Kolokvij: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

24.01.2017.

Zadatak 1. [12+13]

(a) Nađite rješenje zadaće

$$\begin{cases} xu_x - yu_y &= 2\sqrt{u} \\ u(s,s) &= e^{-s}, \quad s > 0 \end{cases}$$

na području $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

(b) Nađite rješenje zadaće

$$\begin{cases} yu_x - xu_y &= 0 \\ u(s,s) &= s, \quad s > 0 \end{cases}$$

na području $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

Zadatak 2. [15] Lagrangeevom metodom nađite opće rješenje jednadžbe

$$-xu_x + yu_y = x^3 - y^2$$

i odredite uvjete uz koje rješenje postoji.

Zadatak 3. [20]

Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za domenu

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d | 1 < \|x\| < R\}$$

pri čemu je $R > 1$ i $d > 2$.

Zadatak 4. [25] Izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= f \\ u(0,\cdot,\cdot) &= g \end{cases}$$

na području $\{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | t > 0\}$ pri čemu je $f(t, x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2$ i $g(x_1, x_2) = e^{-x_1}$.

Zadatak 5. [5+5+5]

(a) Dokažite da je opće rješenje jednadžbe $u_{xy} = 0$ oblika $u(x,y) = F(x) + G(y)$ za proizvoljne funkcije F i G.

(b) Koristeći zamjenu varijabli $\xi = x + t$ i $\eta = x - t$, dokažite da je $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ako i samo ako $u_{\xi\eta} = 0$.

(c) Izvedite d'Alembertovu formulu za rješenje valne jednadžbe u jednoj dimenziji.

Ljudevit Palle

1. Za prvi podzadatak imamo sistem karakterističnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \\ z' &= 2\sqrt{z}. \end{aligned}$$

Rješenja prve dvije su očita, $x(\tau) = Ce^{\tau}$ i $y(\tau) = De^{-\tau}$ za neke konstante $C, D \in \mathbb{R}$. Za posljednju koristimo separaciju varijabli $\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \mathrm{d}\tau$ pa integrirajući dobivamo $\sqrt{z} = \tau + E$, tj. $z(\tau) = (\tau + E)^2$ za neku konstantu $E \in \mathbb{R}$.

Pronađimo karakteristiku kroz točku $(s, s) \in \mathbb{R}^2$, $s > 0$. Imamo $x(0) = y(0) = s$ i $z(0) = e^{-s}$, tj. $C = D = s$ i $E = e^{-\frac{s}{2}}$. Dakle imamo relacije $x = se^{\tau}$, $y = se^{-\tau}$ i $z = (e^{-\frac{s}{2}} + \tau)^2$. Stoga, vidimo da je $x/y = e^{2\tau}$ i $xy = s^2$, tj. $\tau = \frac{1}{2}\ln(x/y)$ i $s = \sqrt{xy}$. Uvrstimo li to u izraz za z, zaključujemo da je

$$u(x, y) = \left(e^{-\frac{1}{2}\sqrt{xy}} + \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{y})\right)^2.$$

Za drugi podzadatak imamo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Za treću očito imamo $z(\tau) = E$ za neki $E \in \mathbb{R}$, tj. rješenje je konstantno duž karakteristika. Iz prve dvije jednadžbe slijedi $x'' + x = 0$. Ovo je homogena linearna jednadžba s konstantnim koeficijentima, te je rješenje oblika $x(\tau) = C\sin\tau + D\cos\tau$ jer su nultočke pripadnog karakterističnog polinoma $\lambda^2 + 1$ jednake $\pm i$. Prema prvoj jednadžbi slijedi $y(\tau) = -D\sin\tau + C\cos\tau$.

Karakteristu kroz točku $(s, s) \in \mathbb{R}^2$, $s > 0$, dobivamo iz uvjeta $x(0) = y(0) = s$, a na njoj rješenje ima vrijednost $z(\tau) = s$ (tj. $E = s$). Dobivamo da je $C = D = s$, pa imamo relacije $x = s\sin\tau + s\cos\tau$ i $y = -s\sin\tau + s\cos\tau$ koje možemo zapisati pomoću adicijskih formula u obliku $x = \sqrt{2}s\sin(\tau + \pi/4)$ i $y = \sqrt{2}s\cos(\tau + \pi/4)$. Sada je jasno da su karakteristike zapravo kružnice s polumjerom $\sqrt{2}s$ i vidimo $x^2 + y^2 = 2s^2$, tj. $s = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$. Dakle, konačno je rješenje

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{x^3 - y^2},$$

pa vidimo da je $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$, odnosno $\mathrm{d}(xy) = 0$ pa je $xy = C_1$ za neku konstantu $C_1 \in \mathbb{R}$. Za dobiti drugu jednadžbu uzmemo $x^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + \mathrm{d}u = 0$ iz čega slijedi $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + u = C_2$ za $C_2 \in \mathbb{R}$.

