overline{\phi_2^k}\mathsf{u}_n)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{\big(A^k\mathsf{u}_n\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) - (\phi_1^k\overline{\phi_2^k}\mathsf{u}_m)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \otimes \overline{\big(A^k\mathsf{u}_m\big)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \Big)\, d\tau d\boldsymbol{\xi}.$$

Prva dva integrala na desnoj strani su omeđena s $C\Big(\|\phi_1\overline{\phi_2} - \phi_1^k\overline{\phi_2^k}\| \|\psi\| + \|\phi_1^k\overline{\phi_2^k}\| \|\psi - \psi^k\| \Big)$, $C = \sup_n \|\mathsf{u}_n\|_{\mathrm{L}^2}^2$ te su stoga, za k dovoljno velik, po volji mali. Preostali integral predstavlja razliku $m-$tog i $n-$tog člana konvergentnog niza iz čega zaključujemo da je niz u (6) Cauchyev, odnosno, konvergentan.

Na taj način smo definirali preslikavanje s $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d}) \times \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d}) \times \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ u $\mathcal{L}(\mathbf{C}^r)$. To preslikavanje je linearno po svakoj od funkcija ϕ_1, ϕ_2, ψ. Također, ono je i neprekidno, jer je

$$\|\phi_1\overline{\phi}_2\mathsf{u}_n \otimes \overline{(A\mathsf{u}_n)}\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|\phi_1\overline{\phi}_2\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\mathsf{u}_n\|_{\mathrm{L}^2} \|(A\mathsf{u}_n)\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant C\|\phi_1\overline{\phi}_2\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty} \ .$$

Kako to preslikavanje ovisi samo o produktu $\phi_1\overline{\phi}_2$, te funkciji ψ, relacijom (6) je za svaki $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ zadana bilinearna forma $\mu_{ij} := \boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j$ na $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d}) \times \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$:

$$\begin{aligned} \langle \mu_{ij}, \phi_1\overline{\phi}_2 \boxtimes \psi \rangle :&= \lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} (\phi_1\overline{\phi}_2 u_{in})(\tau,\boldsymbol{\xi}) \overline{(Au_{jn})}(\tau,\boldsymbol{\xi}) d\tau d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \mathcal{F}\Big(\phi_1 u_{in}\Big)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \overline{\mathcal{F}\Big(\phi_2 u_{jn}\Big)}(\tau,\boldsymbol{\xi})\, \psi\Big(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0\Big) d\tau d\boldsymbol{\xi} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

gdje je $u_{in} := \mathsf{u}_n \cdot \mathsf{e}_i$. Zamjenom indeksa i i j u zadnjoj jednakosti, te uzimanjem realnih funkcija ϕ_1, ϕ_2, ψ slijedi da je $\mu_{ij} = \overline{\mu}_{ji}$ za svaki $i, j = 1, \ldots, r$, odnosno matrična mjera $\boldsymbol{\mu}$ je hermitska.

Nadalje, za $\phi, \psi \geqslant 0$ uzmimo $\phi_1 = \phi_2 = \sqrt{\phi}$. Tada za svaki $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{C}^r$ vrijedi da je

$$\Big\langle \sum_{i,j} \lambda_i\overline{\lambda}_j\mu_{ij}, \phi_1\overline{\phi}_2 \boxtimes \psi \Big\rangle = \lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^{1+d}} \left| \sum_i \lambda_i \mathcal{F}\Big(\sqrt{\phi} u_{in}\Big) \right|^2 (\tau,\boldsymbol{\xi})\, \psi(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) d\tau d\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \ ,$$

odnosno bilinearna forma $B = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ je pozitivno poludefinitna. Stoga na nju možemo primijeniti Lemu 4. (vidi dolje) koja kaže da je forma B određena Radonovom mjerom $m_{\boldsymbol{\lambda}}$. Varirajući vektor $\boldsymbol{\lambda}$ u relaciji $m_{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ i koristeći hermitičnost mjere $\boldsymbol{\mu}$ možemo dobiti sve komponente μ_{ij}.

Q.E.D.

Mjeru $\boldsymbol{\mu}$ iz gornjeg teorema nazivamo *paraboličkom H-mjerom* pridruženom (pod)nizu (u_n).

Direktna posljedica prethodnog teorema je svojstvo pozitivnosti paraboličkih H-mjera.

Korolar 1. *Parabolička H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ je pozitivno semidefinitna, odnosno za svaku vektorsku funkciju $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_r) \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^r)$ mjera $\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}$ je (pozitivna) Radonova mjera na $\mathbf{R}^{1+d} \times \mathrm{P}^d$.*

Dem. Zamjenjujući funkcije ϕ_1, ϕ_2 u (7) funkcijama ϕ_i, ϕ_j, uzimanjem realne nenegativne funkcije ψ, te zbrajanjem po indeksima i, j dobijemo tvrdnju.

Q.E.D.

Također sljedeće svojstvo lokalizacije proizlazi direktno iz definicije.

Korolar 2. *Neka je $\boldsymbol{\mu}$ parabolička H-mjera određena (pod)nizom $(\mathsf{u}_{n'})$. Ukoliko sve komponente $\mathsf{u}_{n'} \cdot \mathsf{e}_i$ imaju redom nosače u zatvorenim skupovima $K_i \subseteq \mathbf{R}^{1+d}$, tada nosač komponente $\boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j$ je sadržan u $(K_i \cap K_j) \times \mathrm{P}^d$.* ∎

Kao i za originalne H-mjere, vrijedi sljedeća relacija između klasične defektne mjere i nove varijante.

Korolar 3. *Ako za niz funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ vrijedi da $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n$ konvergira slabo $*$ (vague) k mjeri $\boldsymbol{\nu}$, tada je za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \boxtimes 1 \rangle \ ,$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ parabolička H-mjera pridružena (pod)nizu (u_n).

Dem. Korolar slijedi iz (5) uzimanjem $\psi = 1$, te korištenjem Plancherelove formule.

Q.E.D.

Također, jednako kao u prvom poglavlju dokazuje se i sljedeća lema.

Lema 3. *Neka je (u_n) čist niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^r)$, te $\boldsymbol{\mu}$ pripadna parabolička H-mjera. Tada je i niz $(\overline{\mathsf{u}}_n)$ čist s pripadnom paraboličkom H-mjerom $\boldsymbol{\nu}$, te pri tom vrijedi da je $\boldsymbol{\nu}(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\mu}^\top(t, \mathbf{x}, -\tau, -\boldsymbol{\xi})$.*

Posebno, parabolička H-mjera μ pridružena skalarnom realnom nizu je antipodalno simetrična, odnosno vrijedi da je $\mu(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \mu(t, \mathbf{x}, -\tau, -\boldsymbol{\xi})$. ∎

U dokazu teorema postojanja koristili smo sljedeću lemu o gustoći funkcija oblika tenzorskog produkta u $\mathrm{C}_0(X \times Y)$ (za dokaz vidi [T3]). Tvrdnja leme je poznati rezultat u slučaju kad su X i Y kompaktni skupovi (vidi [La]), a njome je on poopćen na lokalno kompaktne skupove.

Lema 4. *Neka su X i Y dvije lokalno kompaktne (konačno dimenzionalne) mnogostrukosti klase C^0, te B neprekidna bilinearna forma na $\mathrm{C}_0(X) \times \mathrm{C}_0(Y)$. Ako za proizvoljne nenegativne funkcije f i g vrijedi da je $B(f, g) \geqslant 0$, tada postoji (pozitivna) Radonova mjera m na $X \times Y$ takva da je $B(f, g) = \langle m, f \boxtimes g \rangle$ za svaki $f \in \mathrm{C}_0(X)$ i $g \in \mathrm{C}_0(Y)$. Drugim riječima Radonova mjera na $X \times Y$ je određena svojim djelovanjem na funkcijama oblika $f \boxtimes g$, $f \in \mathrm{C}_0(X), g \in \mathrm{C}_0(Y)$* ∎

Ukoliko su A i B operatori redom pridruženi funkcijama $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ i $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ pomoću relacija (2), odnosno (3), limes iz Teorema 1. možemo iskazati na sljedeći način:

$$\lim_n \langle\, ABu_n \mid u_n \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} = \lim_n \langle\, (\psi \circ p)\, \hat{u}_n \mid \widehat{(\overline{\phi} u_n)}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} = \langle \boldsymbol{\mu}, \phi \boxtimes \psi \rangle \ ,$$

gdje je p parabolička projekcija definirana na početku odjeljka, odnosno $\psi \circ p$ je *paraboličkí homogeno* proširenje funkcije ψ na $\mathbf{R}^{1+d} \setminus \{0\}$.

Kao i u slučaju originalnih H-mjera, zanimaju nas primjeri nove inačice pridruženi titrajućim, odnosno koncentracijskim nizovima.

Primjer 1. (Titranje) Neka je $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$ periodična funkcija s jediničnim periodom (radi jednostavnosti) u svakoj od varijabli. Stoga je možemo zapisati u obliku

$$v(t,\mathbf{x}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\, e^{2\pi i(\omega t+\mathsf{k}\cdot\mathbf{x})} \ ,$$

gdje su s $\hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}$ označeni Fourierovi koeficijenti funkcije v, te pri tom pretpostavljamo da je njena srednja vrijednost $\hat{v}_{0,0} = 0$.

Za brojeve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, definiramo niz perodičnih funkcija čiji periodi teže k nuli:

$$u_n(t,\mathbf{x}) := v(n^\alpha t, n^\beta \mathbf{x}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\, e^{2\pi i(n^\alpha\omega t+n^\beta\mathsf{k}\cdot\mathbf{x})} \ .$$

Njihove Fourierove pretvorbe glase:

$$\hat{u}_n(\tau,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\, \delta_{n^\alpha\omega}(\tau)\delta_{n^\beta\mathsf{k}}(\boldsymbol{\xi}) \ .$$

Neka su za proizvoljne funkcije $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ i $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ redom definirani operatori A i B relacijama (2), odnosno (3). Tada je:

(8)

$$\begin{aligned}
\langle\, ABu_n \mid u_n \,\rangle &= \langle\, \hat{u}_n \mid \overline{(\psi\circ p)}(\hat{\overline{\phi}} * \hat{u}_n)\,\rangle \\
&= \sum_{(\omega,\mathsf{k}),(\upsilon,\mathsf{l})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \langle \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\, \delta_{n^\alpha\omega}(\tau)\delta_{n^\beta\mathsf{k}}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\psi}\,(p(\tau,\boldsymbol{\xi}))\, \hat{v}_{\upsilon,\mathsf{l}}\, \hat{\overline{\phi}}(\tau - n^\alpha\upsilon, \boldsymbol{\xi} - n^\beta\mathsf{l})\rangle \\
&= \sum_{(\omega,\mathsf{k}),(\upsilon,\mathsf{l})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\, \overline{\hat{v}}_{\upsilon,\mathsf{l}}\, \overline{\psi}\left(p\left(n^\alpha\omega, n^\beta\mathsf{k}\right)\right) \check{\phi}(n^\alpha(\omega-\upsilon), n^\beta(\mathsf{k}-\mathsf{l})) \ ,
\end{aligned}$$

gdje je $\psi\left(p\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)\right) = \psi\left(\frac{\tau}{\rho^2(\tau,\boldsymbol{\xi})}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\right)$. Želimo izračunati limes gornjeg izraza (ukoliko postoji), i na osnovu njega odrediti traženu paraboličku H-mjeru.

Za $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ je $\check{\phi} \in \mathcal{S}\left(\mathbf{R}^{1+d}\right)$, pa prilikom prelaska na limes u (8) suma se reducira na članove za koje je $(\omega,\mathsf{k}) = (\upsilon,\mathsf{l})$. S druge strane je

$$\begin{aligned}
\lim_n \psi\left(p(n^\alpha\omega, n^\beta\mathsf{k})\right) &= \lim_n \psi\left(\frac{n^\alpha\omega}{\sqrt{(2\pi n^\alpha\omega)^2 + (2\pi n^\beta|\mathsf{k}|)^4}}, \frac{n^\beta\mathsf{k}}{\sqrt[4]{(2\pi n^\alpha\omega)^2 + (2\pi n^\beta|\mathsf{k}|)^4}}\right) \\
&= \lim_n \psi\left(\frac{\omega}{\sqrt{(2\pi\omega)^2 + (2\pi|\mathsf{k}|)^4 n^{2(2\beta-\alpha)}}}, \frac{\mathsf{k}}{\sqrt[4]{(2\pi\omega)^2 n^{2(\alpha-2\beta)} + (2\pi|\mathsf{k}|)^4}}\right) \\
&= \begin{cases} \psi(\frac{\omega}{|\omega|}, 0), & \alpha > 2\beta \\ \psi(0, \frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}), & \alpha < 2\beta \\ \psi\left(\frac{\omega}{\rho^2(\omega,\mathsf{k})}, \frac{\mathsf{k}}{\rho(\omega,\mathsf{k})}\right), & \alpha = 2\beta. \end{cases}
\end{aligned}$$

Stoga je niz (u_n) čist, s pripadnom paraboličkom H-mjerom

$$\mu(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} |\hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}|^2 \lambda(t,\mathbf{x}) \begin{cases} \delta_{(\frac{\omega}{|\omega|},0)}(\tau,\boldsymbol{\xi}), & \alpha > 2\beta \\ \delta_{(0,\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|})}(\tau,\boldsymbol{\xi}), & \alpha < 2\beta \\ \delta_{\left(\frac{\omega}{\rho^2(\omega,\mathsf{k})}, \frac{\mathsf{k}}{\rho(\omega,\mathsf{k})}\right)}(\tau,\boldsymbol{\xi}), & \alpha = 2\beta. \end{cases}$$

∎

Kako bismo odredili paraboličku H-mjeru pridruženu koncentracijskom nizu, trebat će nam sljedeći rezultat.

Lema 5. *Neka su u_n, v_n omeđeni nizovi u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ takvi da $(u_n - v_n) \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Tada za $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ vrijedi da je*

$$\lim_n \int |u_n|^2 \psi = \lim_n \int |v_n|^2 \psi.$$

Dem.

$$\begin{aligned}
\lim_n \left| \int \left(|u_n|^2 - |v_n|^2\right) \psi \right| &= \lim_n \int \Big| |u_n| - |v_n| \Big| \left(|u_n| + |v_n|\right) |\psi| \\
&\leqslant \left(\int \Big| |u_n| - |v_n| \Big| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(|u_n| + |v_n|\right)^2 |\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|u_n - v_n\|_{\mathrm{L}^2} \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty} \left(\|u_n\|_{\mathrm{L}^2} + \|v_n\|_{\mathrm{L}^2}\right) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Primjer 2. (Koncentracija) Za zadanu funkciju $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ i brojeve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ definiramo niz funkcija

$$u_n(t, \mathbf{x}) := n^{\alpha+\beta d} v(n^{2\alpha} t, n^{2\beta} \mathbf{x}).$$

Lako se provjeri da je niz (u_n) omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ s konstantnom normom $\|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} = \|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}$, te da konvergira slabo k nuli.

Kako bismo našli paraboličku H-mjeru pridruženu gornjem nizu najprije pokažimo da za proizvoljnu test funkciju $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$, niz funkcija $(\phi - \phi(0,0))u_n$ konvergira jako prema 0 u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$. Zaista, imamo da je

$$\begin{aligned}
\lim_n \|(\phi - \phi(0,0))u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\phi(t,\mathbf{x}) - \phi(0,0)|^2 |u_n(t,\mathbf{x})|^2 dt d\mathbf{x} \\
&= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\phi(t,\mathbf{x}) - \phi(0,0)|^2 n^{2(\alpha+\beta d)} |v(n^{2\alpha} t, n^{2\beta}\mathbf{x})|^2 dt d\mathbf{x} \\
&= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\phi(\frac{s}{n^{2\alpha}}, \frac{\mathbf{y}}{n^{2\beta}}) - \phi(0,0)|^2 |v(s,\mathbf{y})|^2 ds d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Kako je podintegralna funkcija u zadnjem integralu omeđena s $4\|\phi\|^2_{\mathrm{L}^\infty} |v|^2 \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{1+d})$, to po Teoremu o dominiranoj konvergenciji gornji limes iščezava za $\alpha, \beta > 0$.

Stoga korištenjem Leme 5. za test funkcije $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ i $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^{1+d})$ slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |(\widehat{\phi u_n})(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) d\tau d\boldsymbol{\xi} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\phi(0,0)|^2 |(\widehat{u}_n)(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) d\tau d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_n |\phi(0,0)|^2 \int_{\mathbf{R}^{1+d}} \frac{1}{n^{2(\alpha+\beta d)}} |\hat{v}(\frac{\tau}{n^{2\alpha}}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{n^{2\beta}})| \psi(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) d\tau d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_n |\phi(0,0)|^2 \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma, \boldsymbol{\eta})| \psi\left(p(n^{2\alpha}\sigma, n^{2\beta}\boldsymbol{\eta})\right) d\tau \sigma d\boldsymbol{\eta}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_n \psi\left(p(n^{2\alpha}\sigma, n^{2\beta}\boldsymbol{\eta})\right) = \begin{cases} \psi(\frac{\sigma}{|\sigma|}, 0), & \alpha > 2\beta \\ \psi(0, \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}), & \alpha < 2\beta \\ \psi\left(\frac{\sigma}{\rho^2(\sigma,\boldsymbol{\eta})}, \frac{\boldsymbol{\eta}}{\rho(\sigma,\boldsymbol{\eta})}\right), & \alpha = 2\beta, \end{cases}$$

to imamo da je pripadna parabolička H-mjera

$$\mu(t,\mathbf{x},\tau,\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma,\boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{(\frac{\sigma}{|\sigma|},0)}(\tau,\boldsymbol{\xi})\delta_{(0,0)}(t,\mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha > 2\beta \\ \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma,\boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{(0,\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|})}(\tau,\boldsymbol{\xi})\delta_{(0,0)}(t,\mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha < 2\beta \\ \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma,\boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{\frac{(\sigma,\boldsymbol{\eta})}{(\sigma_0,\boldsymbol{\eta}_0)}}(\tau,\boldsymbol{\xi})\delta_{(0,0)}(t,\mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha = 2\beta. \end{cases}$$

∎

Primijetimo da je u oba razmatrana primjera za $\alpha > 2\beta$ mjera μ nošena u polovima, a za $\alpha < 2\beta$ na ekvatoru plohe P^d u dualnom prostoru, bez obzira na izbor početne funkcije v. Kao što smo već primijetili u drugom poglavlju takve restrikcije na nosač H-mjere onemogućuju dobivanje odgovarajućeg prijenosnog svojstva, odnosno veze između početnih veličina i mjere pridružene nizu rješenja neke zadaće. Nadalje, vidimo da u slučaju $\alpha = 2\beta$ za općenitu (periodičnu) funkciju v parabolička H-mjera iz gornjih primjera može biti nošena u bilo kojoj točki plohe P^d, te stoga pretpostavljamo da će novouvedena mjera biti prikladna upravo za proučavanje višeskalnih zadaća u kojima je omjer vremenske i prostorne skale jedan na prema dva (sukladno omjeru reda vremenske i prostorne derivacije).

3. Lokalizacijsko svojstvo

U analogiji s izotropnim Soboljevljevim prostorima H^s, definirajmo za $s \in \mathbf{R}$ posebne anizotropne prostore vezane uz paraboličku jednadžbu:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{\frac{s}{2},s}(\mathbf{R}^{1+d}) &:= \{u \in \mathcal{S}' : \left(\sqrt[4]{1+(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}\right)^s \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})\} \\ &:= \{u \in \mathcal{S}' : \left(\sqrt[4]{1+\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^4}\right)^s \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})\}\ . \end{aligned}$$

Sa skalarnim produktom definiranim relacijom

$$\langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{s}{2},s}(\mathbf{R}^{1+d})} := \left\langle \left(\sqrt[4]{1+\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^4}\right)^s \hat{u} \mid \left(\sqrt[4]{1+\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^4}\right)^s \hat{v} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}$$

novouvedeni prostori su Hilbertovi.

Lako se provjeri da je za $s \in \mathbf{R}^+$ prostor $\mathrm{H}^{-\frac{s}{2}}(\mathbf{R}^{1+d})$ neprekidno uložen u $\mathrm{H}^{-\frac{s}{2},-s}(\mathbf{R}^{1+d})$. Zaista za $u \in \mathrm{H}^{-\frac{s}{2}}(\mathbf{R}^{1+d})$ integral $\int_{\mathbf{R}^{1+d}} \frac{|\hat{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})|^2}{(1+(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4)^{\frac{s}{2}}} d\tau d\boldsymbol{\xi}$ je konačan, pa tvrdnja slijedi iz nejednakosti

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}\right)^s \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^2}}\right)^{\frac{s}{2}}.$$

Teorem 2. (Lokalizacijsko svojstvo) *Neka niz funkcija* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{C}^r)$, *pri čemu su projekcije nosača* u_n *na* $\mathbf{R}_t$ *sadržane u fiksnom kompaktnom skupu. Nadalje, neka*

$$\sqrt{\partial_t}(\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathsf{u}_n) \to 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+d})\ , \tag{9}$$

gdje je $\mathsf{b} \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{C}^r)$, $\mathbf{A} \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{M}_{d\times r}(\mathbf{C}))$, *dok je* $\sqrt{\partial_t}$ *pseudodiferencijalni operator s polihomogenim simbolom* $\sqrt{2\pi i\tau}$, *i.e.*

$$\sqrt{\partial_t}u = \overline{\mathcal{F}}\left(\sqrt{2\pi i\tau}\,\hat{u}(\tau)\right).$$

Tada za paraboličku H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ pridruženu nizu (u_n) vrijedi da je

$$\boldsymbol{\mu}^\top \left(\sqrt{2\pi i\tau}\,\mathsf{b} + 2\pi i \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi}\right) = 0.$$

Drugim riječima, stupci matrice $\boldsymbol{\mu}$ (u oznaci $\boldsymbol{\mu}^m, m = 1, \ldots, r$) su okomiti na vektor $\sqrt{2\pi i\tau}\,\mathsf{b} + 2\pi i \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi}$.

