Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [10] Metodom karakteristika riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2\,, \\ u(x,x) = \dfrac{x}{2}\,. \end{cases}$$

Skicirajte, ako postoje, (projicirane) karakteristike kroz točke $(0,0)$, $(0,-1)$ i $(3,2)$. Odredite u kojim je točkama pravca $y = x$ jednadžba karakteristična i ispitajte je li u tim točkama rješenje definirano.

2. [10] Zadana je jednadžba

$$uxu_x - yuu_y = y^2 - x^2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^2\,.$$

a) Lagrangeovom metodom odredite opće rješenje gornje jednadžbe.
b) Koristeći (a), odredite ono rješenje koje dodatno zadovoljava

$$u(2,y) = 2y + 1\,.$$

3. [10] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je

$$g(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2 & , \quad x > 2 \end{cases}\,.$$

4. [10] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

pri čemu je $F(u) = \frac{u^2}{2} + u$, te

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}\,.$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati najkasnije na vježbama 7. siječnja 2019.

Marko Erceg

12. prosinca 2018.