Dakle, rješenje možemo zapisati implicitno

$$(\phi, \psi)(x, y, u) = (xy, 2x^3 + 3y^2 + 6u) = C$$

gdje je $C \in \mathbb{R}^2$. Jacobijeva matrica je

$$D(\phi, \psi)(x, y, u) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 6x^2 & 6y & 6 \end{pmatrix},$$

pa dobivamo rješenje kada je zadovoljen barem jedan od uvjeta

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 6x^2 & 6y \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} y & 0 \\ 6x^2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x & 0 \\ 6y & 6 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tj. $y^2 - x^3 \neq 0$, $y \neq 0$ ili $x \neq 0$.

3. Definiramo refleksije $\widetilde{x} = \frac{R^2}{|x|^2}x$ i $\bar{x} = \frac{1}{|x|^2}x$. Greenovu funkciju konstruiramo beskonačnim nizom refleksija s obzirom na sfere $S(0,1)$ i $S(0,R)$. Uzmimo fiksan $x \in \Omega$ i definiramo $x_1 = \widetilde{x}$, $x_2 = \bar{x}_1$, $x_3 = \widetilde{x}_2$ itd. i $x_{-1} = \bar{x}$, $x_{-2} = \widetilde{x}_{-1}$, $x_{-3} = \bar{x}_{-2}$, itd. Označimo i $x_0 = x$.

Sada možemo formalno zapisati Greenovu funkciju

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \Phi(|x-y|) \\
&- \Phi(\frac{|x|}{R}|x_1 - y|) - \Phi(|x||x_{-1} - y|) \\
&+ \Phi(\frac{|x|}{R}|x_1||x_2 - y|) + \Phi(|x|\frac{|x_{-1}|}{R}|x_{-2} - y|) \\
&- \Phi(\frac{|x|}{R}|x_1|\frac{|x_2|}{R}|x_3 - y|) - \Phi(|x|\frac{|x_{-1}|}{R}|x_{-2}||x_{-3} - y|) \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

ili kompaktnije zapisano

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \Phi(|x-y|) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big[\Phi\Big(\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|x_k|}{R^{\lceil n/2 \rceil}}|x_n - y|\Big) + \Phi\Big(\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|x_{-k}|}{R^{\lfloor n/2 \rfloor}}|x_{-n} - y|\Big)\Big] \\
&= \Phi(|x-y|) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \Psi_n(x,y).
\end{aligned}$$

Odredimo x_n. Prvo se lako direktno izračuna da je $\bar{\widetilde{x}} = \frac{1}{R^2}x$ i $\widetilde{\bar{x}} = R^2 x$ (druga relacija zapravo slijedi iz prve jer su operacije refleksije involucije, tj. same sebi inverz). Iz toga i iz $x_1 = \frac{R^2}{|x|^2}x$ slijedi

$$x_n = \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{|x|^2}x, & n \in 2\mathbb{Z}+1 \\ \frac{1}{R^n}x, & n \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

i sada se lako provjeri da je

$$\prod_{k=0}^{n-1}|x_k| = \begin{cases} |x|, & n \in 2\mathbb{Z}+1 \\ R^n, & n \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

i

$$\prod_{k=0}^{n-1}|x_{-k}| = \begin{cases} R^{n-1}|x|, & n \in 2\mathbb{Z}+1 \\ 1, & n \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

pa smo dobili izraz za Ψ_n

$$\Psi_n(x,y) = \begin{cases} \Phi\Big(\frac{|x|}{R^{(n+1)/2}}|\frac{R^{n+1}}{|x|^2}x - y|\Big) + \Phi\Big(\frac{R^{n-1}|x|}{R^{(n-1)/2}}|\frac{1}{R^{n+1}|x|^2}x - y|\Big), & n \in 2\mathbb{Z}+1 \\ \Phi\Big(\frac{R^n}{R^{n/2}}|\frac{1}{R^n}x - y|\Big) + \Phi\Big(\frac{1}{R^{n/2}}|R^n x - y|\Big), & n \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

odnosno

$$\Psi_n(x,y) = \begin{cases} \Phi\Big(R^{n/2}|\frac{R^{1/2}x}{|x|} - \frac{|x|y}{R^{n+1/2}}|\Big) + \Phi\Big(R^{n/2}|\frac{x}{R^{n+3/2}|x|} - \frac{|x|y}{R^{1/2}}|\Big), & n \in 2\mathbb{Z}+1 \\ \Phi\Big(R^{n/2}|\frac{x}{R^n} - y|\Big) + \Phi\Big(R^{n/2}|x - \frac{y}{R^n}|\Big), & n \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Iz prethodnog vidimo da smo dobili alternirajući geometrijski red u R u izrazu za Greenovu funkciju i možemo ga zapisati u obliku

$$G(x,y) = \Phi(|x-y|) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C(n,x,y) \left(\frac{1}{R^{d/2-1}} \right)^n.$$

Primijetimo da su funkcije $C(n,x,y)$ i sve pripadne derivacije po y (x smatramo fiksnim) uniformno ograničene po svim $y \in \Omega$ za sve dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$, pa red i sve njegove derivacije konvergiraju uniformno po Weierstrassovom M-testu. Slijedi da je $\triangle_y G(x,y) = \delta_x$ (red je suma harmonijskih funkcija na Ω), a na rubu je nula po konstrukciji.