Dem. Pokažimo najprije da analogon relacije (9) vrijedi i za lokalizirani niz $(\phi \mathsf{u}_n)$, gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$. Pretpostavimo najprije da funkcija ϕ ne ovisi o t, odnosno da je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$. U tom slučaju je

$$\sqrt{\partial_t}(\mathsf{b}\cdot\phi\mathsf{u}_n) + \mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\phi\mathsf{u}_n) = \phi\left(\sqrt{\partial_t}(\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\right) + \nabla\phi\cdot\mathbf{A}\mathsf{u}_n$$

Kako niz (u_n) konvergira slabo u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, to zadnji član konvergira jako u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+d})$. Član uz ϕ konvergira u istom prostoru po pretpostavci teorema, te je tim tvrdnja dokazana.

Uzmimo sad proizvoljni $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$. Pritom funkciju ϕ možemo pisati kao $\phi = \phi\varphi$, gdje je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ sa svojstvom da je $\varphi = 1$ na projekciji nosača funkcije ϕ na $\mathbf{R}^d$. Stoga je

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\partial_t}(\mathsf{b}\cdot\phi\mathsf{u}_n)+\mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\phi\mathsf{u}_n)\|_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&\quad= \|\left(\sqrt[4]{1+(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}\right)^{-1}\left(\sqrt{2\pi i\tau}\mathcal{F}(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + 2\pi i\boldsymbol{\xi}\mathcal{F}(\phi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\right)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&\quad\leqslant \|\left(\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}\right)^{-1}\left(\sqrt{2\pi i\tau}\mathcal{F}(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + 2\pi i\boldsymbol{\xi}\mathcal{F}(\phi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\right)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&\quad= \|P_1(\phi\varphi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + P_2(\phi\varphi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&\quad= \|\phi\left(P_1(\varphi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + P_2(\varphi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\right)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} + \|[P_1,\phi](\varphi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + [P_2,\phi](\varphi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})},
\end{aligned}$$

gdje su s P_1, P_2 redom označeni operatori pridruženi simbolima $p_1, p_2 \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ zadanim s $p_1 = \frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}$, $p_2 = \frac{2\pi i\boldsymbol{\xi}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}$. Na osnovu Prve komutacijske leme komutatori u zadnjoj relaciji su kompaktni operatori na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, te stoga zadnja dva člana konvergiraju jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$. Kako niz $(\varphi\mathsf{u}_n)$ ima uniforman kompaktan nosač u $\mathbf{R}^{1+d}$, te kako po prvom dijelu dokaza on zadovoljava pretpostavku (9), to možemo na njega primijeniti Lemu 6. (dolje), i zaključiti da i niz funkcija $(P_1(\varphi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + P_2(\varphi\mathbf{A}\mathsf{u}_n))$ konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$. Na taj način smo dokazali da $\sqrt{\partial_t}(\mathsf{b}\cdot\phi\mathsf{u}_n) + \mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\phi\mathsf{u}_n) \to 0$ u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+d})$, kao i da

$$\frac{1}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\left(\sqrt{2\pi i\tau}\mathcal{F}(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + 2\pi i\boldsymbol{\xi}\mathcal{F}(\phi\mathbf{A}\mathsf{u}_n)\right) \to 0 \tag{10}$$

jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$.

Pomnožimo li $n-$ti član gornjeg niza s $\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0), m \in \{1,\ldots,r\}, \psi \in \mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ te dobiveni umnožak integriramo, na osnovu (10) dobijemo da je

$$\begin{aligned}
0 = \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+d}} &\Bigg(\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\sum_j \mathcal{F}(\phi b_j u_n^j)\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\\
&\qquad + \sum_{k,l}\frac{2\pi i\xi_k}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\mathcal{F}(\phi\mathbf{A}_{kl}u_n^l)\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\Bigg)d\tau d\boldsymbol{\xi}\\
= \sum_j \Big\langle \mu^{jm}, b_j\phi\overline{\phi}\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\psi\Big\rangle &+ \sum_{k,l}\Big\langle \mu^{lm}, \phi\overline{\phi}\frac{2\pi i A_{kl}\xi_k}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\psi\Big\rangle\\
= \Big\langle \frac{1}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\mu}^m\cdot(\mathsf{b}\sqrt{2\pi i\tau} &+ 2\pi i\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}),\ |\phi|^2\psi\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Kako je parabolička H-mjera nošena na skupu P^d na kojem je $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) = 1$, to slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Lema 6. *Neka je f izmjeriva funkcija na $\mathbf{R}^d$, g strogo rastući multiplikativni homomorfizam na $\mathbf{R}^+$ i h neprekidna funkcija oblika $h(\mathbf{x}) = \sum_i |2\pi x^i|^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbf{N}, i = 1, \ldots, d$. Nadalje, neka je (u_n) niz funkcija s nosačima sadržanim u fiksnom kompaktnom skupu takav da $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te*

$$\Big\| \frac{f}{g \circ (1+h)} \, \hat{u}_n \Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \to 0.$$

Ukoliko je $\frac{f}{g \circ h} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, tada vrijedi da i

$$\Big\| \frac{f}{g \circ h} \, \hat{u}_n \Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \to 0.$$

Dem. Iz pretpostavki na niz (u_n) slijedi njegova omeđenost u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Budući da je Fourierova pretvorba neprekidno preslikavanje s L^1 u L^∞, možemo sa $\mathrm{S} \in \mathbf{R}$ označiti supremum niza $(\|\hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^\infty})$. Stoga za dani $\varepsilon > 0$ možemo uzeti kuglu $K = \mathrm{K}(0, r)$ takvu da je $\|\frac{f}{g \circ h}\|_{\mathrm{L}^2(K)} < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{S}}$.

Zbog toga u izrazu

$$\|\frac{f}{g \circ h} \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} = \|\frac{f}{g \circ h} \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d \setminus K)} + \|\frac{f}{g \circ h} \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(K)}$$

drugi član na desnoj strani jednakosti je manji od $\|\frac{f}{g \circ h}\|_{\mathrm{L}^2(K)} \|\hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Za ocijeniti prvi član, primijetimo da zbog pretpostavki na funkciju h, postoji realna konstantna $\tilde{C} > 1$ takva da je $h(\xi) \geqslant \frac{1}{\tilde{C}-1}$ za $|\xi| \geqslant r$, odnosno, da je $|\frac{f}{g \circ h}| \leqslant C |\frac{f}{g \circ (1+h)}|$, gdje je $C = g(\tilde{C})$. Stoga je $\|\frac{f}{g \circ h} \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d \setminus K)} \leqslant C \|\frac{f}{g \circ (1+h)} \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$. Budući da zadnji izraz po pretpostavci teži k 0, to postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ je $\|\frac{f}{g \circ (1+h)} \, \hat{u}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2C}$.

Q.E.D.

4. Primjena na jednadžbu provođenja

U sljedećem koraku htjeli bismo primijeniti novouvedenu paraboličku H-mjeru na jednadžbe proučavane u drugom poglavlju. Primjenu ćemo započeti s homogenom jednadžbom provođenja. Točnije, razmatrat ćemo niz zadaća

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mathsf{div}\,(\mathbf{A} \nabla u_n) = 0 \\ u_n(0) = \gamma_n, \end{cases} \tag{11}$$

pri čemu je $\mathbf{A}$ neprekidna, omeđena, pozitivno definitna matrica u varijablama t i $\mathbf{x}$, sa svojstvom da postoji $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takav da je $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \, \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geqslant \alpha |\boldsymbol{\xi}|^2$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, dok niz $\gamma_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Na osnovu rezultata odjeljka II.2. znamo da je disipacija mikroskopske energije opisana članom ∇u_n koji konvergira slabo k nuli u prostoru $\mathrm{L}^2([0, T] \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ za $T \in \mathbf{R}^+$. Stoga mu možemo pridružiti paraboličku H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ koja će predstavljati makroskopski gubitak energije. Kao i u drugom poglavlju, cilj nam je izračunati mjeru $\boldsymbol{\mu}$, odnosno naći relaciju koja je povezuje s početnim uvjetima i koeficijentima zadaće (11).

Za primjenu paraboličke H-mjere na gornju zadaću, uz prije dobivene ocjene trebat će nam i ocjene na niz funkcija $\sqrt{\partial_t} u_n$. Njih ćemo izvesti korištenjem sljedećih rezultata o razlomljenim derivacijama [LM, I.4].

Teorem 3. *Neka su X, Y dva Hilbertova prostora, te $u \in W(-\infty, \infty, X, Y)$. Tada je*

$$|\tau|^r \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}; [X, Y]_r), \quad r \in [0, 1],$$

gdje je $[X, Y]_r$ klasični međuprostor prostora X i Y s indeksom r. Pri tom vrijedi ocjena

$$\||\tau|^r \hat{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R};[X,Y]_r)} \leqslant \|u\|_{W(-\infty,\infty,X,Y)}.$$

Posebno za $X = V$, $Y = V'$ vrijedi da je $|\tau|^{1/2}\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}; H)$, pri čemu je H Hilbertov prostor takav da V, H, V' tvore Geljfandovu trojku, odnosno da je $V \overset{g}{\hookrightarrow} H \overset{g}{\hookrightarrow} V'$. ∎

U cilju primjene zadnjeg teorema, kao i lokalizacijskog svojstva za paraboličke H-mjere, najprije ćemo lokalizirati funkcije u_n. Množeći (11_1) funkcijom $\theta \in \mathrm{C}_c^1(\mathbf{R}^+)$ dobijemo da je

$$\partial_t(\theta u_n) - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla\theta u_n) = q_n,$$

pri čemu je $q_n = (\partial_t\theta)u_n$. Na osnovu rezultata odjeljka II.2. niz (q_n) konvergira k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, stoga i jako u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+d})$, pa množenje funkcijom θ ne utječe na primjenu lokalizacijskog svojstva na jednadžbu (11_1). Iz tog razloga u daljnjem nećemo označavati razliku između niza rješenja (u_n) i lokaliziranog niza (θu_n).

Nadalje, za niz (lokaliziranih) funkcija u_n vrijedi da $u_n \rightharpoonup 0$ u $W(-\infty, \infty, \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, te je na osnovu gornjeg teorema i Plancherelove formule $\sqrt{\partial_t}\,(u_n) := \left(\sqrt{2\pi i\tau}\,\widehat{u_n}\right)^\vee$ omeđeno u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, odnosno konvergira slabo k nuli u istom prostoru.

U sljedećem koraku uvedimo oznaku $\tilde{\mathsf{v}}_n = (v_n^0, \mathsf{v}_n) := (\sqrt{\partial_t}u_n, \nabla u_n)$. Na osnovu gore dokazanog uvedeni niz funkcija konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{R}^{1+d})$, te definira paraboličku H-mjeru $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \boldsymbol{\mu}_{01} \\ \boldsymbol{\mu}_{10} & \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix},$$

pri čemu je s μ_0 označena H-mjera pridružena nizu $v_n^0 = \sqrt{\partial_t}u_n$, dok $\boldsymbol{\mu}$ označuje mjeru pridruženu nizu $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$. Primijetimo da u ovom slučaju nemamo apriorne ocjene na jaku konvergenciju niza funkcija v_n^0, dok smo kod primjene originalnih H-mjera na jednadžbu provođenja imali da $v_n^0 := u_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, zbog čega su prvi stupac i redak pripadne matrične mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ bili trivijalni.

Korištenjem uvedenih oznaka jednadžbu provođenja možemo zapisati u obliku

$$\sqrt{\partial_t}v_n^0 - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\mathsf{v}_n) = 0,$$

na koji možemo primijeniti lokalizacijsko svojstvo. Ono nam daje da je

$$\tilde{\mu}^{0m}\sqrt{2\pi i\tau} - \sum_{j=1}^{d} \tilde{\mu}^{jm} 2\pi i(\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi})_j = 0, \quad m = 0, \ldots, d. \tag{12}$$

Kako bismo pobliže odredili mjeru $\boldsymbol{\mu}$ pokušajmo pronaći dodatne relacije između njenih komponenti. Najprije, primjenom lokalizacijskog svojstva na Schwarzove relacije $\partial_i v_n^j = \partial_j v_n^i, i, j = 1, \ldots, d$ dobijemo da je

$$\xi_i \tilde{\mu}^{jm} = \xi_j \tilde{\mu}^{im}, \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad m = 0, \ldots, d,$$

odnosno

$$\xi_i \mu^{jm} = \xi_j \mu^{im}, \quad i, j, m = 1, \ldots, d.$$

Na način na koji je to napravljeno u odjeljku II.3, iz zadnje relacije se dobije da je

$$\left(\sum \xi_m^2\right) \mu^{ij} = \xi_i \xi_j \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}.$$

Budući da je parabolička H-mjera definirana na razinskoj hiperplohi P^d zadanoj s $(2\pi\tau)^2 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^4 = 1$, to slijedi da je

$$\sqrt{1-(2\pi\tau)^2}\ \mu^{ij} = (2\pi)^2 \xi_i \xi_j \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu},$$

odnosno, mjera $\boldsymbol{\mu}$ je određena skalarnom mjerom $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$ svugdje osim na polovima plohe P^d.

Nadalje, imamo da je

$$\begin{aligned}\sqrt{\partial_t} v_n^j - \partial_j v_n^0 &= (\sqrt{\partial_t}\partial_j - \partial_j\sqrt{\partial_t}) u_n \\ &= \sqrt{\partial_t}\,(2\pi i \xi_j \hat{u}_n)^\vee - \partial_j\left(\sqrt{2\pi i\tau}\,\hat{u}_n\right)^\vee \\ &= \left(\sqrt{2\pi i\tau}\,2\pi i\xi_j\hat{u}_n\right)^\vee - \left(2\pi i\xi_j\sqrt{2\pi i\tau}\,\hat{u}_n\right)^\vee = 0,\end{aligned}$$

pa možemo opet primijeniti lokalizacijsko svojstvo koje nam daje da je

$$\sqrt{2\pi i\tau}\tilde{\mu}^{jm} = 2\pi i\xi_j\tilde{\mu}^{0m}, \quad j = 1,\dots,d, \quad m = 0,\dots,d. \tag{13}$$

Posebno, iz toga slijedi da je za $\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$ mjera $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, odnosno mjera $\boldsymbol{\mu}$ je nošena izvan polova, i na nosaču je u potpunosti opisana relacijom

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{14}$$

Korištenjem zadnjih dvaju izraza slijedi da je za $\boldsymbol{\xi} \neq \mathsf{0}$ i $m = 1,\dots,d$

$$\tilde{\mu}^{0m} = \frac{\sqrt{2\pi i\tau}\,\xi_m}{2\pi i|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{15}$$

Uvrštavanjem relacija (15) i (14) u (12) dobijemo da za trag mjere $\boldsymbol{\mu}$ vrijedi

$$\xi_m(\tau - 2\pi i\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0, \quad m = 1,\dots,d.$$

Budući da je mjera $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$ nošena izvan polova $\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, to je

$$(\tau - 2\pi i\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0.$$

Kako je izraz u gornjoj zagradi uvijek različit od nule, to zaključujemo da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ trivijalna, odnosno, da homogena jednadžba provođenja ne dozvoljava širenje početnih poremećaja. Ovaj rezultat je očit u slučaju konstantnih koeficijenata (matrice $\mathbf{A}$), jer iz regularnosti rješenja zadaće (11) slijedi da $\nabla u_n \to \mathsf{0}$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$. Međutim, kao i primjenom originalnih H-mjera, korištenjem njihove paraboličke varijante taj je rezultat poopćen na slučaj varijabilnih koeficijenata.

Nadalje, uz odgovarajući izbor indeksa izraz (13) poprima oblik

$$\sqrt{2\pi i\tau}\tilde{\mu}^{j0} = 2\pi i\xi_j\tilde{\mu}^{00},$$

odnosno

$$\sqrt{2\pi i\tau}\tilde{\mu}^{ij} = 2\pi i\xi_i\tilde{\mu}^{0j}.$$

Konjugirajmo prvu od gornjih dviju relacija i pomnožimo s $2\pi i\xi_i$, dok drugu pomnožimo s $\overline{\sqrt{2\pi i\tau}}$ da bismo njihovim zbrajanjem dobili

$$|2\pi\tau|\mu^{ij} = (2\pi)^2\xi_i\xi_j\mu_0,$$

odnosno, korištenjem (14),

$$|2\pi\tau|\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = (2\pi\boldsymbol{\xi})^2\mu_0.$$

Birajući zatim odgovarajuće indekse u (12), primjenom analognog postupka slijedi da je

$$|2\pi\tau|\mu_0 = (2\pi)^2\boldsymbol{\mu}\,(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}).$$

Na osnovu zadnje dvije relacije zaključujemo da je $\mu_0 = \frac{|2\pi\tau|}{|2\pi\boldsymbol{\xi}|^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$, te $\mu_0 = 0$ za $\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, odnosno, mjera μ_0 je također trivijalna i niz $v_n^0 = \sqrt{\partial_t}u_n$ konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d})$.

U sljedećem koraku novouvedene mjere ćemo primijeniti na nehomogenu zadaću

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = \mathsf{div}\,\mathsf{f}_n \\ u_n(0) = \gamma_n\ , \end{cases} \tag{16}$$

gdje $\mathsf{f}_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$, $\gamma_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, dok matrična funkcija $\mathbf{A}$ zadovoljava prije navedena svojstva. Slično kao za homogenu zadaću, definirajmo niz (lokaliziranih) funkcija $\tilde{\mathsf{v}}_n = (v_n^0, \mathsf{v}_n, \mathsf{f}_n) := (\sqrt{\partial_t}u_n, \nabla u_n, \mathsf{f}_n)$ koji konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d};\mathbf{R}^{1+2d})$. S $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ označimo paraboličku H-mjeru pridruženu uvedenom nizu, koja je oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \boldsymbol{\mu}_{01} & \boldsymbol{\mu}_{02} \\ \boldsymbol{\mu}_{10} & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}_{12} \\ \boldsymbol{\mu}_{20} & \boldsymbol{\mu}_{21} & \boldsymbol{\mu}_f \end{pmatrix},$$

pri čemu su s μ_0 i $\boldsymbol{\mu}$ redom označene mjere pridružene nizovima $v_n^0 = \sqrt{\partial_t}u_n$ i $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$, dok $\boldsymbol{\mu}_f$ predstavlja paraboličku H-mjeru pridružena nizu f_n. Lokalizacijsko svojstvo za jednadžbu (16_1) daje

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^\top\left(\sqrt{2\pi i\tau}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\pi i\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\xi}\end{pmatrix}\right) = \mathsf{0}.$$

Gornja relacija zapisana po komponentama mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ glasi

$$\begin{aligned} \mu_0\sqrt{2\pi i\tau} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{10}\cdot\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{20}\cdot\boldsymbol{\xi} &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}_{01}^\top\sqrt{2\pi i\tau} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{21}^\top\boldsymbol{\xi} &= \mathsf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_{02}^\top\sqrt{2\pi i\tau} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{12}^\top\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} - 2\pi i\boldsymbol{\mu}_f^\top\boldsymbol{\xi} &= \mathsf{0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Nadalje, iskoristimo odnose među komponentama funkcije $\tilde{\mathsf{v}}_n$, kako bismo preciznije opisali mjeru $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$. Slično kao i u homogenom slučaju, relacija

$$\sqrt{\partial_t}v_n^j - \partial_j v_n^0 = [\sqrt{\partial_t}, \partial_j]u_n = 0 \tag{18}$$

nam daje da je

$$\sqrt{2\pi i\tau}\tilde{\mu}^{jm} = 2\pi i\xi_j\tilde{\mu}^{0m}, \quad j = 1,\dots,d,\ m = 0,\dots,2d.$$

Posebno, za $m = 0$ iz toga slijedi

$$\sqrt{2\pi i\tau}\boldsymbol{\mu}_{10} = 2\pi i\mu_0\boldsymbol{\xi}, \tag{19}$$

dok uzimajući $m = 1, \ldots, d$ dobijemo da je $\sqrt{2\pi i\tau}\mu^{jm} = 2\pi i\xi_j\mu_{01}^m, j = 1, \ldots, d$, odnosno

$$\sqrt{2\pi i\tau}\boldsymbol{\mu} = 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\mu}_{01}^\top, \tag{20}$$

iz čega slijedi da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ nošena izvan polova plohe P^d. Matričnim množenjem zadnje jednakosti slijeva s $\boldsymbol{\xi}^\top$ slijedi

$$\boldsymbol{\mu}_{01} = \frac{\sqrt{2\pi i\tau}\boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\mu}}{2\pi i\boldsymbol{\xi}^2}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0. \tag{21}$$

