Parcijalne diferencijalne jednadžbe I - popravni kolokvij

1. [20] U $\mathbf{R}^2$ odredite rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = u - y\,, \\ u(y^2, y) = y\,. \end{cases}$$

Postoji li rješenje u nekoj okolini ishodišta? Obrazložite odgovor.

2. [20] Odredite entropijsko rješenje Cauchyjeve zadaće u $\langle 0, \infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \\ u(0, \cdot) = g\,, \end{cases}$$

gdje je

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -1 \\ 0 & , \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}\,.$$

3. [20] Izvedite eksplicitnu formulu za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \triangle u = 0\,, \\ u(1, x_2) = \operatorname{sign}(x_2)\,, \end{cases}$$

na skupu $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 1\}$, pri čemu je $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ za $x \neq 0$ i $\operatorname{sign}(0) = 0$.

4. [20] Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = e^t \quad \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^3\,, \\ u(0, x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 - x_2 - x_3)\,. \end{cases}$$

5. [20] Energiju Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + 5u_t = 0 \quad \text{u} \quad \langle 0, \infty\rangle \times \mathbf{R}\,, \\ u(0, \cdot) = u_0\,, \\ u_t(0, \cdot) = u_1\,, \end{cases}$$

definiramo s

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx\,.$$

(a) Pokažite da je za rješenje u gornje zadaće s *kompaktnim nosačem* ukupna energija $E(t)$ padajuća funkcija po t.

(b) Pomoću tvrdnje iz (a) dijela pokažite da postoji najviše jedno rješenje gornje zadaće s kompaktnim nosačem.

Za prolaz je potrebno ostvariti 50 bodova (od ukupnih 100).

Marko Erceg

7. veljače 2018.