# Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - popravni kolokvij

**1.** [15+5]

a) Odredite opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe u $\mathbf{R}^2$:

$$(y+2ux)u_x - (x+2uy)u_y = \frac{1}{2}(x^2-y^2)\,.$$

b) Koristeći (a), odredite ono rješenje koje dodatno zadovoljava $u(x,x)=0$.

**2.** [20] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\ , \\ \quad u(0,\cdot) = g\ , \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ -x & , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ -1 & , \quad x \geqslant 1\ . \end{cases}$$

**3.** [5+15]

a) Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za:

$$\Omega = \{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2\ :\ x_1>2,\ x_2<1\}\ .$$

b) Riješite rubnu zadaću na $\Omega$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0\ , \\ u_{|\Gamma_1} = g\ , \\ u_{|\Gamma_2} = 0\ , \end{cases}$$

gdje su $\Gamma_1 := \mathsf{Fr}\,\Omega \cap \{x_1=2\}$, $\Gamma_2 := \mathsf{Fr}\,\Omega \cap \{x_2=1\}$, te

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 < x \leqslant 1 \\ a & , \quad x \leqslant -1\ , \end{cases}$$

za $a\in\mathbf{R}$.
Provjerite da $u$ uistinu zadovoljava rubni uvjet, te ispitajte što se događa s rješenjem kad $a\to 0$.

**4.** [10+10]

a) Neka je $u$ harmonička u jediničnoj kugli u $\mathbf{R}^2$ ($x^2+y^2<1$), te na rubu kugle poprima vrijednost $u(x,y)=x(x+1)$ (za $x^2+y^2=1$). Odredite $u(0,0)$.

b) Riješite Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases} \qquad u_t = 2u_{xx} + te^t\sin x\ , \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}\ , \\ u(0,x) = 1\ . \end{cases}$$

**5.** [20] Neka $u \in \mathrm{C}^{1,2}(\Omega_T) \cap \mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega_T)$ zadovoljava jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f & \text{u} \quad \Omega_T \,, \\ u = g & \text{na} \quad \Gamma_T \,, \end{cases}$$

gdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen, $\Omega_T := \langle 0, T] \times \Omega$ i $\Gamma_T := \mathsf{Cl}\,\Omega_T \setminus \Omega_T$ parabolička domena i rub, te $f \in \mathrm{C}(\Omega_T)$ i $g \in \mathrm{C}(\Gamma_T)$.

Dokažite da $u$ zadovoljava ocjenu

$$\max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} |u| \leqslant C\big(\max_{\Gamma_T} |g| + \max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} |f|\big) \,,$$

pri čemu $C > 0$ ne ovisi o $f$ i $g$.

Uputa: Možete koristiti sljedeću tvrdnju: *Ako* $v \in \mathrm{C}^{1,2}(\Omega_T) \cap \mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega_T)$ *zadovoljava* $v_t - \triangle v \leqslant 0$ *na* $\Omega_T$ *tada vrijedi* $\max_{\mathsf{Cl}\,\Omega_T} v = \max_{\Gamma_T} v$

Tu tvrdnju ne trebate dokazivati, ali ako je dokažete, dobivate dodatne bodove.

Kolokvij se piše 120 minuta.
Svaki zadatak nosi 20 bodova (ukupno ima 100 bodova).
Za prolaz je potrebno skupiti barem 50 bodova.
Osim pribora za pisanje i brisanje, dopušteno je još samo korištenje službenih formula i matematičkog priručnika Bronštejn.
Rezultati će biti objavljeni na web stranici (ili internom dijelu foruma) najkasnije u četvrtak 14.2. navečer.
SRETNO!

*Marko Erceg*