Analogno za $m = d + 1, \ldots, 2d$ dobije se da je

$$\boldsymbol{\mu}_{02} = \frac{\sqrt{2\pi i\tau}\boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\mu}_{12}}{2\pi i\boldsymbol{\xi}^2}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0. \tag{22}$$

Nadalje, konjugiranjem jednakosti (19), množenjem (20) s $\overline{\sqrt{2\pi i\tau}}$, te korištenjem relacije $\overline{\boldsymbol{\mu}}_{10} = \boldsymbol{\mu}_{01}^\top$, slijedi da je

$$|2\pi\tau|\boldsymbol{\mu} = 4\pi^2\mu_0\,\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}. \tag{23}$$

Slično kao za relaciju (18), primjena lokalizacijskog svojstva na Schwarzove relacije $\partial_i v_j = \partial_j v_i$, $i, j = 1, \ldots, d$ daje da je

$$\xi_i\tilde{\mu}^{jm} = \xi_j\tilde{\mu}^{im}, \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad m = 0, \ldots, 2d. \tag{24}$$

Posebno, uzimajući $m = 1, \ldots, d$ u zadnjoj relaciji, dobije se kao i u homogenom slučaju da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ oblika

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0. \tag{25}$$

Nadalje, uzimajući $m = d + 1, \ldots, 2d$ u (24) dobijemo da je

$$\xi_i\mu_{12}^{jk} = \xi_j\mu_{12}^{ik}, \quad i, j, k = 1, \ldots, d.$$

Stavljajući posebno $k = i$, te zbrajajući gornji izraz po i dobije se da je $(\boldsymbol{\mu}_{12}\boldsymbol{\xi})_j = \xi_j\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}_{12}$, odnosno

$$\boldsymbol{\mu}_{12}\boldsymbol{\xi} = (\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}_{12})\boldsymbol{\xi}. \tag{26}$$

Konjugiranjem pak slijedi sličan izraz za mjeru $\boldsymbol{\mu}_{21}$:

$$\boldsymbol{\mu}_{21}^\top\boldsymbol{\xi} = (\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}_{21})\boldsymbol{\xi}. \tag{27}$$

Uvrštavanjem izraza (21) i (25) u (17_2), dobijemo da je

$$\frac{1}{\boldsymbol{\xi}^2}\left(\tau - 2\pi i\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\xi}\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu} = 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{21}^\top\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0.$$

Skalarnim množenjem zadnje jednakosti s $\boldsymbol{\xi}$, te korištenjem (27) slijedi da je

$$\left(\tau - 2\pi i \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 2\pi i \boldsymbol{\xi}^2 \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{21}. \tag{28}$$

Analogno, uvrštavanjem izraza (22) u (17_3), matričnim množenjem slijeva vektorom $\boldsymbol{\xi}^\top$, te korištenjem (26) dobijemo da je

$$\left(\tau - 2\pi i \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{12} = 2\pi i \boldsymbol{\mu}_f^\top \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi},$$

odnosno konjugiranjem

$$\left(\tau + 2\pi i \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{21} = -2\pi i \boldsymbol{\mu}_f \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}.$$

Kombinirajući zadnju relaciju s (28) dobijemo vezu između paraboličke H-mjere pridružene desnoj strani i nepoznate mjere $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = \frac{(2\pi\boldsymbol{\xi})^2}{\tau^2 + (2\pi\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi},$$

odnosno, zbog (25),

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{(2\pi)^2}{\tau^2 + (2\pi\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}(\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}. \tag{29}$$

Korištenjem veze među mjerama μ_0 i $\boldsymbol{\mu}$, odnosno izraza (24), imamo da je

$$\mu_0 = \frac{|2\pi\tau|}{\tau^2 + (2\pi\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}.$$

Na taj smo način u potpunosti eksplicitno opisali nepoznate makroskopske energetske izraze pomoću zadanih podataka (niza f_n) za zadaću (17).

Posebno u slučaju $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ slijedi da je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= (2\pi)^4(\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}\\ \mu_0 &= |2\pi\tau|(2\pi)^2\boldsymbol{\mu}_f\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

Dobivene rezultate možemo provjeriti na primjeru iz odjeljka II.3.

Primjer 3. Neka je $f_n(t,x) = \sin\big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\big)$ niz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ funkcija (α i β su proizvoljne realne konstante). Na način na koji je to napravljeno u Primjeru 1. (paraboličke H-mjere za oscilirajuće nizove) pokaže se da je pripadna mjera

$$\mu_f = \frac{1}{4}\left(\delta_{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^4}},\frac{\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^4}}\right)} + \delta_{\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^4}},\frac{-\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^4}}\right)}\right)\boxtimes\lambda,$$

gdje λ predstavlja Lebesgueovu mjeru na fizikalnom prostoru $\mathbf{R}^2$. S druge strane za niz rješenja u_n zadaća (16) (uz $d = \mathbf{A} = 1$ i $\gamma_n = 0$) vrijedi da je

$$\partial_x u_n = \frac{2\pi\beta^2}{(2\pi\beta^2)^2 + \alpha^2}\left(-2\pi\beta^2\sin\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) + \alpha\cos\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big)\right)$$

(do na jako konvergentan član u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$). Stoga je

$$\mu = \left(\left(\frac{(2\pi\beta^2)^2}{(2\pi\beta^2)^2 + \alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{2\pi\alpha\beta^2}{(2\pi\beta^2)^2 + \alpha^2} \right)^2 \right) \mu_f = \frac{(2\pi\beta^2)^2}{\alpha^2 + (2\pi\beta^2)^2}\ \mu_f.$$

Pri tom u izvodu gornje jednakosti za mjeru μ koristimo da su paraboličke H-mjere pridružene nizu periodičkih funkcija generirani funkcijama *sin*, odnosno *cos* jednake, te da član

$$2\sin\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big)\cos\Big(2\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) = \sin\Big(4\pi(\alpha n^2 t + \beta n x)\Big) \rightharpoonup 0$$

u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$.

Dobivena relacija između mjera μ i μ_f poseban je oblik izraza (29) iz kojeg se dobiva uvrštavanjem $\tau = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^4}}$ i $\xi = \pm\frac{\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^4}}$ (točke u kojima je mjera nošena). ∎

5. Primjena na Schrödingerovu jednadžbu

Razmatrat ćemo niz početnih zadaća za Schrödingerovu jednadžbu

$$\begin{cases} i\partial_t u_n + \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = 0 \\ u_n(0) = \gamma_n, \end{cases} \tag{30}$$

pri čemu je $\mathbf{A}$ omeđena, hermitska matrična funkcija u varijablama t i $\mathbf{x}$, sa svojstvom da je $\mathbf{A}(\cdot,\mathbf{x}) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^+_0; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, te da postoji $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takav da je $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geqslant \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, dok niz funkcija $\gamma_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)$.

Primjenom rezultata iz II.4, kao i Teorema 3. o razlomljenim derivacijama, na način kojim je to napravljeno u prethodnom odjeljku pokaže se da niz (lokaliziranih) funkcija $\tilde{\mathsf{v}}_n = (v_n^0, \mathsf{v}_n) := (\sqrt{\partial_t} u_n, \nabla u_n)$ konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{R}^{1+d})$. Stoga mu možemo pridružiti paraboličku H-mjeru $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ koja je oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \boldsymbol{\mu}_{01} \\ \boldsymbol{\mu}_{10} & \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix},$$

pri čemu je s μ_0 označena H-mjera pridružena nizu $v_n^0 = \sqrt{\partial_t} u_n$, dok $\boldsymbol{\mu}$ označuje mjeru pridruženu nizu $\mathsf{v}_n = \nabla u_n$.

Primjenom lokalizacijskog svojstva za paraboličke H-mjere na jednadžbu (30_1) dobijemo izraze

$$\begin{aligned} i\mu_0\sqrt{2\pi i\tau} + 2\pi i\boldsymbol{\mu}_{10}\cdot\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} &= 0 \\ i\boldsymbol{\mu}_{01}^\top\sqrt{2\pi i\tau} + 2\pi i\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi} &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

iz kojih slijedi da je

$$|2\pi\tau|\mu_0 = 4\pi^2\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}. \tag{32}$$

Na sličan način, primjenom lokalizacijskog svojstva na relaciju $\sqrt{\partial_t} v_n^j = \partial_j v_n^0$ dobijemo da je

$$\begin{aligned} -2\pi i\mu_0\,\boldsymbol{\xi} + \sqrt{2\pi i\tau}\,\boldsymbol{\mu}_{10} &= 0 \\ -2\pi i\boldsymbol{\mu}_{01}^\top\otimes\boldsymbol{\xi} + \sqrt{2\pi i\tau}\,\boldsymbol{\mu}^\top &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Rješavajući se nedijagonalnih elemenata mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ u gornjim dvjema jednakostima slijedi da je

$$|2\pi\tau|\boldsymbol{\mu}^\top = 4\pi^2\mu_0\,\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}. \tag{34}$$

Na kraju, na osnovu Schwarzovih relacija imamo kao i prije da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ oblika

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{35}$$

Ubacivanjem gornjeg oblika u (32) i (34) dobiju se sljedeće relacije između skalarnih mjera μ_0 i $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$

$$\begin{aligned} |2\pi\tau|\mu_0 &= 4\pi^2\frac{(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} \\ |2\pi\tau|\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} &= 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2\mu_0. \end{aligned} \tag{36}$$

Eliminacijom mjere μ_0 slijedi da je

$$\Big(|2\pi\tau|^2 - (2\pi)^4(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2\Big)\,\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0, \tag{37}$$

odnosno, zbog hermitičnosti matrične funkcije $\mathbf{A}$, mjera $\boldsymbol{\mu}$ je nošena u točkama za koje je $\tau^2 = (2\pi)^2(\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2 = (2\pi)^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2$.

U slučaju $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, oduzimanjem relacija u (36) dobije se da je

$$(|2\pi\tau| + (2\pi\boldsymbol{\xi})^2)(\mu_0 - \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}) = 0,$$

iz čega slijedi ekviparticija energije $\mu_0 = \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$. Općenito, odnos među dvjema mjerama zadan je relacijom

$$\mu_0 = \frac{|2\pi\tau|}{(2\pi\boldsymbol{\xi})^2}\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}.$$

Primijetmo da je u slučaju $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ zbog (37) gornji razlomak jednak 1.

Međutim, nosač mjere $\boldsymbol{\mu}$ možemo opisati i bolje nego što je to napravljeno relacijom (37). Naime, eliminirajući mjeru $\boldsymbol{\mu}_{01}$ u (31_2) i (33_2), te korištenjem oblika (35)

$$(2\pi\tau + 4\pi^2\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = 0,$$

odnosno mjera $\boldsymbol{\mu}$ je nošena samo na južnoj hemisferi hiperplohe P^d u točkama oblika $2\pi\tau = -4\pi^2\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}$.

Paraboličku H-mjeru ćemo izračunati za niz rješenja Schrödingerove jednadžbe iz Primjera II.5. Na taj način ćemo provjeriti rezultate dobivene u ovom odjeljku, kao i usporediti originalnu H-mjeru s njenom paraboličkom varijantom.

Primjer 4. Razmatramo niz rješenja zadaća (30) zadanih nizom početnih uvjeta:

$$\gamma_n = -\frac{1}{2\pi n}e^{2\pi i n\mathsf{b}\cdot\mathbf{x}},$$

gdje je b proizvoljni jedinični vektor u $\mathbf{R}^d$. Uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{A}$ konstantna, rješenje za $n\in\mathbf{N}$ glasi

$$u_n = -\frac{1}{2\pi n}e^{-i\,(2\pi n)^2\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}\,t + 2\pi i n\mathsf{b}\cdot\mathbf{x}}.$$

Mi želimo izračunati paraboličku H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ pridruženu

$$\nabla u_n = -i\mathsf{b}\, e^{-i\,(2\pi n)^2 \mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}\, t + 2\pi i n \mathsf{b}\cdot\mathbf{x}}.$$

Na način na koji je to napravljeno u drugom poglavlju dobije se da je za test funkciju $\phi \boxtimes \psi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathrm{P}^d)$

$$\begin{aligned} &\lim_n \Big\langle\, (\psi\circ p)(\tau,\boldsymbol{\xi})\widehat{\partial_i u_n}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \mid \big(\widehat{\overline{\phi}\partial_j u_n}\big)(\tau,\boldsymbol{\xi}) \,\Big\rangle \\ &\quad = \frac{1}{4}\lim_n \check{\phi}(0,\mathsf{0})\Big((\psi\circ p)(-2\pi n^2 \mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}, n\mathsf{b}) + (\psi\circ p)(-2\pi n^2\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}, -n\mathsf{b})\Big) b_i b_j, \end{aligned} \tag{38}$$

gdje je funkcija $(\psi\circ p)(\tau,\boldsymbol{\xi}) = \psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)$ parabolički homogeno proširenje funkcije ψ na $\mathbf{R}^{1+d}_*$. Zbog toga se prelaskom na limes u (38) dobije da je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{4}\left(\delta_{(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)} + \delta_{(\tau_0,-\boldsymbol{\xi}_0)}\right)(\tau,\boldsymbol{\xi})\lambda(t,\mathbf{x})\mathsf{b}\otimes\mathsf{b},$$

gdje je $\tau_0 = \frac{-2\pi\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}}{\sqrt{|2\pi\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}|+\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}}}$ i $\boldsymbol{\xi}_0 = \frac{\mathsf{b}}{\sqrt{|2\pi\mathbf{A}\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}|+\mathsf{b}\cdot\mathsf{b}}}$.

Vidimo da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ nošena u točkama za koje je $\tau_0 = -2\pi\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_0\cdot\boldsymbol{\xi}_0$, što je u skladu s gore dobivenim lokalizacijskim svojstvom (37).

Primijetimo nadalje da je H-mjera pridružena nizu funkcija $\nabla\gamma_n = \sin(2\pi n\mathsf{b}\cdot\mathbf{x})\mathsf{b}$ jednaka

$$\boldsymbol{\mu}^0 = \frac{1}{4}\left(\delta_{\mathsf{b}} + \delta_{-\mathsf{b}}\right)(\boldsymbol{\xi})\lambda(\mathbf{x})\mathsf{b}\otimes\mathsf{b}.$$

Vidimo da $\boldsymbol{\xi}$ komponente točaka u kojima je nošena mjera $\boldsymbol{\mu}$ imaju isti smjer (vektora $\pm\mathsf{b}$) kao i točke u kojima je nošena mjera $\boldsymbol{\mu}^0$. Ta činjenica nam omogućuje da uz pomoć lokalizacijskog svojstva (37) odredimo točke u kojima je nošena mjera $\boldsymbol{\mu}$, bez računanja niza rješenja Schrödingerove zadaće koji je određuje. Točnije, na primjeru vidimo da ukoliko mjera $\boldsymbol{\mu}^0$ ima komponentu $\delta_{\boldsymbol{\xi}}$ za $\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{S}^d$, tada mjera $\boldsymbol{\mu}$ ima za komponentu Diracovu mjeru u točki $S^-(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, gdje je S^- operator podizanja sa sfere S^{d-1} na plohu P^d:

$$S^-(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \left(\frac{-2\pi\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{(2\pi)^4(\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{(2\pi)^4(\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi})^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}\right).$$

Na taj način možemo direktno konstruirati mjeru $\boldsymbol{\mu}$ iz početnih podataka, odnosno njima pridružene paraboličke H-mjere.

∎

6. Poopćenje lokalizacijskog svojstva

U dosadašnjim primjerima proučavali smo paraboličke H-mjere pridružene nizu funkcija $\tilde{\mathsf{v}}_n := (v_n^0, \mathsf{v}_n) := (\sqrt{\partial_t}u_n, \nabla u_n) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$ koje zadovoljavaju jednadžbu oblika

$$\sqrt{\partial}_t(\mathsf{b}\cdot\mathsf{v}_n) + \mathsf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathsf{v}_n) = 0\ , \tag{39}$$

te stoga na njih možemo primijeniti lokalizacijsko svojstvo iskazano Teoremom 2.

Međutim, što ako imamo jednadžbu drugog oblika? Na primjer, jednadžbu ploče koja glasi

$$\partial_t(\rho\partial_t u_n) + \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathbf{M}\nabla\nabla u_n) = 0.$$

Energija sustava pridružena toj jednadžbi je za svaki n određena izrazom

$$\int \rho|\partial_t u_n|^2 + \mathbf{M}\nabla\nabla u_n \cdot \nabla\nabla u_n.$$

Njen makroskopski limes je opisan H-mjerom pridruženom nizu funkcija $\tilde{\mathsf{v}}_n = (v_n^0, \mathsf{v}_n) := (\partial_t u_n, \nabla\nabla u_n) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ koje zadovoljavaju

$$\partial_t(\rho v_n^0) + \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathbf{M}\mathsf{v}_n) = 0.$$

Vidimo da je zadnja jednadžba sličnog oblika kao i (39), u smislu da je odnos reda vremenske i prostorne derivacije i dalje 1:2. Međutim, lokalizacijsko svojstvo kako je dokazano u trećem odjeljku ovdje nije primjenjivo. Stoga ćemo izvesti njegovo poopćenje s ciljem primjene na općenite zadaće u kojima je odnos reda vremenske i prostorne derivacije 1:2.

Teorem 4. (Lokalizacijsko svojstvo – poopćenje) *Neka je* (u_n) *niz funkcija s nosačima sadržanim u fiksnom kompaktnom skupu koji konvergira slabo k nuli u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^r)$, *te neka*

$$\sqrt{\partial_t}^s(\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=s\\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}_0^d}} \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n) \to 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^{-\frac{s}{2},-s}(\mathbf{R}^{1+d})\,, \tag{40}$$

gdje je $s \in \mathbf{N}_0, \mathsf{b} \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^r)$, *dok je s* $\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}$ *označen niz vektorskih funkcija iz prostora* $\mathrm{C}_b(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^r)$. *Tada za paraboličku H-mjeru* $\boldsymbol{\mu}$ *pridruženu nizu* (u_n) *vrijedi da je*

$$\boldsymbol{\mu}^\top\left((\sqrt{2\pi i\tau})^s\mathsf{b} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=s\\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}_0^d}} (2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\right) = 0.$$

Drugim riječima, stupci matrice $\boldsymbol{\mu}$ *(u oznaci* $\boldsymbol{\mu}^m, m = 1, \ldots, r$*) su okomiti na vektor u gornjoj zagradi.*

Dem. Kao i kod dokaza Teorema 2, pokažimo najprije da analogon relacije (40) vrijedi i za lokalizirani niz $(\phi\mathsf{u}_n)$, gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sqrt{\partial_t}^s(\mathsf{b}\cdot\phi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\phi\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{H}^{-\frac{s}{2},-s}(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&\leqslant \Big\|\left(\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}\right)^s\mathcal{F}(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}\left(\frac{(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2+(2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}^{\,s}}\right)\mathcal{F}(\phi\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&= \Big\|P_1(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}P_{\boldsymbol{\alpha}}(\phi\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}\\
&= \Big\|\phi\Big(P_1(\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}P_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})} + \Big\|[P_1,\phi](\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}[P_{\boldsymbol{\alpha}},\phi](\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}
\end{aligned}$$

gdje su s $P_1, P_{\boldsymbol{\alpha}}$ redom označeni operatori pridruženi simbolima $p_1 = \left(\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\right)^s, p_2 = \frac{(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^s}$. Na osnovu Prve komutacijske leme komutatori u gornjoj relaciji su kompaktni operatori na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$, te stoga zadnja dva člana konvergiraju jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$.

Kako na osnovu relacije (40), te Leme 6, i niz funkcija $\phi\left(P_1(\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n)+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}P_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\right)$ konvergira jako k nuli u istom L^2 prostoru, to i $\sqrt{\partial_t}^s(\mathsf{b}\cdot\phi\mathsf{u}_n)+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\phi\mathsf{u}_n)\to 0$ u $\mathrm{H}^{-\frac{s}{2},-s}(\mathbf{R}^{1+d})$, odnosno,

$$\left(\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})\right)^{-s}\left(\sqrt{2\pi i\tau}^s\mathcal{F}(\phi\mathsf{b}\cdot\mathsf{u}_n)+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{F}(\phi\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\mathsf{u}_n)\right)\longrightarrow 0 \tag{41}$$

jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$.

