Treća zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

1. [7] Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen. Za funkciju $v \in \mathrm{C}^2(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ kažemo da je *nadharmonička* ako u Ω vrijedi $-\triangle v \geqslant 0$.

(a) Dokažite da nadharmonička funkcija v za svaku otvorenu kuglu $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$ zadovoljava

$$v(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{|\mathrm{K}(\mathbf{x}, r)|} \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)} v(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,.$$

Uputa: Malo prilagodite dokaz za harmoničke funkcije.

(b) Koristeći (a) dio pokažite da za nadharmoničku funkciju v vrijedi princip mimimuma:

$$\min_{\mathsf{Cl}\,\Omega} v = \min_{\mathsf{Fr}\,\Omega} v\,.$$

2. [6] Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \triangle u = 0\,, \\ u(-x, x) = 0\,, \\ u(x, x) = x\chi_{[0,1]}(x)\,, \end{cases}$$

na skupu $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 + x_2 > 0\,,\ x_1 - x_2 < 0\}$, pri čemu je $\chi_{[0,1]}$ karakteristična funkcija segmenta $[0, 1]$.

3. [6] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2\,, \\ u(0, x_1, x_2) = \sin(2x_1 - x_2)\,. \end{cases}$$

4. [6] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = t + 1 \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2\,, \\ u(0, x_1, x_2) = 0\,, \\ u_t(0, x_1, x_2) = x_1^2\,. \end{cases}$$

Rješenja u pisanom obliku treba predati na kolokviju 23. siječnja 2018.

Marko Erceg

16. siječnja 2018.