4. Rješenje je dano formulom

$$u(t,x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_d(t,x-y)e^{-y_1}\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_d(t-s,x-y)\sin y_1 \cos y_2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s$$
$$= I_1 + I_2.$$

Računamo prvi integral

$$I_1 = \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{4t}} e^{-y_1}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4t}} e^{-y_1}\mathrm{d}y_1 \ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{4t}}\mathrm{d}y_2$$
$$= \frac{e^{-x_1}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_1^2}{4t}} e^{-y_1}\mathrm{d}y_1,$$

pri čemu smo koristili u zadnjoj jednakosti supstituciju $y_1 \mapsto y_1 + x_1$ i činjenicu da je $\int_{\mathbb{R}} \Phi_1(t,y_2)\mathrm{d}y_2 = 1$ za sve $t>0$. Za izračunati do kraja trebamo još upotpuniti eksponent do potpunog kvadarata

$$\frac{1}{4t}y_1^2 + y_1 = (\frac{y_1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t})^2 - t,$$

i supstituirati $z = \frac{y_1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}$ i tada dobijemo

$$I_1 = \frac{e^{t-x_1}}{\sqrt{4\pi t}} 2\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z$$
$$= e^{t-x_1}.$$

Kako f ne ovisi o vremenu, možemo odmah supstituirati $s \mapsto t-s$ i tada je

$$I_2 = \int_0^t \frac{1}{4\pi s}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1-y_1)^2}{4s}} \sin y_1 \mathrm{d}y_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_2-y_2)^2}{4s}} \cos y_2 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}s.$$

Koristeći supstitucije $y_1 \mapsto y_1 + x_1$ i $y_2 \mapsto y_2 + x_2$, adicijske formule i činjenicu da je integral neparne funkcije nula dobivamo

$$I_2 = \sin x_1 \cos x_2 \int_0^t \frac{1}{4\pi s}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_1^2}{4s}} \cos y_1 \mathrm{d}y_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_2^2}{4s}} \cos y_2 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}s.$$

Sljedeće iskoristimo formulu $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\cos(bx)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ iz tablica i dobijemo

$$I_2 = \sin x_1 \cos x_2 \int_0^t \frac{1}{4\pi s}(\sqrt{4\pi s}e^{-s})^2\mathrm{d}s$$
$$= \sin x_1 \cos x_2 \int_0^t e^{-2s}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\sin x_1 \cos x_2 (1-e^{-2t}).$$

Dakle, konačno je rješenje

$$u(t,x_1,x_2) = e^{t-x_1} + \frac{1}{2}\sin x_1 \cos x_2 (1-e^{-2t}).$$

5. Integrirajući jednakost $u_{xy} = 0$ po y dobivamo $u_x(x,y) = f(x)$ za neku funkciju f. Integrirajući još po x dobivamo $u(x,y) = F(x) + G(y)$ za neku funkciju G pri čemu je F primitivna funkcija od f. Slijedi prva tvrdnja.

Vrijede sljedeće jednakosti po lančanom pravilu (koristimo $\partial_x \xi = 1$, $\partial_t \xi = 1$, $\partial_x \eta = 1$ i $\partial_t \eta = -1$)

$$\begin{aligned}
u_t &= u_\xi - u_\eta \\
u_{tt} &= u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - (u_{\eta\xi} - u_{\eta\eta}) \\
u_x &= u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Dakle $u_{tt} - u_{xx} = -4u_{\xi\eta}$ i druga tvrdnja slijedi.

Prema prethodna dva podzadatka slijedi da je rješenje valne jednadžbe oblika $u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$ za neke funkcije F i G. Iz toga za početne uvjete dobivamo $g(x) = F(x) + G(x)$ i $h(x) = F'(x) - G'(x)$. Trebamo izraziti F i G preko g i h.

Integrirajući jednakost s h dobivamo $H(x) = F(x) - G(x) - C$, gdje je $H(x) = \int_0^x h(y)\mathrm{d}y$ i $C = F(0) - G(0)$. Dakle imamo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned}
F + G &= g \\
F - G &= H + C,
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}(g + H + C) \\
G &= \frac{1}{2}(g - H - C).
\end{aligned}$$

Uvrstimo li to u izraz za u vidimo da se konstanta C skrati i preostane

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t)),$$

ali $H(x+t) - H(x-t) = \int_{x-t}^{x+t} h(y)\mathrm{d}y$, pa smo upravo dobili d'Alembertovu formulu.