Pomnožimo li $n-$ti član gornjeg niza s $\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0), m\in\{1,\dots,r\},\psi\in\mathrm{C}(\mathrm{P}^d)$ te dobiveni umnožak integriramo, na osnovu (41) dobijemo da je

$$\begin{aligned}
0=\lim_n\int_{\mathbf{R}^{1+d}}&\left(\left(\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\right)^s\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\sum_j\mathcal{F}(\phi b_j u_n^j)\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\right.\\
&\left.+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}\frac{(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^s}\psi(\tau_0,\boldsymbol{\xi}_0)\sum_j\mathcal{F}(\phi a_{\boldsymbol{\alpha}}^j\cdot u_n^j)\overline{\mathcal{F}(\phi u_n^m)}\right)d\tau d\boldsymbol{\xi}\\
=\sum_j\Big\langle\mu^{jm},b_j\phi\overline{\phi}&\left(\frac{\sqrt{2\pi i\tau}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})}\right)^s\psi\Big\rangle+\sum_j\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}\Big\langle\mu^{jm},\phi\overline{\phi}a_{\boldsymbol{\alpha}}^j\frac{(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^s}\psi\Big\rangle\\
=\Big\langle\frac{1}{\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})^s}&\boldsymbol{\mu}^m\cdot\left((\sqrt{2\pi i\tau})^s\mathsf{b}+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=s}(2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}\right),|\phi|^2\psi\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Kako je H-mjera nošena na skupu P^d na kojem je $\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})=1$, to slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

7. Primjena na jednadžbu ploče

Prije same primjene najprije ćemo iznijeti ocjene na rješenje jednadžbe ploče. S ciljem primjene rezultata dobivenih u [DL, Ch. XVIII, §5], jednadžbu ćemo zapisati u apstraktnom obliku :

$$\frac{d}{dt}c(\cdot;u(\cdot),v)+a(\cdot;u(\cdot),v)=\langle\, f(\cdot)\mid v\,\rangle_H,\quad v\in V,$$

gdje je gornja jednakost shvaćena u smislu distribucija na $\langle 0,T\rangle$. Pri tom V i H označavaju Hilbertove prostore sa svojstvom da je $V\overset{g}{\hookrightarrow}H\overset{g}{\hookrightarrow}V'$, dok je za $T\in\mathbf{R}^+$ s $a(t;\cdot,\cdot)$, $t\in[0,T]$, označena familija neprekidnih, seskvilinearnih formi na $V\times V$ sa svojstvom da postoje $M,\alpha\in\mathbf{R}^+$, te $\lambda\in\mathbf{R}$ takvi da je

$$\begin{cases}
a(\cdot;u,v)\in\mathrm{C}^1([0,T]),\quad u,v\in V\\
a(t;u,v)=\overline{a(t;v,u)},\quad t\in[0,T],\ u,v\in V\\
a(t;u,u)+\lambda\|u\|_H^2\geqslant\alpha\|u\|_V^2,\quad t\in[0,T],\ u\in V\\
\left|\dfrac{d}{dt}a(t;u,v)\right|\leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\quad t\in[0,T],\ u,v\in V.
\end{cases} \tag{42}$$

Uz gornje pretpostavke, forma a definira familiju neprekidnih linearnih operatora $A(t):V\to V'$ zadanih izrazom

$${}_{V'}\langle\, A(t)u,v\,\rangle_V:=a(t;u,v).$$

Nadalje, s $c(t;\cdot,\cdot)$, je označena neprekidna, seskvilinearna forma na $H \times H$ sa svojstvom da postoji $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takav da je

$$\begin{cases} c(\cdot;u,v) \in \mathrm{C}^1([0,T]), & u,v \in V \\ c(t;u,v) = \overline{c(t;v,u)}, & t \in [0,T],\ u,v \in V \\ c(t;u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2, & t \in [0,T],\ u \in V. \end{cases} \tag{43}$$

Pri tom za svaki $t \in [0,T]$ forma c definira neprekidan linearan operator $C(t) \in \mathcal{L}(H)$:

$$\langle\, C(t)u \mid v \,\rangle_H := c(t;u,v).$$

Za funkciju f pretpostavljamo da je $f \in \mathrm{L}^2([0,T];H)$.

Uz iznesene pretpostavke vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 5. *Postoji jedinstveno rješenje $u \in \mathrm{C}([0,T];V)$ zadaće*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle\, C(t)u \mid v \,\rangle_H + {}_{V'}\langle\, A(t)u, v \,\rangle_V = \langle\, f(\cdot) \mid v \,\rangle_H \\ u(0) = u_0 \in V \\ u'(0) = u_1 \in H, \end{cases}$$

sa svojstvom da je $u' \in \mathrm{L}^2([0,T];V) \cap \mathrm{C}([0,T];H)$, te su pri tom norme $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];V)}$, $\|u'\|_{\mathrm{L}^2([0,T];V)}$ i $\|u'\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];H)}$ odozgo omeđene normama funkcija u_0, u_1 i f. ∎

Pri primjeni paraboličke H-mjere razmatrat ćemo niz zadaća

$$\begin{cases} \partial_{tt} u_n + \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathsf{M}\nabla\nabla u_n) = 0 \\ u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^d) \\ u_n'(0) = \beta_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d). \end{cases} \tag{44}$$

Pri tom je za $(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$, $\mathsf{M}(t,\mathbf{x})$ simetrični, realni tenzor ranga 4, sa svojstvom da je

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d; \mathcal{L}\,(\mathrm{M}_{d\times d})) \\ &\mathsf{M}(\cdot,\mathbf{x}) \in \mathrm{C}_b^1(\mathbf{R}^+; \mathcal{L}\,(\mathrm{M}_{d\times d})) \\ &\mathsf{M}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \geqslant \alpha \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathrm{M}_{d\times d}. \end{aligned}$$

Na osnovu rezultata Teorema 5, pokaže se da niz rješenja u_n konvergira slabo prema nuli u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{H}^2(\mathbf{R}^d))$, odnosno $u_n' \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$. Stoga makroskopski limes energije ploče, odnosno izraza $\int \big(|\partial_t u_n|^2 + \mathsf{M}\nabla\nabla u_n \cdot \nabla\nabla u_n\big)$, možemo opisati pomoću pripadnih H-mjera.

Prije nego što ispitamo svojstva tih mjera, uvedimo oznaku koja će nam olakšati zapis računa. U daljnjem ćemo za matricu $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{d\times d}$ s $\overrightarrow{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{d^2}$ označavati vektor čije komponente, indeksirane uređenim parovima (i,j), $i,j = 1,\ldots,d$, su zadane s $\overrightarrow{\mathbf{A}}_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$. Drugim rječima, $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ sadrži elemente matrice $\mathbf{A}$ složene u vektor iz $\mathbf{R}^{d^2}$.

Korištenjem gore navedenih ocjena na niz (u_n), te Aubinove leme o kompaktnosti pokaže se da za test funkciju $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{1+d})$ niz (ϕu_n) također zadovoljava jednadžbu (44_1), do na jako konvergentan član u $\mathrm{H}^{-1,-2}(\mathbf{R}^{1+d})$. Stoga množenje funkcijom ϕ ne utječe na primjenu lokalizacijskog svojstva na jednadžbu ploče, te iz tog razloga u daljnjem nećemo označavati razliku između niza rješenja (u_n) i lokaliziranog niza (ϕu_n).

Označimo s $\tilde{\mathsf{v}}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^{1+d^2})$ niz (lokaliziranih) funkcija $\tilde{\mathsf{v}}_n = (v_n^0, \overrightarrow{\mathsf{v}_n}) := (\partial_t u_n, \overrightarrow{\nabla\nabla u_n})$, te s $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ pripadnu paraboličku H-mjeru koja je oblika

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \boldsymbol{\mu}_{01} \\ \boldsymbol{\mu}_{10} & \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}.$$

Pri tom je $\boldsymbol{\mu}$ matrična $d^2 \times d^2$ mjera, čije retke i stupce indeksiramo uređenim parovima (i,j), $i,j = 1,\dots,d$. Novouvedeni niz zadovoljava diferencijalnu relaciju

$$\partial_t v_n^0 + \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathsf{M}\mathsf{v}_n = 0,$$

na koju možemo primijeniti poopćeno lokalizacijsko svojstvo. Njime dobijemo jednakost:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^\top \begin{pmatrix} 2\pi i\tau \\ -4\pi^2 \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \end{pmatrix} = 0.$$

Raspisan po komponentama, on glasi

$$\begin{aligned} 2\pi i\tau\mu_0 - 4\pi^2 \boldsymbol{\mu}_{10} \cdot \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} &= 0 \\ 2\pi i\tau \boldsymbol{\mu}_{01}^\top - 4\pi^2 \boldsymbol{\mu}^\top \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Kao i prije, cilj nam je mjeru $\boldsymbol{\mu}$ izraziti pomoću skalarne mjere $(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})$. U tu svrhu, osim jednadžbe ploče, moramo iskoristiti i relacije koje proizlaze iz činjenice da su komponente vektora $\tilde{\mathsf{v}}_n$ definirane kao parcijalne derivacije skalarne funkcije. Korištenjem Schwarzova teorema imamo da je $\partial_{ij} v_{kl} = \partial_{kl} v_{ij}$, iz čega primjenom lokalizacijskog svojstva slijedi da je

$$\xi_i \xi_j \boldsymbol{\mu}_{kl} = \xi_k \xi_l \boldsymbol{\mu}_{ij},$$

pri čemu je s $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ označen (i,j)-ti redak matrice $\boldsymbol{\mu}$. Analogno dokazu Leme II.4, iz gornje relacije se dobije da je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}}{|\boldsymbol{\xi}|^4}\,\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} = (2\pi)^4 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}}{1-(2\pi\tau)^2}\,\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{46}$$

Zaista, stavljajući $(m,n) = (i,j)$ u relaciji $\xi_i\xi_j\mu_{klmn} = \xi_k\xi_l\mu_{ijmn}$, te zbrajajući po svim uređenim parovima (i,j), dobijemo da je

$$\sum_{(i,j)} \mu_{klij}\,\xi_i\xi_j = \sum_{(i,j)} \mu_{ijij}\,\xi_k\xi_l = \xi_k\xi_l \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu},$$

odnosno

$$\boldsymbol{\mu}\,\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} = (\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu})\,\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}.$$

S druge strane je

$$\xi_i\xi_j\mu_{klmn} = \xi_k\xi_l\mu_{ijmn} = \xi_k\xi_l\bar{\mu}_{mnij} = \xi_m\xi_n\bar{\mu}_{klij} = \xi_m\xi_n\mu_{ijkl},$$

pri čemu smo koristili hermitičnost paraboličke H-mjere $\boldsymbol{\mu}$. Množeći gornju relaciju s $\xi_m\xi_n$, te zbrajajući po uređenim parovima (m,n) slijedi da je

$$\Big(\sum \xi_m\Big)^2 \mu_{ijkl} = \sum_{(m,n)} \mu_{klmn}\,\xi_i\xi_j\xi_m\xi_n = \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$$

što povlači (46). Posebno vrijedi da je mjera $\boldsymbol{\mu}$ simetrična, odnosno realna.

Lokalizacijsko svojstvo također možemo primijeniti na (d^2 skalarnih relacija) $\partial_t \overrightarrow{\mathsf{v}_n} = \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} v_n^0$, te time dobiti izraz

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^\top \begin{pmatrix} -4\pi^2 \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}^\top \\ -2\pi i\tau \mathbf{I} \end{pmatrix} = 0,$$

odnosno po komponentama

$$\begin{aligned} -4\pi^2 \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}\,\mu_0 - 2\pi i\tau \boldsymbol{\mu}_{10} &= 0 \\ -4\pi^2 \boldsymbol{\mu}_{01}^\top \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} - 2\pi i\tau \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{47}$$

Eliminacijom mjere $\boldsymbol{\mu}_{01}$ iz (47_2) i (45_2), te uvrštavanjem oblika (46) imamo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (2\pi\tau)^2 \boldsymbol{\mu} - (2\pi)^4\, \boldsymbol{\mu}\, \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \\ &= (2\pi\tau)^2 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}}{|\boldsymbol{\xi}|^4}\, \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} - (2\pi)^4 \frac{\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}\right) \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})}}{|\boldsymbol{\xi}|^4} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}\, \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu} \\ &= \left((2\pi\tau)^2 - (2\pi)^4 \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \right) \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}}{|\boldsymbol{\xi}|^4}\, \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Koristeći da je

$$\overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i,j} \Big(\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\Big)_{i,j} \xi_i\xi_j = \mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}),$$

imamo da je za $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ na nosaču mjere $\boldsymbol{\mu}$

$$(2\pi\tau)^2 = (2\pi)^4\, \mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}). \tag{48}$$

Međutim, kako relacija (47_2) povlači da je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ za $\boldsymbol{\xi} = 0$, to gornji izraz vrijedi na cijelom nosaču mjere $\boldsymbol{\mu}$. Također vidimo da je pozitivnost tenzora M nužan uvjet da bi mjera $\boldsymbol{\mu}$ bila netrivijalna.

Nadalje, eliminacijom mjere $\boldsymbol{\mu}_{10}$ iz (45) dobijemo izraz

$$(2\pi\tau)^2 \mu_0 = (2\pi)^4 \boldsymbol{\mu}\, \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \cdot \overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} = (2\pi)^4 \frac{\left(\overrightarrow{\mathsf{M}(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}\right)^2}{|\boldsymbol{\xi}|^4} \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu},$$

koji u slučaju $\mathsf{M} = \mathbf{I}$ prelazi u

$$(2\pi\tau)^2 \mu_0 = (2\pi|\xi|^4) \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{49}$$

Analogno, na osnovu (47) slijedi:

$$(2\pi)^4 \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \mu_0 = (2\pi\tau)^2 \boldsymbol{\mu} = (2\pi\tau)^2 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}} \otimes \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}}{|\boldsymbol{\xi}|^4} \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu},$$

odnosno

$$(2\pi|\xi|^4)\mu_0 = (2\pi\tau)^2 \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}. \tag{50}$$

Oduzimanjem relacija (49) i (50) dobije se da je

$$\left((2\pi\tau)^2 + (2\pi|\xi|)^4\right)(\mu_0 - \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}) = 0,$$

iz čega slijedi ekviparticija energije za promatranu zadaću, odnosno $\mu_0 = \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$.

Dobiveno lokalizacijsko svojstvo za mjeru $\boldsymbol{\mu}$ je slično onom dobivenom u slučaju Schrödingerove jednadžbe. U oba slučaja pripadna parabolička H-mjera je nošena u točkama oblika $\tau = q(\boldsymbol{\xi})$, gdje je q homogena funkcija stupnja dva određena koeficijentima pripadnih jednadžbi, $\mathbf{A}$, odnosno M. Razlika je u tom što je kod Schrödingerove jednadžbe pripadna mjera nošena samo na južnoj hemisferi, dok kod jednadžbe ploče pripadna mjera je antipodalno simetrična i nošena na obje hemisfere. Razlog tome možemo tražiti u činjenici da se rješenje jednadžbe ploče može prikazati kao $u = u_1 + u_2$, gdje je u_1 rješenje Schrödingerove jednadžbe, dok $u_2 = \overline{u}_1$ rješava konjugiranu Schrödingerovu jednadžbu.

Navedeno ćemo ilustrirati na primjeru niza zadaća u kojima ćemo radi jednostavnosti uzeti $d = 1$, te konstantne koeficijente $\mathsf{M} = a$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u_n + \partial_{xx}(a^2\partial_{xx}u_n) = 0 \\ \qquad\qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^d) \\ \qquad\qquad u_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Pripadna rješenja su oblika $u_n = u_n^+ + u_n^-$, gdje funkcije $u_n^\pm$ rješavaju zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u_n^\pm = \pm i\partial_x(a\partial_x u_n^\pm) \\ u_n^\pm(0) = \dfrac{1}{2}\gamma_n. \end{cases}$$

Stoga su funkcije $v_n^+ := \partial_x u_n^+$ rješenja niza zadaća za Schrödingerovu jednadžbu

$$\begin{cases} \partial_t v_n^+ = i\partial_x(a\partial_x v_n^+) \\ v_n^+(0) = \dfrac{1}{2}\partial_x\gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d). \end{cases}$$

na koje možemo primijeniti rezultate petog odjeljka. U skladu s njima mjera μ_1, pridružena nizu $(\partial_x v_n^+)$, je nošena u točkama oblika $2\pi\tau = -4\pi^2 a|\xi|^2$. Na osnovu Leme 3. mjera μ_2 pridružena nizu $\partial_x v_n^-$ je nošena u točkama oblika $2\pi\tau = 4\pi^2 a|\xi|^2$, odnosno na sjevernoj hemisferi plohe P^1.

Zbog toga je parabolička H-mjera μ pridružena nizu $\partial_{xx}u_n = \partial_x v_n^+ + \partial_x v_n^-$ oblika $\mu = \mu_1 + \mu_2 + 2\mathsf{Re}\,\mu_{12}$, gdje mjera μ_{12} odgovara produktu funkcija $\partial_x v_n^+$ i $\partial_x v_n^-$, odnosno ona je vandijagonalni element matrične mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ pridružene nizu $(\partial_x v_n^+, \partial_x v_n^-)$. Kako mjere μ_1 i μ_2 imaju disjunktne nosače, to na osnovu Korolara 1, odnosno dijagonalne domininantnosti mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$, zaključujemo da je $\mu_{12} = 0$. Stoga je mjera μ pridružena jednadžbi grede oblika $\mu = \mu_1 + \mu_2$, te je nošena u točkama oblika $2\pi\tau = \pm 4\pi^2 a|\xi|^2$, što je u skladu s izvedenom relacijom (48).

8. Primjena u homogenizaciji

Već smo spomenuli da je nastanak H-mjera vezan uz proučavanje homogenizacijskih problema, te im odatle potječe naziv. Točnije, Tartar je modelirao određene hidrodinamičke probleme s ciljem boljeg razumijevanja turbulentnih pojava. Pri tom je koristio model temeljen na *Stokesovom sustavu*:

$$\begin{cases} \partial_t \mathsf{v} - \nu\triangle\mathsf{v} + \nabla\pi = \mathsf{b} \\ \qquad\qquad \mathsf{div}\,\mathsf{v} = 0\,. \end{cases}$$

Polazeći od gornjeg sustava izvodi se sljedeća homogenizacijska zadaća. Neka niz vektorskih funkcija u_n konvergira k u_0 slabo u prostoru $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3))$ i slabo * u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ (prijelazom na podniz i korištenjem ulaganja $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow \mathrm{L}^6(\mathbf{R}^3)$ ovo možemo dobiti iz drugih pretpostavki, no to nam u ovom času nije važno), pri čemu svaki član niza zadovoljava:

$$\begin{cases} \partial_t \mathsf{u}_n - \nu\triangle \mathsf{u}_n + \mathsf{u}_n \times \mathsf{rot}\,(\mathsf{v}_0 + \lambda \mathsf{v}_n) + \nabla p_n = \mathsf{div}\,\mathbf{B}_n \\ \mathsf{div}\,\mathsf{u}_n = 0\ . \end{cases} \tag{51}$$

Pri tome pretpostavljamo da je $\mathsf{v}_0 \in \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^3)) + \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^3(\mathbf{R}^3))$, dok su funkcije v_n oblika $\mathsf{v}_n = \mathsf{v}_n^1 + \mathsf{v}_n^2$ gdje $\mathsf{v}_n^1 \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^q([0,T];\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^3))$ i $\mathsf{v}_n^2 \rightharpoonup 0$ u prostoru $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^3))$ (slabo *) za neke $q > 2$ i $r > 3$. Za niz tenzora $(\mathbf{B}_n)$ pretpostavljamo da $\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_0$ jako u $\mathrm{L}^2([0,T]\times\mathbf{R}^3;\mathrm{M}_{3\times 3})$, dok je niz (p_n) omeđen u $\mathrm{L}^2([0,T]\times\mathbf{R}^3)$. Parametar $\lambda \in \mathbf{R}^+$ određuje jačinu titranja.

Cilj nam je razumjeti kako titranje u koeficijentima (niz (v_n)) stvara titranje u rješenju (niz $(\nabla \mathsf{u}_n)$), te odrediti jednadžbu koju zadovoljava limes niza (u_n), funkcija u_0.

Premda gornja jednadžba ne modelira stvarnu pojavu, članovi sile oblika $\mathsf{u} \times \mathsf{rot}\,\mathsf{A}$ se pojavljuju u stvarnim primjenama, kao rezultat Lorentzove sile $q(\mathsf{u} \times \mathsf{B})$ u elektromagnetizmu, ili u fluidima opisanim Navier-Stokesovim sustavom; gdje pišemo:

$$(\nabla \mathsf{u})\mathsf{u} = \mathsf{u} \times \mathsf{rot}\,(-\mathsf{u}) + \nabla \frac{|\mathsf{u}|^2}{2}\ .$$

Iako ova sila ne djeluje neposredno (ne radi se o koeficijentima, nego o nelinearnosti u jednadžbi), ona ipak generira titranje koje rasipa energiju na mikroskopskoj razini, što postaje vidljivo u rješenju jednadžbe.

Vrijedi sljedeći teorem (za dokaz vidi [T2]):

Teorem 6. *Uz gornje pretpostavke, postoje podniz niza* (v_n) *i nenegativna simetrična matrična funkcija* $\mathbf{M}$*, ovisna o izboru toga podniza, takvi da limes* u_0 *zadovoljava jednadžbu:*

$$\begin{cases} \partial_t \mathsf{u}_0 - \nu\triangle \mathsf{u}_0 + \mathsf{u}_0 \times \mathsf{rot}\,\mathsf{v}_0 + \lambda^2 \mathbf{M}\mathsf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathsf{div}\,\mathbf{B}_0 \\ \mathsf{div}\,\mathsf{u}_0 = 0\ , \end{cases} \tag{52}$$

te da vrijedi konvergencija:

$$\nu|\nabla \mathsf{u}_n|^2 \rightharpoonup \nu|\nabla \mathsf{u}_0|^2 + \lambda^2 \mathbf{M}\mathsf{u}_0 \cdot \mathsf{u}_0 \qquad \text{u} \quad \mathcal{D}'(\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3)\ .$$

∎

Matrična funkcija $\mathbf{M}$ iz iskaza gornjeg teorema se dobije preko niza rješenja pomoćnih zadaća

$$\begin{cases} -\partial_t \mathsf{w}_n - \nu\triangle \mathsf{w}_n + \mathsf{k} \times \mathsf{rot}\,\mathsf{v}_n = -\nabla r_n \\ \mathsf{div}\,\mathsf{w}_n = 0\ , \end{cases} \tag{53}$$

s (recimo) homogenim Dirichletovim uvjetom u trenutku T. Pri tom je k proizvoljan vektor iz $\mathbf{R}^3$.

