Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe II

1. [2] Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x & , \quad x \leqslant -1 \\ 2e^x - 1 & , \quad -1 < x \leqslant 0 \\ x + 1 & , \quad 0 < x \leqslant 2 \\ \sin(\pi x) & , \quad x > 2 \ . \end{cases}$$

Dokažite $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ i odredite f' i f'' u smislu distribucija.

2. [4] Distribucija $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$, konačni dio $\frac{1}{x^2}$, je definirana preko limesa:

$$\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} \, dx \ .$$

(a) Pokazati da je $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ distribucija reda $\leqslant 2$.

(b) Pokazati da je $\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx$ za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $0 \notin \operatorname{supp} \varphi$, tj. na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ se $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ podudara s $\frac{1}{x^2}$.

(c) Pokazati da je produkt $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ s x^2 jednak 1.

(d) Koristeći (c) riješite diferencijalnu jednadžbu u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$x^2 T = 1 \ .$$

3. [2] Izračunajte $x\delta_0'$, $x^2\delta_0'$ i $x\delta_0''$.

4. [2] Nađite u koji zadovoljava :

$$\begin{cases} -u'' + u = \delta_0 \ , \\ u(-1) = 0 \ , \\ u(1) = 1 \ . \end{cases}$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati do 12 sati 12. travnja 2012.

Marko Erceg

22. ožujka 2012.