Parcijalne diferencijalne jednadžbe II - kolokvij

1. [5+10+10] Riješite jednadžbe u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:
a) $xT = \delta_0$,
b) $(x-a)T = \delta_b$,
c) $(x-a)T' = \delta_b$,
gdje su a i b po volji odabrani realni parametri.

2. [10+15]
a) Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Ako je f realna i parna (realna i neparna), pokažite da je $\hat{f}$ realna i parna (strogo imaginarna i neparna).
b) Koristeći Fourierovu pretvorbu izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \ .$$

3. [25]
a) Dokažite koristeći Fourierovu pretvorbu da Cauchyjeva zadaća za jednadžbu štapa

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \ , \quad \text{u } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 \ , \\ u_t(0,\cdot) = u_1 \ , \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje za $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.
b) Za $u_1 = 0$ i $u_0(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, izračunajte u.

4. [25] Koristeći neposredni postupak u varijacijskom računu, pokazati da ako je H separabilan Hilbertov prostor, a $J : H \longrightarrow \mathbf{R}$ zadovoljava:
a) $\inf J > -\infty$,
b) J je nizovno odozdo poluneprekinut s obzirom na slabu topologiju na H (drugim riječima, ako $h_n \rightharpoonup h$, onda je $\liminf J(h_n) \geqslant J(h)$),
c) $\lim_{\|h\|\to\infty} J(h) = \infty$.
Tada u H postoji minimizator za J (tj. $h \in H$ takav da vrijedi $(\forall\, g \in H) \quad J(h) \leqslant J(g)$).

Marko Erceg

22. svibnja 2012.