Za svaki $n \in \mathbf{N}$ taj sustav ima točno jedno rješenje (w_n, r_n). Pri tom je niz (r_n) omeđen u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, dok w_n konvergira slabo k $\mathsf{0}$ u prostoru $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3))$ i slabo * u $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$. Korištenjem Soboljevljevih ulaganja pokaže se da je funkcija $\mathbf{M}$ određena pomoću niza (w_n) relacijom

$$\nu \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \varphi |\nabla \mathsf{w}_n|^2\, d\mathbf{x} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \varphi \mathbf{M}\mathsf{k} \cdot \mathsf{k}\, d\mathbf{x}\ ,$$

gdje je φ test funkcija iz prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3)$.

Nadalje, vrijedi da je $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3))$, te da je

$$\mathbf{M}\mathsf{k}\cdot\mathsf{k} \geqslant 0, \quad \mathsf{k}\in\mathbf{R}^3,$$

u smislu distribucija na $\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3$.

Cilj nam je izraziti homogenizacijski član određen funkcijom $\mathbf{M}$ direktno preko niza koeficijenata v_n iz zadaća (51), odnosno njima pridružene H-mjere. Na taj način izbjegavamo potrebu za konstrukcijom pomoćne zadaće (53).

Primjenom paraboličkih H-mjera dobivamo eksplicitnu formulu (koja, naravno, ovisi o pripadnoj mjeri) za matričnu funkciju $\mathbf{M}$.

Teorem 7. *Ako je $\boldsymbol{\mu}$ parabolička H-mjera pridružena podnizu niza (v_n), onda je matrična funkcija $\mathbf{M}$ dana formulom:*

$$\int_{\mathbf{R}^{1+3}} \mathbf{M}(t,\mathbf{x})\,\phi(t,\mathbf{x})dtd\mathbf{x} = 4\pi^2\nu\Big\langle \Big(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\xi}|^2 - \boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\Big)\frac{(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})}{\tau^2+\nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^4}, \phi\boxtimes 1\Big\rangle,$$

gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3)$.

Dem. Za rješenja w_n pomoćnog sustava (53), uz homogene Dirichletove rubne uvjete, vrijedi konvergencija

$$\nu\int_{\mathbf{R}^{1+3}} \varphi|\nabla\mathsf{w}_n|^2\,d\mathbf{x} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \varphi\mathbf{M}\mathsf{k}\cdot\mathsf{k}\,d\mathbf{x}\ ,$$

pri čemu je $\mathbf{M}\in\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3;\mathrm{M}_{3\times 3}))$, dok $\mathsf{w}_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3))$. Koristeći gore navedene ocjene za nizove (r_n) i (v_n), na osnovu jednadžbe (53_1) slijedi da $\mathsf{w}_n' \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3))$. Primjenom Aubinove leme o kompaktnosti možemo zaključiti da $\mathsf{w}_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbf{R}^3)$. Stoga je

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} |\varphi\nabla\mathsf{w}_n|^2\,d\mathbf{x} = \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} |\nabla(\varphi\mathsf{w}_n)|^2\,d\mathbf{x},$$

pa se dokaz teorema svodi na računanje limesa na desnoj strani zadnje jednakosti.

Najprije lokalizirajmo funkcije, množeći (53) s $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R}^3)$, što nam daje:

$$-\partial_t(\varphi\mathsf{w}_n) - \nu\triangle(\varphi\mathsf{w}_n) + \mathsf{k}\times\mathsf{rot}\,(\varphi\mathsf{v}_n) = -\nabla(\varphi r_n) + \mathsf{q}_n\ , \tag{54}$$

pri čemu $\mathsf{q}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+3})$ (pa i jako u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}(\mathbf{R}^{1+3})$). Zaista:

$$\mathsf{q}_n = -(\partial_t\varphi)\mathsf{w}_n - \nu(\triangle\varphi)\mathsf{w}_n - 2\nu(\nabla\mathsf{w}_n)\nabla\varphi + \mathsf{k}\times(\nabla\varphi\times\mathsf{v}_n) + r_n\nabla\varphi\ ,$$

a kako $\mathsf{w}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ slabo u $\mathrm{L}^2([0,T];\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3))$, to i (lokalizirani) w_n i $\nabla\mathsf{w}_n$ konvergiraju slabo u $\mathrm{L}^2([0,T]\times\mathbf{R}^3)$. Naravno, isto vrijedi i za lokalizirane nizove (v_n) i (r_n). Zbog omeđenosti nosača funkcije φ, to imamo jaku konvergenciju u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2},-1}$.

Primjenom Fourierove pretvorbe na (54) dobivamo:

$$(-2\pi i\tau + \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2)\widehat{\varphi\mathsf{w}_n} = -\mathsf{k}\times\Big((2\pi i\boldsymbol{\xi})\times\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\Big) - 2\pi i\widehat{\varphi r_n}\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathsf{q}}_n\ ,$$

odakle dijeljenjem s $(-2\pi i\tau + \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2)$ imamo:

$$\widehat{\varphi\mathsf{w}_n} = \frac{-\mathsf{k}\times\Big((2\pi i\boldsymbol{\xi})\times\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\Big) - 2\pi i\widehat{\varphi r_n}\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathsf{q}}_n}{-2\pi i\tau + \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2}\ .$$

Pretposljednji član će iščeznuti ako ga projiciramo na ravninu koja je okomita na $\boldsymbol{\xi}$; tu projekciju označimo s $P_{\boldsymbol{\xi}}$.

S druge strane imamo da je $\mathsf{div}\,\mathsf{w}_n = 0$, odnosno $\boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\mathsf{w}}_n = 0$. Na žalost, to ne vrijedi i za $\mathsf{div}\,(\varphi\mathsf{w}_n) = \nabla\varphi\cdot\mathsf{w}_n$, ali desna strana teži jako u L^2 k nuli, pa i u Fourierovom prostoru imamo:

$$2\pi\boldsymbol{\xi}\cdot\widehat{\varphi\mathsf{w}_n} \longrightarrow 0\ .$$

Dakle, nakon primjene projekcije $P_{\boldsymbol{\xi}}$ imamo:

$$\widehat{\varphi\mathsf{w}_n} = \frac{-P_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\mathsf{k}\times\Big((2\pi i\boldsymbol{\xi})\times\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\Big)\Big) + P_{\boldsymbol{\xi}}\hat{\mathsf{q}}_n}{-2\pi i\tau + \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2} + \mathsf{d}_n\ ,$$

pri čemu $\mathsf{d}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u L^2.

Stoga je (korištenjem Plancherelovog teorema)

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \nu|\nabla(\varphi\mathsf{w}_n)|^2\,dtd\mathbf{x} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2\,|(\widehat{\varphi\mathsf{w}_n})|^2 d\tau d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2 \left|\frac{P_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\mathsf{k}\times\Big((2\pi i\boldsymbol{\xi})\times\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\Big) - \hat{\mathsf{q}}_n\Big)}{-2\pi i\tau + \nu 4\pi^2\boldsymbol{\xi}^2}\right|^2 d\tau d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \nu\boldsymbol{\xi}^2 \frac{\left|P_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\mathsf{k}\times\Big((2\pi i\boldsymbol{\xi})\times\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\Big) - \hat{\mathsf{q}}_n\Big)\right|^2}{\tau^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^4} d\tau d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

Korištenjem Leme 6. pokaže se da

$$\frac{|\boldsymbol{\xi}|\hat{\mathsf{q}}_n}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^4}} \to 0$$

jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+3})$, pa ga možemo zanemariti u brojniku zadnjeg izraza, kao i imaginarnu jedinicu uz $\boldsymbol{\xi}$.

S druge strane iskoristit ćemo svojstva projekcije $P_{\boldsymbol{\eta}}$, za koju vrijedi

$$\Big|P_{\boldsymbol{\eta}}\Big(\mathsf{k}\times(\boldsymbol{\eta}\times\mathsf{a})\Big)\Big|^2 = (\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\eta})^2\Big(|\mathsf{a}|^2 - |\mathsf{a}\cdot\boldsymbol{\eta}_0|^2\Big)$$

gdje je $\boldsymbol{\eta}_0$ jedinični vektor u smjeru $\boldsymbol{\eta}$. Pri tom koristimo činjenicu da su k i $\boldsymbol{\eta}$ realni, a da je samo a kompleksan vektor. Stoga imamo :

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} \nu|\nabla(\varphi\mathsf{w}_n)|^2\,dtd\mathbf{x} = \lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} 4\pi^2\nu\boldsymbol{\xi}^2 \frac{\Big(\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}\Big)^2\Big(|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}|^2 - \Big|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\cdot\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big|^2\Big)}{\tau^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^4}\,d\tau d\boldsymbol{\xi}\ .$$

Množeći i dijeleći gornji razlomak s $(2\pi\tau)^2 + (2\pi\boldsymbol{\xi})^4$ dobijemo da je gornji limes jednak

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbf{R}^{1+3}} 4\pi^2\nu \frac{\Big(\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_0\Big)^2\Big(|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}|^2|\boldsymbol{\xi}_0|^2 - \Big|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}\cdot\boldsymbol{\xi}_0\Big|^2\Big)}{\tau_0^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}_0|^4}\,d\tau d\boldsymbol{\xi} &= 4\pi^2\nu\langle \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}, \frac{|\boldsymbol{\xi}_0|^2(\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_0)^2}{\tau_0^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}_0|^4}\varphi\overline{\varphi}\rangle \\
&\quad - 4\pi^2\nu\langle\boldsymbol{\mu}, \frac{(\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_0)^2}{\tau_0^2 + \nu^2 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}_0|^4}\varphi\overline{\varphi}\boldsymbol{\xi}_0\otimes\boldsymbol{\xi}_0\rangle.
\end{aligned}$$

Varirajući vektor $\mathsf{k}\in\mathbf{R}^3$ dobijemo traženu formulu za $\mathbf{M}$.

Q.E.D.

Napomenimo da u slučaju $\nu = 1$ formula iz iskaza teorema prelazi u

$$\int_{\mathbf{R}^{1+3}} \mathbf{M}(t,\mathbf{x})\,\phi(t,\mathbf{x})dtd\mathbf{x} = (2\pi)^4 \Big\langle \Big(\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\xi}|^2 - \boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\Big)(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}), \phi \boxtimes 1\Big\rangle,$$

što je formula dobivena za stacionarni model u [T3] (do na multiplikativnu konstantu $(2\pi)^4$), s tim što se integracija provodi samo po $\mathbf{R}^3$.

IV. Poopćene H-mjere

1. Postojanje poopćenih H-mjera

Na kraju ovog rada htio bih iznijeti ostale mogućnosti poopćenja H-mjera s ciljem njihovih primjena na zadaće koje u sebi sadrže općenite vrste odnosa među raznim varijablama. Pri tom prvenstveno mislim na omjere između reda derivacije po vremenskoj i prostornim varijablama, različitim od 1:1 (hiperboličke zadaće), odnosno 1:2 (paraboličke zadaće). Analogno konstrukciji paraboličke varijante, novouvedene mjere bile bi definirane na skupu $\mathbf{R}^{1+d} \times \Sigma$, gdje je Σ glatka razinska hiperploha u $\mathbf{R}^{1+d}$ definirana kao

$$\Sigma = \Sigma_{r,s} := \{(\tau, \boldsymbol{\xi}) : (2\pi\tau)^r + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^s = 1\}. \tag{1}$$

Pri tom su r i s prirodni brojevi, pri čemu $r : s$ predstavlja omjer između reda derivacije po vremenskoj i prostornim varijablama. Zbog dodatnog zahtjeva na kompaktnost skupa Σ pretpostavljamo da su r i s parni. Također, budući da izbor odgovarajućeg poopćenja ovisi samo o omjeru $r : s$, pretpostavit ćemo da je 2 jedini zajednički faktor brojeva r i s. U slučaju $r = s$ skup $\Sigma = \mathrm{S}^d$, dok je za $2r = s$ skup $\Sigma = \mathrm{P}^d$.

Pri tom se skup $\mathbf{R}^{1+d}_*$ projicira na Σ duž krivulja oblika $\tau^r = |\boldsymbol{\xi}|^s$ koje pokrivaju cijeli prostor (zrake u hiperboličkom, odnosno parabole u paraboličkom slučaju). S druge strane, funkcije definirane na Σ se proširuju na $\mathbf{R}^{1+d}_*$ kao konstante duž tih krivulja.

Za dokaz egzistencije poopćenih mjera, trebat će nam i odgovarajuća inačica prve komutacijske leme. U dosad razmatranim slučajevima dokaz prve komutacijske leme se temeljio na nejednakostima geometrijskog tipa:

$$|\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}| \leq 2\frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|}$$

u hiperboličkom, odnosno na nejednakosti

$$|(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) - (\sigma_0, \boldsymbol{\eta}_0)| < C\frac{|(\tau, \boldsymbol{\xi}) - (\sigma, \boldsymbol{\eta})|}{\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \rho(\sigma, \boldsymbol{\eta})}$$

u paraboličkom slučaju. Dok se prva gornja nejednakost dokazuje relativno jednostavno, dokaz druge se zasniva na razmatranje niza podslučaja koji se moraju posebno tretirati (vidi Dodatak). Stoga pretpostavljamo da bi općenitu nejednakost, primjenjivu za proizvoljno gore opisano poopćenje bilo teško dokazati.

Međutim, u ovom trenutku možemo iskoristiti opći oblik prve komutacijske leme (neobjavljen rezultat Luc Tartara) čiji iskaz (i dokaz) ne ovisi direktno o vrsti izabranog proširenja. U tu svrhu, analogno kao u trećem poglavlju definirat ćemo dvije vrste operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Operator množenja s $b \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, označen B, je omeđen operator s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$:

$$(Bu)(\mathbf{x}) := b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \ , \tag{2}$$

s normom jednakom $\|b\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}$. Također, funkciji $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ možemo pridružiti linearni operator definiran sljedećom relacijom preko Fourierove pretvorbe:

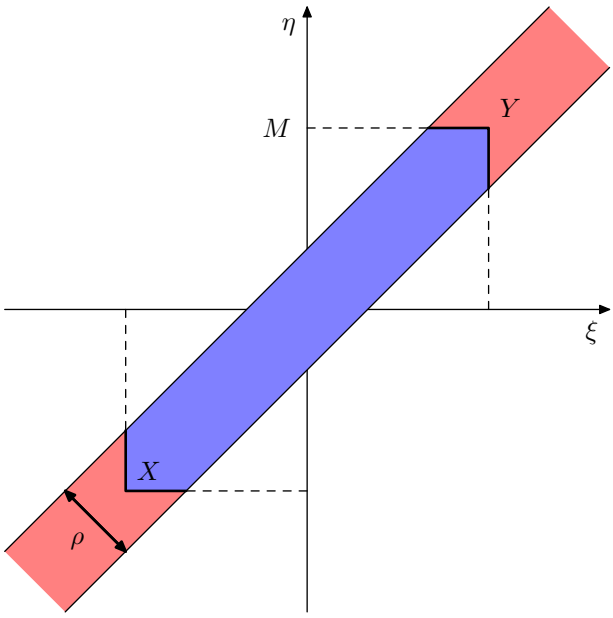
$$\mathcal{F}(Au) = a\hat{u} \ . \tag{3}$$

Kako je Fourierova pretvorba izometrija na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, to je $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d); \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$ norma operatora A jednaka $\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}$.

Za dane $M, \rho \in \mathbf{R}^+$ definirat ćemo skup

$$Y = Y(M, \rho) = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{R}^{2d} : |\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}| \geqslant M \ \& \ |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \leqslant \rho\} \ , \tag{4}$$

skiciran na Slici 10.



Slika 10. Skice skupova korištenih u dokazu općeg oblika prve komutacijske leme

Sad možemo pristupiti dokazu općeg oblika prve komutacijske leme.

Lema 1. (opći oblik prve komutacijske leme) *Ako je* $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ *i* $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *zadovoljava uvjet*

$$(\forall\, \rho, \varepsilon \in \mathbf{R}^+)(\exists\, M \in \mathbf{R}^+) \quad |a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta})| \leqslant \varepsilon \ \ (\text{ss } (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in Y(M, \rho)) \ , \tag{5}$$

tada je $C := [A, B]$ *kompaktan operator na* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$*, pri čemu su operatori* A *i* B*, te skup* Y *definirani relacijama (2) - (4).*

Dem. **I.** Prepostavimo dodatno da $\hat{b}$ ima kompaktan nosač, te da je $|\operatorname{supp} \hat{b}| \leqslant \rho \in \mathbf{R}^+$. Za $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ tad imamo

$$\widehat{Cu}(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})(\hat{b} * u)(\boldsymbol{\xi}) - \Big(\hat{b} * (a\hat{u})\Big)(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} \ ,$$

gdje je $k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta}))\hat{b}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})$. Po pretpostavci, za ρ određen s $\operatorname{supp} \hat{b}$ i proizvoljno mali $\varepsilon > 0$ možemo naći M takav da vrijedi nejednakost (5). Označimo s X komplement skupa Y na dijagonalnoj pruzi ρ (Slika 10). Nadalje, napravimo dekompoziciju $C = D + E$, gdje je

$$\widehat{Du}(\boldsymbol{\xi}) = \int_X k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta}$$
$$\widehat{Eu}(\boldsymbol{\xi}) = \int_Y k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} \ .$$

Kako je X omeđen skup, $\widehat{D\cdot}$ je integralni operator s omeđenom i kompaktno nošenom jezgrom, te stoga i Hilbert-Schmidtov operator. Kako je $\mathcal{F}$ izometrija, to je i D također Hilbert-Schmidtov operator, posebno kompaktan.

S druge strane, na skupu Y vrijedi da je $|k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})| \leqslant \varepsilon|\hat{b}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|$, što kao posljedicu primjenom Youngove nejednakosti ima da je $\|\widehat{Eu}\|_2 \leq \varepsilon\|\hat{b}\|_1\|\hat{u}\|_2$ za $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Kako je $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ gust u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, to primjenom Plancherelovog teorema imamo ocjenu na operatorsku nomu $\|E\| \leq \varepsilon\|\hat{b}\|_1$.

Uzimajući niz brojeva $\varepsilon \longrightarrow 0$, možemo C dobiti kao limes (u topologiji operatorske norme) niza Hilbert-Schmidtovih (posebno kompatnih) operatora, zbog čega je i C kompaktan.

II. Ukoliko je b proizvoljna funkcija iz $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, operator C je omeđen, s normom manjom (ili jednakom) od $2\|a\|_\infty\|b\|_\infty$. Posebno, ako $b_m \longrightarrow b$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$,tada niz operatora $C_m := [A, B_m]$ konvergira u operatorskoj (uniformnoj) topologiji k C. Stoga će i C biti kompaktan operator, ako su to operatori C_m.

Međutim, proizvoljni $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ možemo aproksimirati nizom funkcija b_m sa svojstvom da njihova Fourierova pretvorba ima kompaktan nosač (vidi dokaz Leme III.2), te primjenom I. dijela dokaza, dobiti niz kompaktnih operatora C_m koji konvergiraju k C.

Q.E.D.

Sljedeća lema nam govori kako možemo proširiti funkciju a s glatke plohe Σ na $\mathbf{R}^d_*$, pa da dobiveno proširenje zadovoljava uvjet (5).

Lema 2. *Neka je $\pi : \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \longrightarrow \Sigma$ glatka projekcija na glatku kompaktnu plohu Σ, takva da $\|\nabla\pi(\boldsymbol{\xi})\| \longrightarrow 0$ za $|\boldsymbol{\xi}| \longrightarrow \infty$, te $a \in \mathrm{C}(\Sigma)$. Tada proširenje funkcije a definirano s $\tilde{a}(\boldsymbol{\xi}) = a\left(\pi(\boldsymbol{\xi})\right)$ zadovoljava (5).*

Dem. Označimo li s C konstantu određenu uniformnom neprekidnosti funkcije a na kompaktu Σ imamo:

$$\Big|\tilde{a}(\boldsymbol{\xi}) - \tilde{a}(\boldsymbol{\eta})\Big| = \Big|a(\pi(\boldsymbol{\xi})) - a(\pi(\boldsymbol{\eta}))\Big| \leqslant C\Big|\pi(\boldsymbol{\xi}) - \pi(\boldsymbol{\eta})\Big| \leqslant C|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}| \sup_{\boldsymbol{\zeta}\in[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]} |\nabla\pi(\boldsymbol{\zeta})| \ ,$$

pri čemu je zadnja nejednakost posljedica Teorema srednje vrijednosti za projekciju π.

