# Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - kolokvij

**1.** [2+6+12] Promotrimo nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$u_{tt}u_x^2 - 2u_{xt}u_tu_x + u_t^2u_{xx} = 0\,. \qquad (*)$$

(a) Pokažite da je $(*)$ za $u_x \neq 0$ ekvivaletno s

$$\frac{u_{tt}}{u_x} - \frac{u_tu_{xt}}{u_x^2} = \frac{u_t}{u_x}\left(\frac{u_{xt}}{u_x} - \frac{u_tu_{xx}}{u_x^2}\right)\,. \qquad (**)$$

(b) Iz $(**)$ izvedite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda koju zadovoljava

$$v := \frac{u_t}{u_x}\,.$$

Uputa: Zapis jednadžbe $(**)$ je s razlogom takav (indikativan u rješavanju ovog problema).
(c) Za dane početne uvjete

$$\begin{cases} u(0,x) = 3 + e^{2x}\,, \\ u_t(0,x) = 6e^{2x}\,, \end{cases} \qquad (***)$$

odredite rješenje $u$ jednadžbe $(*)$ na $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$.
Uputa: Najprije odredite $v$ (rješenje $(**)$ na $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$ uz početni uvjet impliciran s $(***)$), a zatim odredite $u$.

**2.** [20] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0,\infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0,\cdot) = g\,, \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 1 \\ 2 & , \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 0 & , \quad x \geqslant 3 \end{cases}\,.$$

**3.** [20] Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \triangle u = 0\,, \\ u(-x,x) = 0\,, \quad x \geqslant 0\,, \\ u(-x,-x) = A\,, \quad x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

na skupu $\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 + x_2 < 0\,,\ x_1 - x_2 < 0\}$, pri čemu je $A \in \mathbf{R}$ realna konstanta.

**4.** [20] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 4t^3 - 2 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2\,, \\ u(0,x_1,x_2) = e^{-2x_1^2}(1 - \cos x_2)\,. \end{cases}$$

**5.** [20] Neka je $u \in \mathrm{C}^{1,2}([0,T] \times [0,1])$, $T > 0$, rješenje početno-rubne zadaće

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 \quad \text{u} \quad \langle 0,T\rangle \times \langle 0,1\rangle \,, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad , \quad x \in [0,1] \,, \\ \qquad u(t,0) = g(t) \quad , \quad t \in [0,T] \,, \\ \qquad u(t,1) = h(t) \quad , \quad t \in [0,T] \,. \end{cases}$$

Pretpostavimo da postoji $M > 0$ takva da $u_0(x) \leqslant M$, $x \in [0,1]$, te $g(t), h(t) \leqslant M$, $t \in [0,T]$. Dokažite da na cijelom skupu $[0,T] \times [0,1]$ rješenje $u$ zadovoljava nejednakost

$$u(t,x) \leqslant Me^T \,.$$

Kolokvij se piše 120 minuta.
Svaki zadatak nosi 20 bodova (ukupno ima 100 bodova).
Za prolaz je potrebno skupiti barem 50 bodova.
Osim pribora za pisanje i brisanje, dopušteno je još samo korištenje službenih formula i matematičkog priručnika Bronštejn.
Rezultati će biti objavljeni na web stranici najkasnije u srijedu 31.1. navečer.
SRETNO!

*Marko Erceg*