Zbog pretpostavke na normu $\nabla\pi$ možemo za dani $\varepsilon, \rho > 0$ naći $M > \rho$ dovoljno velik takav da je za $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \in Y(M,\rho)$ desna strana zadnje nejednakosti omeđena s ε.

Q.E.D.

Provjerimo primjenjivost gornjeg rezultata na dva dosad razmatrana primjera: originalne i paraboličke H-mjere. U oba slučaja imamo neprekidnu funkciju a definiranu na glatkoj kompaktnoj plohi Σ (S^{d-1} ili P^{d-1}), proširenu na $\mathbf{R}^d_*$ uzduž krivulja koje presijecaju Σ i pokrivaju cijeli prostor (zrake u hiperboličkom, odnosno parabole u paraboličkom slučaju). Ostaje jedino pokazati da odgovarajuće projekcije π zadovoljavaju uvjete Leme 2. Direktnim računom se lako pokaže da je $\|\nabla\pi(\boldsymbol{\xi})\| \leqslant 1/|\boldsymbol{\xi}|$ u prvom slučaju, te $\|\nabla\pi(\tau,\boldsymbol{\xi})\| \leqslant c/\rho(\tau,\boldsymbol{\xi})$ u drugom (za neki $c \in \mathbf{R}^+$).

Analogno kao i u drugom odjeljku, sad se dokazuje teorem egzistencije za poopćene H-mjere.

Teorem 1. (postojanje poopćenih H-mjera) *Neka je (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, takav da $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} 0$ (slabo). Tada postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i $r \times r$ kompleksna matrična Radonova mjera $\boldsymbol{\mu}$ na $\mathbf{R}^d \times \Sigma$ takva da je za svaki izbor funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\Sigma)$*

$$\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}\Big(\varphi_1\mathsf{u}_{n'}\Big) \otimes \mathcal{F}\Big(\varphi_2\mathsf{u}_{n'}\Big)(\psi\circ\pi)\, d\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\mu}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d\times\Sigma} \varphi_1(\mathbf{x})\bar{\varphi}_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \ .$$

∎

Mjeru $\boldsymbol{\mu}$ iz gornjeg teorema nazivamo (Σ) *poopćenom H-mjerom* pridruženom podnizu $(\mathsf{u}_{n'})$.

Direktna posljedica gornjeg teorema je sljedeći rezultat.

Korolar 1. *Poopćena H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ je nenegativna, odnosno za svaku vektorsku funkciju $\boldsymbol{\phi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ mjera $\boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}$ je (pozitivna) Radonova mjera na $\mathbf{R}^d \times \Sigma$.* ∎

Također sljedeće svojstvo lokalizacije proizlazi direktno iz definicije.

Korolar 2. *Neka je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera određena (pod)nizom $(\mathsf{u}_{n'})$. Ukoliko sve komponente $\mathsf{u}_{n'} \cdot \mathsf{e}_i$ imaju redom nosače u zatvorenim skupovima $K_i \subseteq \mathbf{R}^d$, tada nosač komponente $\boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j$ je sadržan u $(K_i \cap K_j) \times \Sigma$.* ∎

Poopćene H-mjere se mogu koristiti i za izražavanje slabo $*$ limesa kvadratnih veličina.

Korolar 3. *Ako za niz funkcija $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ vrijedi da $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n$ konvergira slabo $*$ (vague) k mjeri $\boldsymbol{\nu}$, tada je za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \boxtimes 1 \rangle \ ,$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ poopćena H-mjera pridružena (pod)nizu (u_n). ∎

2. Lokalizacijsko svojstvo i primjeri

Napomenimo da je egzistencija poopćenih H-mjera dokazana za proizvoljnu glatku kompaktnu plohu Σ, te proizvoljnu pripadnu glatku projekciju π. U sljedećem koraku želimo iskazati i lokalizacijsko svojstvo za poopćene mjere. Međutim za njegov iskaz (i dokaz) moramo se ograničiti na plohe $\Sigma_{r,s}$ oblika (1) i pripadne projekcije na $\Sigma_{r,s}$ oblika

$$\pi_{r,s}(\tau, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\tau}{\sqrt[r]{(2\pi\tau)^r + (2\pi\boldsymbol{\xi})^s}}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt[s]{(2\pi\tau)^r + (2\pi\boldsymbol{\xi})^s}} \right).$$

Lagano se provjeri da projekcije $\pi_{r,s}$ zadovoljavaju uvjete Leme 2, odnosno da za funkciju $a \in \mathrm{C}(\Sigma_{r,s})$ njeno proširenje definirano s $\tilde{a}(\boldsymbol{\xi}) = a\,(\pi_{r,s}(\boldsymbol{\xi}))$ zadovoljava uvjete prve komutacijske leme.

Analogno kao i za paraboličku inačicu u tom slučaju se dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 2. (Lokalizacijsko svojstvo za poopćene H-mjere) *Neka je (u_n) niz funkcija s nosačima sadržanim u fiksnom kompaktnom skupu koji konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^p)$, te neka*

$$\partial_t^{(qr)}(\mathsf{b} \cdot \mathsf{u}_n) + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=qs \\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d}} \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathsf{u}_n) \to 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^{-qr,-qs}(\mathbf{R}^{1+d}) \ , \tag{6}$$

gdje je $q \in \mathbf{Q}$ takav da je $qs \in \mathbf{N}$, $\mathsf{b} \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^p)$ dok je s $\mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}$ označen niz vektorskih funkcija iz prostora $\mathrm{C}(\mathbf{R}^{1+d}; \mathbf{C}^p)$. Tada za poopćenu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ definiranu na $\mathbf{R}^{1+d} \times \Sigma_{r,s}$ pridruženu nizu (u_n) vrijedi da je

$$\boldsymbol{\mu}^\top \left((2\pi i\tau)^{(qr)}\, \mathsf{b} + \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=qs \\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d}} (2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{a}_{\boldsymbol{\alpha}} \right) = 0.$$

∎

Pri tom je

$$\mathrm{H}^{-qr,-qs}(\mathbf{R}^{1+d}) := \{u \in \mathcal{S}' : \Big(1 + (2\pi\tau)^r + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^s\Big)^{-q} \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})\}$$

Hilbertov prosotor sa skalarnim produktom definiranim relacijom

$$\langle\, u \mid v \,\rangle := \Big\langle \Big(1 + (2\pi\tau)^r + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^s\Big)^{-q} \hat{u} \mid \Big(1 + (2\pi\tau)^r + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^s\Big)^{-q} \hat{v} \Big\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})}.$$

Kao i dosad, koncentracijski i titrajući nizovi će biti čisti, te će nosač pripadne H-mjere biti nošen na polovima, ekvatoru ili pak cijeloj plohi Σ, ovisno o obliku promatrane višeskalne zadaće.

Primjer 1. (Titranje) Neka je $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ periodična funkcija s jediničnim periodom (radi jednostavnosti) u svakoj od varijabla. Stoga je možemo zapisati u obliku

$$v(t, \mathbf{x}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}} e^{2\pi i(\omega t + \mathsf{k}\cdot\mathbf{x})} \ ,$$

gdje su s $\hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}$ označeni Fourierovi koeficijenti funkcije v, te pri tom pretpostavljamo da je $\hat{v}_{0,0} = 0$.

Za brojeve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, definiramo niz perodičnih funkcija koji teži slabo prema 0 u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$:

$$u_n(t, \mathbf{x}) = v(n^\alpha t, n^\beta \mathbf{x}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \hat{v}_{\omega,\mathsf{k}} e^{2\pi i(n^\alpha \omega t + n^\beta \mathsf{k}\cdot\mathbf{x})} \ .$$

Definiran niz (u_n) je čist, s pripadnom $\Sigma_{r,s}$ poopćenom H-mjerom

$$\mu(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{(\omega,\mathsf{k})\in\mathbf{Z}^{1+d}} \Big|\hat{v}_{\omega,\mathsf{k}}\Big|^2 \lambda(t, \mathbf{x}) \begin{cases} \delta_{(\frac{\omega}{|\omega|},0)}(\tau, \boldsymbol{\xi}), & \alpha > \frac{s}{r}\beta \\ \delta_{(0,\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|})}(\tau, \boldsymbol{\xi}), & \alpha < \frac{s}{r}\beta \\ \delta_{(\pi_{r,s}(\omega,\mathsf{k}))}(\tau, \boldsymbol{\xi}), & \alpha = \frac{s}{r}\beta. \end{cases}$$

∎

Primjer 2. (Koncentracija) Za zadanu funkciju $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{1+d})$ i brojeve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ definiramo niz funkcija

$$u_n(t, \mathbf{x}) = n^{\alpha+\beta d} v(n^{2\alpha} t, n^{2\beta} \mathbf{x}).$$

Uvedeni niz je također čist s pripadnom $\Sigma_{r,s}$ poopćenom H-mjerom

$$\mu(t, \mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma, \boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{(\frac{\sigma}{|\sigma|},0)}(\tau, \boldsymbol{\xi}) \delta_{(0,0)}(t, \mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha > \frac{s}{r}\beta \\ \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma, \boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{(0,\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|})}(\tau, \boldsymbol{\xi}) \delta_{(0,0)}(t, \mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha < \frac{s}{r}\beta \\ \int_{\mathbf{R}^{1+d}} |\hat{v}(\sigma, \boldsymbol{\eta})|^2 \delta_{(\pi_{r,s}(\sigma,\boldsymbol{\eta}))}(\tau, \boldsymbol{\xi}) \delta_{(0,0)}(t, \mathbf{x})\, d\sigma d\boldsymbol{\eta}, & \alpha = \frac{s}{r}\beta. \end{cases}$$

∎

Vidimo da će za proučavanje višeskalne zadaće određene koeficijentima α i β biti prikladna upravo poopćena H-mjera definirana na $\Sigma_{r,s}$, pri čemu je $r\alpha = s\beta$, budući da u tom slučaju nosač poopćene H-mjere nije restringiran na ekvator, odnosno na polove plohe $\Sigma_{r,s}$. Stoga možemo zaključiti da se uz odgovarajući izbor poopćenja pomoću H-mjera mogu proučavati višeskalne zadaće raznih oblika. Pri tom sam se u ovom radu koncentrirao na paraboličke zadaće, uzimajući to samo kao primjer za uvedena poopćenja.

3. Zaključak

U ovom radu polazim od primjene originalnih H-mjera, kako su ih definirali Tartar [T3] i Gérard [G1], na jednadžbe paraboličkog tipa. Pri tom za pojedinu jednadžbu promatram niz zadaća određenih nizom početnih uvjeta, odnosno nizom nehomogenih članova. Cilj je bio dobiti relaciju kojom bismo izrazili H-mjeru pridruženu nizu (gradijenata) rješenja preko zadanih podataka, analogno onom što je napravljeno za valnu (hiperboličku) jednadžbu. Međutim, dobiveni rezultati nisu ispunili taj cilj u potpunosti, i to je bila motivacija za uvođenje nove, paraboličke varijante H-mjera koje bi bila bolje prilagođena paraboličkim zadaćama.

Uzrok neadekvatnih rezultata sam tražio u neodgovarajućem skaliranju dualne varijable u definiciji H-mjera ($\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$). Stoga je za novu varijantu skaliranje dualne varijable definirano na način koji bolje reflektira razliku između vremenske i prostornih varijabli prisutne u paraboličkim jednadžbama. Analogno originalnim H-mjerama, za paraboličke H-mjere vrijedi niz svojstava koja proizlaze iz same definicije, kao i lokalizacijsko svojstvo koje je primjenjivo na općenite jednadžbe u kojima je omjer reda vremenske i prostorne derivacije 1:2.

Primjenom nove varijante na homogenu jednadžbu provođenja s varijabilnim koeficijentima dobije se da je pripadna mjera pridružena nizu gradijenata rješenja (∇u_n) trivijalna. Taj rezultat jednak je onom dobivenim primjenom originalnih H-mjera i proizlazi iz same naravi jednadžbe koja ne dozvoljava širenje početnih poremećaja. Kao posljedicu imamo da niz (∇u_n) konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$, što je poopćenje rezultata poznatog u slučaju konstantnih koeficijenata.

Prilikom primjene na nehomogenu jednadžbu provođenja uspjeli smo u potpunosti opisati nepoznatu paraboličku H-mjeru pridruženu nizu gradijenata rješenja preko desne strane, odnosno pripadne paraboličke H-mjere. Time je u tom slučaju ispunjen cilj kojeg smo imali prilikom uvođenja nove variajnte.

Kod razmatranja Schrödingerove jednadžbe, originalne H-mjere su bile nošene isključivo u polovima. Nasuprot tomu, nova varijanta je nošena na cijeloj južnoj polutki domene P^d (osim samog pola), te je pri tom sačuvala smjer širenja poremećaja određen početnim uvjetima. To nam je omogućilo konstrukciju nepoznate mjere direktno preko početnih podataka, odnosno preko njima pridružene paraboličke H-mjere. Razlog izostanka antipodalne simetričnosti nalazi se u imaginarnoj jedinici prisutnoj u Schrödingerovoj jednadžbi, odnosno kompleksnosti pripadnog rješenja.

Sličan rezultat smo dobili i za jednadžbu ploče, čije rješenje možemo gledati kao kombinaciju rješenja dviju zadaća za Schrödingerovu jednadžbu. Razlika je u tom, što je pripadna mjera sad antipodalno simetrična i nošena na cijeloj domeni P^d (osim polova).

Nova varijanta je omogućila i poopćenje homogenizacijskih rezultata dobivenih primjenom originalnih H-mjera na model temeljen na stacionarnom Stokesovu sustavu [T3]. Njenom primjenom na nestacionarni model izrazili smo pripadni homogenizacijski član direktno preko koeficijenata jednadžbe i na taj način izbjegli potrebu konstrukcije niza pomoćnih zadaća.

Na temelju navedenih primjera i dobivenih rezultata možemo zaključiti da je uvođenje nove varijante bilo opravdano. Dobivene mjere su nošene izvan točaka oblika $\boldsymbol{\xi} = 0$, a na nosaču vrijede izrazi koji ih povezuju sa zadanim podacima za promatranu zadaću, kao što je to bio slučaj s originalnim H-mjerama i hiperboličkim zadaćama. Pri tom račun s paraboličkim H-mjerama nije bitno složeniji nego što je to bio s originalnim H-mjerama.

Na kraju je prikazano i općenito poopćenje H-mjera prilagođeno zadaćama koje u sebi sadrže proizvoljne vrste odnosa među raznim varijablama. I za njih se dokazuje niz

svojstava koja proizlaze iz same definicije, kao i lokalizacijsko svojstvo. Na primjerima mjera pridruženim koncentracijskim, odnosno titrajućim nizovima vidi se da su uvedena poopćenja podesna za proučavanje višeskalnih zadaća raznih oblika. S njima na odgovarajući način možemo tretirati široku klasu jednadžbi, a odgovarajući izbor poopćenja ovisit će o vrsti razmatrane jednadžbe.

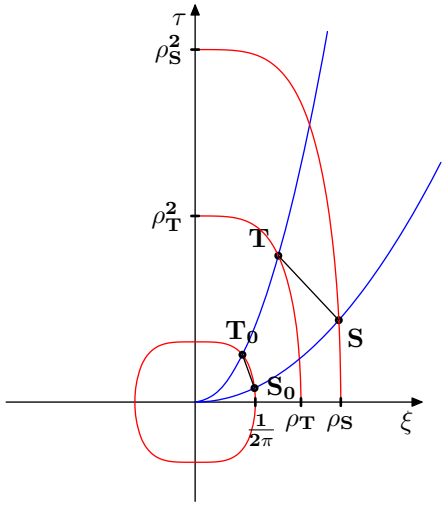
Dodatak

Dokaz Leme III.1

Lema 1. *Neka su $T = (\tau, \boldsymbol{\xi})$ i $S = (\sigma, \boldsymbol{\eta})$ točke iz $\mathbf{R}_*^{1+d}$, sa svojstvom da su skalari $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}), \rho(\sigma, \boldsymbol{\eta})$ veći od 1. Tada one zadovoljavaju nejednakost*

$$|(\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) - (\sigma_0, \boldsymbol{\eta}_0)| < C \frac{|(\tau, \boldsymbol{\xi}) - (\sigma, \boldsymbol{\eta})|}{\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \rho(\sigma, \boldsymbol{\eta})}, \tag{1}$$

pri čemu su s $T_0 = (\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0)$ i $S_0 = (\sigma_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ označene njihove paraboličke projekcije na P^d, dok je C pozitivna konstanta (Slika 11).



Slika 11. Prikaz varijabli u nejednakosti (1).

Dem. Prije nego što započnemo sa samim dokazom leme, uvedimo pokrate $r = \rho(T), s = \rho(S)$. Točke T i S možemo tada zapisati kao $T = (r^2\tau_0, r\boldsymbol{\xi}_0), S = (s^2\sigma_0, s\boldsymbol{\eta}_0)$. Nadalje, neka točke T i T_0 leže na plohi (paraboloidu) $\tau = a\boldsymbol{\xi}^2$, a točke S i S_0 na plohi (paraboloidu) $\tau = b\boldsymbol{\xi}^2$, za neke $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. Koordinate točaka T_0 i S_0 možemo tada zapisati i kao

$$\tau_0 = \frac{a}{\sqrt{(2\pi a)^2 + (2\pi)^4}}, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}| \sqrt[4]{(2\pi a)^2 + (2\pi)^4}},$$

te

$$\sigma_0 = \frac{b}{\sqrt{(2\pi b)^2 + (2\pi)^4}}, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}| \sqrt[4]{(2\pi b)^2 + (2\pi)^4}}.$$

Zbog simetrije nejednakosti (1) s obzirom na točke T i S, bez smanjenja općenitosti možemo prepostaviti da je $|a| \geqslant |b|$, što povlači da je $|\tau_0| \geqslant |\sigma_0|$, te $|\boldsymbol{\xi}_0| \leqslant |\boldsymbol{\eta}_0|$.

Dokaz leme podijelit ćemo u tri dijela.

I. $(d = 1,\ \operatorname{sign}\xi \neq -\operatorname{sign}\eta,\ \operatorname{sign}\tau \neq -\operatorname{sign}\sigma)$

Koristeći simetriju s obzirom na koordinatne osi možemo pretpostaviti da su $\tau, \sigma, \xi, \eta \in \mathbf{R}_0^+$. U tom slučaju je za $a = b$ nejednakost (1) trivijalna ($T_0 = S_0$), pa stoga u daljnjem uzimamo $a > b$.

Ovaj dio dokaza zasniva se na nejednakosti analognoj (1) koja vrijedi za paraboličko skaliranje na plohu $2\pi\tau + (2\pi\xi)^2 = 1$. Točnije, najprije ćemo pokazati da je

$$|\tilde{T}_0\tilde{S}_0| < \tilde{C}\frac{|(\tau,\xi) - (\sigma,\eta)|}{\tilde{\rho}(\tau,\xi) + \tilde{\rho}(\sigma,\eta)}, \tag{2}$$

gdje je za $T = (\tau,\xi) \in \mathbf{R}^{1+1}$, točka $\tilde{T}_0$ definirana kao parabolička projekcija točke T na plohu $2\pi\tau + (2\pi\xi)^2 = 1$, odnosno

$$\tilde{T}_0 = (\tilde{\tau}_0, \tilde{\xi}_0) := \left(\frac{\tau}{2\pi\tau + (2\pi\xi)^2}, \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau + (2\pi\xi)^2}}\right) = \left(\frac{\tau}{\tilde{\rho}^2(\tau,\xi)}, \frac{\xi}{\tilde{\rho}(\tau,\xi)}\right),$$

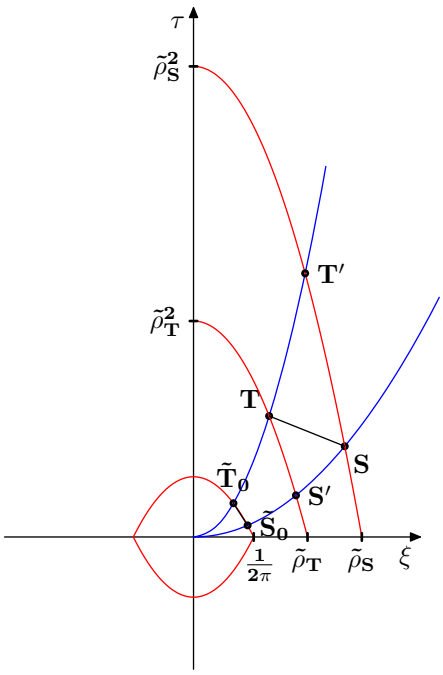
pri čemu je $\tilde{\rho}(\tau,\xi) := \sqrt{2\pi\tau + (2\pi\xi)^2}$. Koristeći parametre a i b koordinate točaka $\tilde{T}_0$ i $\tilde{S}_0$ možemo zapisati i kao

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{a}{(2\pi a) + (2\pi)^2}, \quad \tilde{\xi}_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi a) + (2\pi)^2}},$$

odnosno

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{b}{(2\pi b) + (2\pi)^2}, \quad \tilde{\eta}_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi b) + (2\pi)^2}}.$$

Nadalje, označimo s T' točku na presjeku krivulja $\tau = a\xi^2$ i $2\pi\tau + (2\pi\xi)^2 = \tilde{\rho}(T)$. Analogno, točka S' leži na presjeku parabola $\tau = b\xi^2$ i $2\pi\tau + (2\pi\xi)^2 = \tilde{\rho}(S)$ (vidi Sliku 12).



Slika 12. Prikaz varijabli u nejednakosti (2).

U daljnjem ćemo koristiti pokrate $\tilde{r} = \tilde{\rho}(T), s = \tilde{\rho}(S)$. Koordinate uvedenih točaka možemo sad zapisati kao

$$T' = (\tilde{s}^2\tilde{\tau}_0, \tilde{s}\tilde{\xi}_0) \quad S' = (\tilde{r}^2\tilde{\sigma}_0, \tilde{r}\tilde{\eta}_0),$$

dok je

$$T = (\tilde{r}^2\tilde{\tau}_0, \tilde{r}\tilde{\xi}_0), \quad S = (\tilde{s}^2\tilde{\sigma}_0, \tilde{s}\tilde{\eta}_0).$$

Stoga je na osnovu nejednakosti trokuta

$$(\tilde{r} + \tilde{s})|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi = |TS'|_\xi + |ST'|_\xi \leqslant |TS|_\xi + |T'S'|_\xi, \tag{3}$$

te analogno

$$(\tilde{r}^2 + \tilde{s}^2)|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau = |TS'|_\tau + |ST'|_\tau \leqslant |TS|_\tau + |T'S'|_\tau.$$

U slučaju $\tilde{r} = \tilde{s}$, vrijedi da je $T' = T$ i $S' = S$, pa je na osnovu gornjih izraza nejednakost (2) dokazana.

Pretpostavimo sad da je $\tilde{r} < \tilde{s}$. U tom slučaju se lako provjeri da je $|T'S'|_\xi \leqslant |TS|_\xi$, iz čega na osnovu relacije (3) slijedi da je $|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi \leqslant \frac{2|TS|}{\tilde{r}+\tilde{s}}$. Analognu ocjenu za τ komponentu ne možemo dobiti, jer $|TS|_\tau$ može iščezavati za $|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau \neq 0$. Međutim, točke T_0 i S_0 se nalaze na plohi $2\pi\tau + (2\pi\xi)^2 = 1$, odnosno na grafu glatke funkcije $\tau = f(\xi) = \frac{1-(2\pi\xi)^2}{2\pi}$, te po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti imamo da je

$$\tilde{\tau}_0 - \tilde{\sigma}_0 = f'(c)(\tilde{\xi}_0 - \tilde{\eta}_0)$$

za neki $c \in [0, \frac{1}{2\pi}]$. Stoga je

$$|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau \leqslant |f'(c)||\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi \leqslant 2(2\pi)|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi,$$

što povlači da je

$$(\tilde{r} + \tilde{s})^2|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|^2 = (\tilde{r} + \tilde{s})^2\left(|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau^2 + |\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi^2\right) \leqslant (\tilde{r} + \tilde{s})^2(4(2\pi)^2 + 1)|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi^2 \leqslant 26^2|TS|^2$$

čime je nejednakost u ovom slučaju dokazana.

Razmotrimo sad slučaj $\tilde{r} > \tilde{s}$. Opet se lagano provjeri da je $|T'S'|_\tau \leqslant |TS|_\tau$, odnosno $|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau \leqslant \frac{2|TS|}{\tilde{r}^2+\tilde{s}^2} \leqslant \frac{2|TS|}{\tilde{r}+\tilde{s}}$. Ostaje dokazati nejednakost za ξ komponentu. Na žalost, ne možemo se poslužiti trikom s Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti, odnosno s jednakosti $|\tilde{T}_0, \tilde{S}_0|_\xi = \frac{1}{|f'(c)|}|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau$ za $c \in [0, \frac{1}{2\pi}]$, zbog toga što f' iščezava u 0.

Međutim, kako uzduž parabola τ komponenta raste kvadratno, a ξ linearno, očekujemo da će prva dominirati, odnosno da će ocjena $|T'S'|_\tau \leqslant |TS|_\tau$ povlačiti da je

$$|T'S'| \leqslant |TS|. \tag{4}$$

Zadnja nejednakost je ekvivalentna s

$$(\tilde{s}\tilde{\xi}_0 - \tilde{r}\tilde{\eta}_0)^2 + (\tilde{s}^2\tilde{\tau}_0 - \tilde{r}^2\tilde{\sigma}_0)^2 \leqslant (\tilde{r}\tilde{\xi}_0 - \tilde{s}\tilde{\eta}_0)^2 + (\tilde{r}^2\tilde{\tau}_0 - \tilde{s}^2\tilde{\sigma}_0)^2,$$

odnosno

$$(\tilde{r}^2 - \tilde{s}^2)\tilde{\eta}_0^2 + (\tilde{r}^4 - \tilde{s}^4)\tilde{\sigma}_0^2 \leqslant (\tilde{r}^2 - \tilde{s}^2)\tilde{\xi}_0^2 + (\tilde{r}^4 - \tilde{s}^4)\tilde{\tau}_0^2.$$

Kako je po pretpostavci $\tilde{r} > \tilde{s}$, te $\tilde{\sigma}_0 = \frac{1-(2\pi\tilde{\eta}_0)^2}{2\pi}, \tilde{\tau}_0 = \frac{1-(2\pi\tilde{\xi}_0)^2}{2\pi}$, to zadnja nejednakost prelazi u

$$\tilde{\eta}_0^2 + (\tilde{r}^2 + \tilde{s}^2)\left(\frac{1-(2\pi\tilde{\eta}_0)^2}{2\pi}\right)^2 \leqslant \tilde{\xi}_0^2 + (\tilde{r}^2 + \tilde{s}^2)\left(\frac{1-(2\pi\tilde{\xi}_0)^2}{2\pi}\right)^2,$$

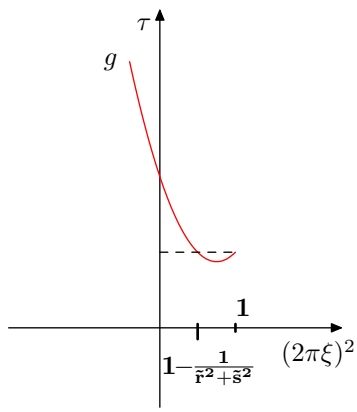
pa je nejednakost (4) ekvivalentna opadanju funkcije

$$\begin{aligned} g\left((2\pi\xi)^2\right) &= \xi^2 + (\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)\left(\frac{1-(2\pi\xi)^2}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\left((\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)(2\pi\xi)^4 - (2(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)-1)(2\pi\xi)^2 + (\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)\right). \end{aligned}$$

Kako je graf funkcije g parabola s tjemenom u $1-\frac{1}{2(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)}$, to je ona opadajuća na intervalu $[0, 1-\frac{1}{2(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)}]$ (Slika 13). Štoviše za $(2\pi\xi)^2 \leqslant 1-\frac{1}{(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)}$, vrijedi da je $g\left((2\pi\xi)^2\right) \geqslant g\left((2\pi\eta)^2\right)$ za svaki $\eta \in [\xi, \frac{1}{2\pi}]1$. Kako je za $\tilde{r}, \tilde{s} \geqslant 1$ veličina $1-\frac{1}{(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)}$ veća od $\frac{1}{2}$, to je

$$(\tilde{r}+\tilde{s})|\tilde{T}_0\tilde{S}_0| \leqslant |TS| + |T'S'| \leqslant 2|TS|$$

čime je nejednakost (1) u ovom slučaju dokazana za $(2\pi\tilde{\xi}_0)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.



Slika 13. Graf funkcije g.

Za vrijednosti $\tilde{\xi}_0$ veće od $\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}$, možemo se opet poslužti trikom s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti (primijetimo da smo izbacili kritični dio $\tilde{\xi}_0 \sim 0$). Stoga je za neki $c \in [\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}, 1]$

$$|\tilde{T}_0, \tilde{S}_0|_\xi = \frac{1}{|f'(c)|}|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau = \frac{1}{2(2\pi)c}|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau,$$

što povlači da je

$$(\tilde{r}+\tilde{s})^2|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|^2 = (\tilde{r}+\tilde{s})^2\left(|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau^2 + |\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi^2\right) \leqslant \frac{3}{2}(\tilde{r}^2+\tilde{s}^2)^2|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau^2 \leqslant 6|TS|^2.$$

Time smo dokazali nejednakost (2) uz konstantu $\tilde{C} = 26$. Nejednakost (1) će slijediti ako pokažemo da je $|T_0S_0| \leqslant C_1|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|$, odnosno $\frac{1}{\tilde{\rho}(\tau,\xi)+\tilde{\rho}(\sigma,\eta)} \leqslant C_2\frac{1}{\rho(\tau,\xi)+\rho(\sigma,\eta)}$.

Zadnja nejednakost je ekvivalentna tome da je

(5)
$$\begin{aligned} \rho(\tau,\xi)+\rho(\sigma,\eta) &= \sqrt[4]{(2\pi\tau)^2+(2\pi|\xi|)^4} + \sqrt[4]{(2\pi\sigma)^2+(2\pi|\eta|)^4} \\ &\leqslant C_2\sqrt{(2\pi\tau)+(2\pi|\xi|)^2} + \sqrt{(2\pi\sigma)+(2\pi|\eta|)^2} = C_2\left(\tilde{\rho}(\tau,\xi)+\tilde{\rho}(\sigma,\eta)\right). \end{aligned}$$

Međutim kako je $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4 \leqslant 16(a+b)$, to je

$$\left(\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2+(2\pi|\xi|)^4}+\sqrt[4]{(2\pi\sigma)^2+(2\pi|\eta|)^4}\right)^4 \leqslant 16\left((2\pi\tau)^2+(2\pi|\xi|)^4+(2\pi\sigma)^2+(2\pi|\eta|)^4\right)$$
$$\leqslant 16\left(\sqrt{(2\pi\tau)+(2\pi|\xi|)^2}+\sqrt{(2\pi\sigma)+(2\pi|\eta|)^2}\right)^4,$$

pa nejednakost (5) vrijedi uz $C_2 = 2$.

Za dokazati preostalu nejednakost uočimo da je

$$\begin{aligned}
&C_1^2|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\tau^2 - |T_0S_0|_\tau^2 \\
&= C_1^2\left(\frac{a}{2\pi a+(2\pi)^2}-\frac{b}{2\pi b+(2\pi)^2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}-\frac{b}{\sqrt{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)^2 \\
&= \left(\left(C_1\frac{a}{2\pi a+(2\pi)^2}-\frac{a}{\sqrt{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}\right)-\left(C_1\frac{b}{2\pi b+(2\pi)^2}-\frac{b}{\sqrt{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)\right) \\
&\quad\cdot\left(\left(C_1\frac{a}{2\pi a+(2\pi)^2}+\frac{a}{\sqrt{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}\right)-\left(C_1\frac{b}{2\pi b+(2\pi)^2}+\frac{b}{\sqrt{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)\right),
\end{aligned}$$

pa nejednakost (za τ komponentu) ovisi o tome da li su funkcije $h_\pm(\xi) := C_1\frac{\xi}{2\pi\xi+(2\pi)^2} \pm \frac{\xi}{\sqrt{(2\pi\xi)^2+(2\pi)^4}}$ istovremeno rastuće, odnosno padajuće. Kako je $h'_\pm(\xi) = C_1\frac{(2\pi)^2}{(2\pi\xi+(2\pi)^2)^2} \pm \frac{(2\pi)^4}{((2\pi\xi)^2+(2\pi)^4)^{\frac{3}{2}}}$, to se lako vidi da odgovarajuća nejednakost za τ komponentu vrijedi u slučaju $C_1 = 2(2\pi)^2$.

Analogno se dokazuje i nejednakost za ξ komponentu. Naime, imamo da je

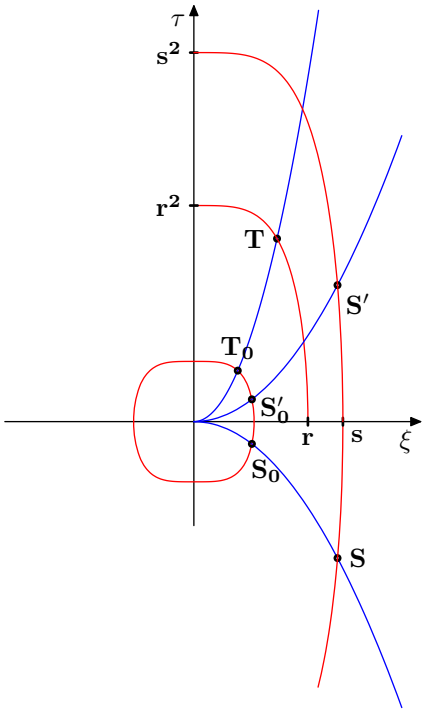
$$\begin{aligned}
&C_1^2|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi^2 - |T_0S_0|_\xi^2 \\
&= C_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a+(2\pi)^2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi b+(2\pi)^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)^2 \\
&= \left(\left(C_1\frac{1}{\sqrt{2\pi a+(2\pi)^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}\right)-\left(C_1\frac{1}{\sqrt{2\pi b+(2\pi)^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)\right) \\
&\quad\cdot\left(\left(C_1\frac{1}{\sqrt{2\pi a+(2\pi)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi a)^2+(2\pi)^4}}\right)-\left(C_1\frac{1}{\sqrt{2\pi b+(2\pi)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi b)^2+(2\pi)^4}}\right)\right).
\end{aligned}$$

U ovom slučaju moramo ispitati tok funkcija $h_\pm(\xi) := C_1\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi+(2\pi)^2}} \pm \frac{1}{\sqrt[4]{(2\pi\xi)^2+(2\pi)^4}}$. Kako je $h'_\pm(\xi) = -C_1\frac{2\pi}{2(2\pi\xi+(2\pi)^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(2\pi)^2x}{2((2\pi\xi)^2+(2\pi)^4)^{\frac{5}{4}}}$, to je također $|T_0S_0|_\xi \leqslant C_1|\tilde{T}_0\tilde{S}_0|_\xi$ za $C_1 = 2(2\pi)^2$.

Time smo završili s prvim dijelom dokaza leme, i pokazali da nejednakost (1) vrijedi uz $C = C_{\mathrm{I}} := C_1\tilde{C}C_2 = 16\pi^2 * 26$.

II. ($d = 1$, $\operatorname{sign}\xi \neq -\operatorname{sign}\eta$, $\operatorname{sign}\tau = -\operatorname{sign}\sigma$)
Koristeći simetriju s obzirom na os ξ, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\tau > 0$ i $\sigma < 0$.

Pretpostavimo nadalje da je $r < s$. Označimo sa S' i S'_0 zrcalne slike točaka S i S_0 obzirom na os ξ (Slika 14).



Slika 14. Prikaz varijabli u slučaju $\operatorname{sign}\tau = -\operatorname{sign}\sigma$.

Tvrdnju ćemo dokazati polazeći od nejednakosti trokuta $|T_0S_0| \leqslant |T_0S'_0| + |S'_0S_0|$. Na osnovu I. dijela dokaza je $|T_0S'_0| \leqslant C_{\mathrm{I}}\frac{|TS'|}{r+s} \leqslant C_{\mathrm{I}}\frac{|TS|}{r+s}$. S druge strane je za $r, s \geqslant 1$

$$|S'_0S_0| = \frac{|S'S|}{s^2} \leqslant 2\frac{|TS|}{s^2} \leqslant 4\frac{|TS|}{r^2+s^2} \leqslant 4\frac{|TS|}{r+s},$$

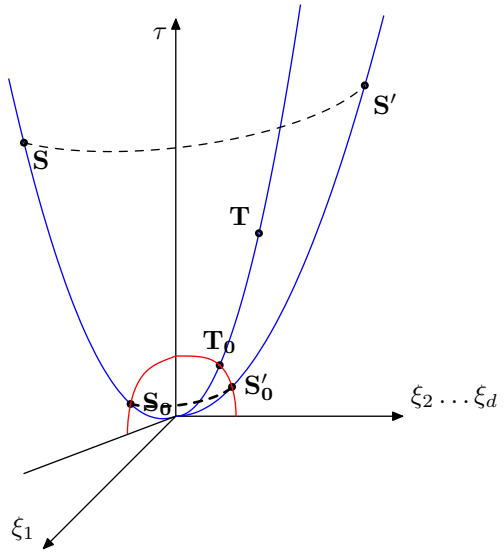
te je nejednakost (1) dokazana uz $C = C_{\mathrm{I}} + 4$.

Slučaj $r > s$ dokazuje se analogno, zrcaljenjem točaka T i T_0 obzirom na os ξ.

III. $(d \geqslant 1)$

Ukoliko su vektori $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ iste orijentacije, slučaj se svodi na prethodna dva.

U suprotnom, pretpostavimo da je $r < s$. Definirajmo zatim S' kao točku na presjeku ploha $\tau = b\boldsymbol{\xi}^2$ i $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) := \sqrt[4]{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4} = s$ sa svojstvom da je njena $\boldsymbol{\xi}$ komponenta jednake orijentacije kao i $\boldsymbol{\xi}$ komponenta točke T, odnosno $S' = (s^2\sigma_0, s\frac{|\eta|}{|\boldsymbol{\xi}_0|}\boldsymbol{\xi}_0)$ (Slika 15). Također, neka je $S'_0 = (\sigma_0, \frac{|\eta_0|}{|\boldsymbol{\xi}_0|}\boldsymbol{\xi}_0)$ njena parabolička projekcija na P^d.



Slika 15. Prikaz varijabli u slučaju $d > 1$.

U tom slučaju je

$$|S_0T_0| \leqslant |S_0S_0'| + |S_0'T_0|. \tag{6}$$

Kako je

$$|S_0S_0'| = |S_0S_0'|_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{|SS'|_{\boldsymbol{\xi}}}{s} \leqslant 2\frac{|SS'|_{\boldsymbol{\xi}}}{r+s} \leqslant 2\frac{|ST|_{\boldsymbol{\xi}} + |TS'|_{\boldsymbol{\xi}}}{r+s}.$$

Kako točke $T_{\boldsymbol{\xi}}$ i $S_{\boldsymbol{\xi}}, S'_{\boldsymbol{\xi}}$ redom leže na koncentričnim kružnicama radijusa r, odnosno s, te su pri tom $T_{\boldsymbol{\xi}}$ i $S'_{\boldsymbol{\xi}}$ iste orijentacije, to je $|TS'|_{\boldsymbol{\xi}} \leqslant |TS|_{\boldsymbol{\xi}}$, pa je

$$|S_0S_0'| \leqslant 4\frac{|ST|_{\boldsymbol{\xi}}}{r+s}. \tag{7}$$

S druge strane, točke S' i T imaju $\boldsymbol{\xi}$ komponente jednakih orijentacija, pa na njih možemo primijeniti prvi dio dokaza, po kojem je

$$|S_0'T_0| \leqslant C_{\mathrm{I}}\frac{|S'T|}{\rho(S') + \rho(T)} = C_{\mathrm{I}}\frac{|S'T|}{s+r}.$$

Kako je

$$|S'T|^2 = |S'T|_\tau^2 + |S'T|_{\boldsymbol{\xi}}^2 = |ST|_\tau^2 + |S'T|_{\boldsymbol{\xi}}^2 \leqslant |ST|_\tau^2 + |ST|_{\boldsymbol{\xi}}^2$$

to je $|S_0'T_0| \leqslant C_{\mathrm{I}}\frac{|ST|}{s+r}$, pa tvrdnja leme slijedi iz relacija (6) i (7) uz $C = C_{\mathrm{I}} + 4$.

Slučaj $r > s$ dokauje se analogno.

Q.E.D.

Oznake

Multiindeksi i geometrija na $\mathbf{R}^d$

Pri proučavanju kompleksnih funkcija definiranih na $\mathbf{R}^d$, $u : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$, koristio sam oznake koje je uveo Laurent Schwartz. *Multiindeks* je d-torka nenegativnih cijelih brojeva, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$, za koju definiramo *duljinu*

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$$

i *faktorijel*

$$\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_d! \ .$$

Na skupu $\mathbf{N}_0^d$ multiindeksa imamo parcijalan uređaj: $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ ako je $\alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_d \leq \beta_d$. Za vektor $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbf{R}^d$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ definiramo potenciranje $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d)^{\alpha_d}$. Binomne koeficijente definiramo formulom:

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} := \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!} & \text{za } \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} .$$

Derivaciju reda $\boldsymbol{\alpha}$ definiramo s

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x^d)^{\alpha_d}} \ .$$

Prilikom rada s varijablama iz prostora $\mathbf{R}^{1+d} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^d$, koristit ćemo sljedeću notaciju. Varijable u $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ ćemo označavati s $\mathbf{y} = (y^0, y^1, \ldots, y^d) = (t, \mathbf{x}) = (t, x^1, \ldots, x^d)$, ovisno o tome što je prikladnije. Slično za *dualnu* varijablu pišemo $\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_d) = (\tau, \boldsymbol{\xi})$. Za derivaciju koristimo simbole $\nabla_{\mathbf{y}} = (\partial_t, \nabla_{\mathbf{x}})$, te također crticu za ∂_t, odnosno ∇ za $\nabla_{\mathbf{x}}$. Derivacije po dualnoj varijabli ξ_i označujemo s podignutim indeksom uz znak derivacije: ∂^i.

Za matricu $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{m \times n}$ s $\mathsf{a}_i(\mathsf{a}^i)$ označujemo i-ti redak (stupac) matrice $\mathbf{A}$. Također, za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda d nad poljem $\mathbf{F}$ rabimo oznaku $\overrightarrow{\mathbf{A}} \in \mathbf{F}^{d^2}$ za vektor čije komponente, indeksirane uređenim parovima (i, j), $i, j = 1, \ldots, d$, su zadane s $\overrightarrow{\mathbf{A}}_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$. Drugim riječima, $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ sadrži elemente matrice $\mathbf{A}$ složene u vektor iz $\mathbf{F}^{d^2}$.

e_i - označuje vektor kanonske baze u $\mathbf{R}^d$.

$\mathbf{R}_*^d$ - označuje skup $\mathbf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.

S^{d-1} - označuje jediničnu sferu u $\mathbf{R}^d$.

P^d - označuje glatku razinsku hiperplohu u $\mathbf{R}^{1+d}$ definiranu relacijom $\mathrm{P}^d := \{(\tau, \boldsymbol{\xi}) : (2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4 = 1\}$.

Za funkciju ψ definiranu na S^{d-1} s ψ_0 označujemo njeno homogeno proširenje reda 0 na $\mathbf{R}^d_*$, odnosno $\psi_0(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|})$.

Parabolička projekcija p skupa $\mathbf{R}^{1+d}_*$ na P^d je definirana relacijom

$$p(\tau, \boldsymbol{\xi}) := \left(\frac{\tau}{\sqrt{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt[4]{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}} \right).$$

Paraboličku projekciju točke $T = (\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T) \in \mathbf{R}^{1+d}_*$ na P^d označujemo s

$$T_0 = (\tau_0, \boldsymbol{\xi}_0) := p(\tau_T, \boldsymbol{\xi}_T).$$

ρ - označuje preslikavanje definirano izrazom $\rho(\tau, \boldsymbol{\xi}) := \sqrt[4]{(2\pi\tau)^2 + (2\pi|\boldsymbol{\xi}|)^4}$.

Operacije na funkcijama

U ovom radu koristimo sljedeću definiciju Fourierove pretvorbe

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

dok će njezin inverz biti zadan relacijom

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\mathbf{x}) = \check{f}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

S $\tilde{f}$ označujemo promjenu predznaka argumenta, to jest,

$$\tilde{f}(x) := f(-x).$$

Poissonova zagrada diferencijabilnih funkcija a i b je funkcija definirana izrazom

$$\{a, b\} := \nabla_{\boldsymbol{\xi}} a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b - \nabla_{\mathbf{x}} a \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} b.$$

$[A, B] := AB - BA$ označuje komutator operatora A i B.

$\otimes$ - označuje vektorski tenzorski produkt, definiran s $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v} = (\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a}$ (po komponentama $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})_{ij} = a_i \bar{b}_j$).

$\boxtimes$ - označuje tenzorski produkt funkcija (distribucija) u različitim varijablama.

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ - predstavlja (kompleksni) skalarni produkt vektora iz nekog unitarog prostora. U slučaju kad su argumenti skalarnog produkta konstantni vektori, odnosno matrice na $\mathbf{C}^d$, kraće ćemo ga zapisivati s $\mathsf{u} \cdot \mathsf{v} = \sum u_i \bar{v}_i$, odnosno $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathsf{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^*)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ - predstavlja seskvilinearan dualni produkt, kojeg uzimamo da je antilinearan po prvoj varijabli, linearan po drugoj. U slučaju kad su argumenti dualnog produkta vektorske ili matrične funkcije, interpetiramo ga kao $\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = \int \mathsf{v} \cdot \mathsf{u}$, odnosno $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \int \mathsf{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^*)$.

Prostori funkcija i distribucija

C_0^m: Banachov prostor funkcija čije sve derivacije do reda m opadaju prema nuli u beskonačnosti.

C_b^m: Banachov prostor funkcija čije su sve derivacije do reda m omeđene.

$\mathrm{C}_c^\infty([a,b])$: Vektorski prostor restrikcija na $[a,b] \cap \mathbf{R}$ funkcija iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, pri čemu su $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$.

L^p: Lebesgueov prostor, to jest prostor klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija takvih da je norma

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\int |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

za $1 \leqslant p < \infty$, odnosno

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{C \in \mathbf{R} : |u(x)| \leqslant C \text{ (ss)}\},$$

konačna.
Ukoliko nema straha od zabune, norme u L^p prostorima ćemo kraće označavati s $\|\cdot\|_p$. Skalarni produkt na L^2 će nam biti zadan relacijom

$$\langle\, u \mid v \,\rangle = \int u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Lebesgueovu mjeru označujemo s λ, te integraciju po $\mathbf{R}^d$ obzirom na Lebesgueovu mjeru s $d\mathbf{x} = d\lambda(\mathbf{x})$

$W(a,b;X,Y)$: Hilbertov prostor definiran izrazom

$$W(a,b;X,Y) := \{u : u \in \mathrm{L}^2([a,b];X), u' \in \mathrm{L}^2([a,b];Y)\}$$

pri čemu su X, Y dva kompleksna Hilbertova prostora takva da je $X \overset{g}{\hookrightarrow} Y$, te $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. Pripadna norma je $\|u\|_W^2 = \|u\|^2_{\mathrm{L}^2([a,b];X)} + \|u'\|^2_{\mathrm{L}^2([a,b];Y)}$.
U slučaju kad je $X = V$, $Y = V'$, gdje je V' dual Hilbertovog prostora V, kraće ćemo označavati $W(a,b;V) := W(a,b;V,V')$.

$\mathcal{S}$: Schwartzov prostor, i.e. prostor C^∞ funkcija ϕ takvih da je za svaki $k \in \mathbf{N}_0$ polunorma

$$|\phi|_k = \sup\{|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\boldsymbol{\beta}} \phi(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, |\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leqslant k\}$$

konačna. $\mathcal{S}$ je Fréchetov prostor s toplogijom generiranom familijom gore navedenih polunormi.

H^s: Soboljevljev prostor kojeg sačinjavaju sve distribucije takve da je $\lambda^s \hat{u} \in \mathrm{L}^2$, pri čemu je $\lambda^s(\boldsymbol{\xi}) = (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}$. H^s su Hilbertovi prostori opskrbljeni normom

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^s} = \|\lambda^s \hat{u}\|^2_{\mathrm{L}^2} = \int (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\hat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}.$$

Također se koriste oznake $\mathrm{H}^{-\infty} = \bigcup \mathrm{H}^s$ i $\mathrm{H}^{\infty} = \bigcap \mathrm{H}^s$.

$\mathcal{S}'$: Dual prostora $\mathcal{S}$, sastoji se od takozvanih *temperiranih distribucija*. To su linearni funkcionali na $\mathcal{S}$ neprekinuti u sljedećem smislu

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \phi \in \mathcal{S}) \quad |\langle u, \phi\rangle| \leqslant C|\phi|_N \ .$$

$\mathrm{S}^m_{0,1}$: Hörmanderova klasa klasičnih simbola reda m, odnosno prostor funkcija $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ takvih da je za svaki par multiindeksa $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ funkcija $\lambda^{|\boldsymbol{\beta}|-m}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a$ omeđena.

X^m: Banachov prostor koji se sastoji od svih funkcija sa svojstvom da sve njihove derivacije do reda m pripadaju prostoru $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, to jest da je njihova Fourierova pretvorba L^1 funkcija. Norma na $X^m(\mathbf{R}^d)$ dana je s

$$\|w\|_{X^m} := \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^m)|\mathcal{F}w(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \ .$$

Ψ^m: Prostor pseudodiferencijalnih operatora reda m (vidi definiciju na strani 4). *Glavni simbol* operatora $A \in \Psi^m$ označujemo s $\sigma_m(A)$.
Skup svih pseudodiferencijalnih operatora je $\Psi^\infty = \bigcup \Psi^m$, dok se elementi skupa $\Psi^{-\infty} = \bigcap \Psi^m$ zovu izglađujući operatori.
$\Psi^m_c(\mathbf{R}^d)$ označuje potprostor u $\Psi^m(\mathbf{R}^d)$ koji sadrži operatore čiji simboli su kompaktno nošeni u varijabli $\mathbf{x}$.

Literatura

[Ad] Robert A. Adams, John J. F. Fournier: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.

[A] Nenad Antonić: *H-measures applied to symmetric systems*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **126A** (1996) 1133–1155

[AB] Nenad Antonić, Neven Balenović: *Optimal design for plates and relaxation*, *Mathematical Communications* **4** (1999) 111-119

[AL1] Nenad Antonić, Martin Lazar: *Microlocal energy density for hyperbolic systems* u *Applied Mathematics and Scientific computing (Dubrovnik, 2001)*, pp. 179–190, Z. Drmač et al. (ur.), Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[AL2] Nenad Antonić, Martin Lazar: *H-measures applied to non-hyperbolic equations*, submitted

[ARV] Nenad Antonić, Andrija Raguž, Marko Vrdoljak: *Homogenization of Nonlinear Elliptic Systems* u *Proceedings of the 1. Conference on Applied Mathematics and Computation (Dubrovnik, 1999)*, pp. 81–90, M. Rogina et al. (ur.), Department of Mathematics, Zagreb, 2001.

[Ba] A. V. Balakrishnan: *Applied Functional Analysis*, Springer, 1975.

[BM] Claude Bardos, Tawfik Masrour: *Mesures de défaut: observation et contrôle de plaques*, *Comptes Rendus de l'Academie des sciences Paris* **323** (1996) 621-626

[Br] Haïm Brezis: *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[CDD] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette, Margaret Dillard-Bleick: *Analysis, manifolds and physics I: Basics*, North-Holland, 1982.

[DL] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology 1-6*, Springer, 1992.

[F] Gerald B. Folland: *Real Analysis*, Willey, New York, 1984.

[Fr] Gilles A. Francfort: *An introduction to H-measures and their applications* u *Variational problems in materials science*, pp. 85–110, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **68**, Birkhäuser, 2006.

[FM] Gilles A. Francfort, François Murat: *Oscillations and energy densities in the wave equation*, *Communications in Partial Differential Equations* **17** (1992) 1785–1865

[G1] Patrick Gérard: *Microlocal defect measures*, *Communications in Partial Differential Equations* **16** (1991) 1761–1794

[G2] Patrick Gérard: *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations*, *Journal of Functional Analysis* **141** (1996) 60–98

[GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983.

[H] Lars Hörmander: *The analysis of linear partial differential Operators I–IV*, Springer, 1983–1985.

[HJ] Roger A. Horn, Charles R. Johnson: *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[K] Tosio Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.

[La] Serge Lang: *Real and Functional Analysis*, Springer, 1993.

[L] Martin Lazar: *H-mjere i primjene*, Magistarski rad, Zagreb, 1998.

[LL] Elliot H. Lieb, Michael Loss: *Analysis*, American Mathematical Society, 1996.

[LM] J. L. Lions, E. Magenes: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I-III*, Springer, 1972–1973.

[SR] Xavier Saint-Raymond: *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, CRC Press, 1991.

[St] Elias M. Stein: *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[T1] Luc Tartar: *Nonlinear partial differential equations using compactness method*, Mathematical research center, Technical summary report 1584, University of Wisconsin, Madison, 1976.

[T2] Luc Tartar: *Remarks on homogenization and Stokes' equation* u *Macroscopic modelling of turbulent flows (Nice, 1984)*, pp. 22–31, Lecture Notes in Phys., 230, Springer, 1985.

[T3] Luc Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **115A** (1990) 193–230

[T4] Luc Tartar: *H-measures and applications* u *Proceedings of the International congress of mathematicians (Kyoto, 1990)*, Vol II, pp. 1215–1223, Mathematical society of Japan, 1991.

[T5] Luc Tartar: *Oscillations and concentration effects in partial differential equations: why waves may behave like particles* u *XVII CEDYA: Congress on Differential Equations and Applications/VII CMA: Congress on Applied Mathematics (Salamanca, 2001)*, pp. 179–219, L. Ferragut et A. Santos (ur.), Departamento de Matemática Aplicada, Universida de Salamanca, Salamanca, 2001.

[T6] Luc Tartar: *Mathematical tools for studying oscillations and concentrations: from Young measures to H-measures and their variants* u *Multiscale Problems in Science and Technology (Dubrovnik 2000)*, pp. 1–84, N. Antonić et al. (ur.), Springer, 2002.

[T7] Luc Tartar: *An introduction to Navier-Stokes equation and oceanography*, Lecture Notes of Unione Matematica Italiana, Springer, 2006.

[Tr] François Trèves: *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators I–II*, Plenum Press, New York, 1980.

[V] V. S. Vladimirov (ur.), *A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers Moscow, 1986.

[W] J. Wloka: *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1987.

Sažetak

Od svog uvođeja krajem osamdesetih godina prošlog stoljeća H-mjere su se pokazale prikladnim sredstvom za primjenu na hiperboličke zadaće. Pri tom su se uz linerarne, proučavale i polulinerarne zadaće s neprekidnim koeficijentima.

U ovom radu pokušao sam ispitati primjenjivost H-mjera na nehiperboličke (posebno paraboličke) zadaće. Cilj primjene bio je dobiti relaciju kojom bi izrazili H-mjeru pridruženu nizu (gradijenata) rješenja promatrane zadaće preko zadanih podataka, analogno onom što je napravljeno za valnu (hiperboličku) jednadžbu. Međutim dobiveni rezultati nisu ispunili taj cilj u potpunosti. Naime, dobivena relacija između nepoznate H-mjere i zadanih podataka vrijedi svugdje osim u polovima sfere u dualnom prostoru. Međutim, upravo informacije sadržane u te dvije točke imaju posebnu važnost, jer su s jedne strane za određene višeskalne zadaće H-mjere upravo nošene u polovima, dok je s druge strane razmatrana H-mjera u slučaju Schrödingerove jednadžbe isključivo nošena u polovima. Štoviše, pokazao sam da izraz koji bi opisao razmatrane H-mjere u potpunosti i ne postoji.

Stoga sam pristupio konstrukciji nove varijante H-mjera koja bi u sebi sadržavala drugačije skaliranje dualne varijable, bolje prilagođeno nehiperboličkim zadaćama. Dokazuje se postojanje kao i osnovna svojstva za novouvedenu, *paraboličku* H-mjeru, koja se zatim primjenjuje na niz zadaća paraboličkog tipa. Za razliku od originalnih H-mjera, rezultati dobiveni primjenom nove varijante omogućuju njihov potpuni opis pomoću zadanih podataka, odnosno njima pridruženih mjera. Točnije, dobivene mjere su nošene izvan polova, te su u sebi sačuvale podatke o smjeru širenja poremećaja prisutnih u početnom trenutku.

Analogno paraboličkoj varijanti, na kraju se analiziraju moguće konstrukcije drugačijih poopćenja, primjenjive na zadaće koje u sebi sadrže općenite vrste odnosa među raznim varijablama. Navode se njihova svojstva i opisuju reprezentativni primjeri.

Summary

Since their introduction by the end of eighties of the last century, H-measures have turned out as a useful tool for the study of oscillation effects related to hyperbolic problems.

This work tries to explore their applicability to non-hyperbolic (in particular, parabolic) problems. The goal is to obtain a relation expressing H-measure related to a sequence of (gradients of) solutions via given data, similarly to what was done for the wave (hyperbolic) equation. However, the results obtained failed to achieve this. More precisely, the obtained relation between an unknown measure and given data is valid everywhere except at North/South pole of the sphere in dual space. However, these two points have special meaning, as H-measures related to (some type of) multiscale problems are supported exactly in them. On the other side, an H-measure related to the Schrödinger problem is supported in the poles exclusively. Furthermore, it is shown that the relation completely describing considered H-measures does not exist.

Therefore, a new variant of H-measures has been constructed. It contains a different scaling of the dual variable better suited to non-hyperbolic equations. The proof of the existence, as well as the basic properties of the introduced, *parabolic* H-measure are given. It is then applied to a sequence of parabolic type problems. Unlike the original H-measures, the results obtained by this application enable the complete description of the introduced variant via given data. More precisely, the measures obtained are supported outside poles, and preserve information on the direction of propagation of initial disturbances.

Analogously to the parabolic variant, possible constructions of other generalisations are considered, applicable to problems containing general relations between different variables. Their basic properties are given, as well as some representative examples.

Životopis

Rođen sam 4. travnja 1975. godine u Dubrovniku, gdje sam završio osnovnu i srednju školu. Tijekom čitavog školovanja bio sam odličan učenik. Sudjelovao sam u više matematičkih i fizičkih natjecanja u kojima sam ostvario zapažene rezultate (između ostalog treće mjesto na državnom nivou). Maturirao sam 1993. godine s odličnim uspjehom. Iste godine upisao sam se na Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilista u Zagrebu, Matematički odjel, profil diplomirani inženjer matematike. Na trećoj godini studija odabrao sam smjer primijenjene matematike. Tokom studija moj prosjek ocjena je bio 4,9.

Diplomirao sam u jesen 1998. godine pod mentorstvom dr. Nenada Antonića. Naslov diplomskog rada je *Globalna rjesenja Boltzmanove jednadžbe*. Rad se temelji na članku Ronalda J. DiPerne i Pierre-Louis Lionsa objavljenom u *Annals of Mathematics* 1989. godine. U njemu se dokazuje egzistencija renormaliziranog rješenja, slabijeg od klasičnog, koje se dobije kao limes rješenja niza aproksimativnih zadaća.

Želeći produbiti moje znanje fizike, 1995. godine sam paralelno upisao studij fizike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu, profil diplomirani inženjer fizike. Na taj način sam se upoznao s fizikalnom pozadinom jednadžbi koje matematički obrađujem. Na trećoj godini studija fizike odabrao sam smjer geofizika, da bih na četvrtoj godini izabrao profil metereologija i fizička oceanografija. Moj prosjek ocjena na studiju fizike iznosi 4,65.

Naslov mog diplomskog rada na tom studiju glasi *Modeliranje termohalinog strujanja u okrajnjim bazenima uz uvažavanje lateralnog trenja*. Izrađen je pod mentorstvom prof. Mirka Orlića, a obranio sam ga u siječnju 2004. U njemu je izrađen analitički hidrostatski model koji opisuje cirkulaciju sjevernog Jadrana u zimskim mjesecima, pokrenutu razlikama u polju gustoće. Proučava se ovisnost strujanja o koeficijentima turbuletnog trenja, kako vertikalnom, tako i lateralnom, kao i o pridnenom trenju.

Nakon diplomiranja, 1998. godine sam se zaposlio kao znanstveni novak na Matematickom odjelu Prirodoslovnog matematickog fakulteta u Zagrebu. Član sam projekta *Titrajuća rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi* sponzoriranog od Ministarstva znanosti i tehnologije.

U akademskoj godini 98/99. započeo sam postdiplomski studij matematike.

Akademsku godinu 99/00. sam proveo na Max Planck Institutu za primjenjenu matematiku u Leipzigu, Njemačka, gdje sam bio pozvan sudjelovati u projektima vezanim uz H-mjere i njihove primjene.

Magistrirao sam u srpnju 2002. pod mentorstvom prof. Nenada Antonića. Naslov magistarskog rada je *H-mjere i primjene*. U njemu se bavim primjenom H-mjera na polulinearnu valnu jednadžbu, kao i na simetrične hiperboličke sustave. Koristeći prijenosna svojstva H-mjera, pokazano je da dodavanje nelinearnog člana nije rezultiralo promjenom makroskopske gustoće energije pridružene valnoj jednadžbi.

Dosad sam održao desetak priopćenja na međunarodnim konferencijama, te objavio sljedeće znanstvene radove:

- Nenad Antonić, Martin Lazar: *Computation of Power-Series Expansions in Ho-*

mogenisation of Nonlinear Equations u *Proceedings of the 1. Conference on Applied Mathematics and Computation (Dubrovnik, 1999)*, pp. 69–80, M. Rogina et al. (ur.), Department of Mathematics, Zagreb, 2001.

- Nenad Antonić, Martin Lazar: *Microlocal energy density for hyperbolic systems* u *Applied Mathematics and Scientific computing (Dubrovnik, 2001)*, pp. 179–190, Z. Drmač et al. (ur.), Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

- Martin Lazar, Marko Pavić, Zoran Pasarić, Mirko Orlić: *Analytical Modelling of Wintertime Coastal Jets in the Adriatic Sea*, *Continental Shelf Research* **27** (2007) 275–285

- Nenad Antonić, Martin Lazar: *H-measures applied to non-hyperbolic equations*, poslano

Moj osnovni interes je u matematičkom pristupu fizičkim problemima. Posebno sam zainteresiran za parcijalne diferencijalne jednadzbe i njihove primjene, posebno na području fizičke oceanografije. Također, proučavao sam probleme prijelaza iz mikroskale na makroskalu, odnosno probleme homogenizacije. Jedan od alata korištenih u homogenizaciji su i H-mjere, čijim svojstvima i primjenama sam se bavio u magistarskom radu, a čije poopćenje je sadržaj moje doktorske disertacije pod naslovom *Poopćenja H-mjera i primjene*.