Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I
08.11.2016.

1. [7] Nađite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + \mathsf{c}\cdot\nabla u &= \frac{f}{u} \\ u(\cdot,0) &= g, \end{cases}$$

pri čemu su zadane funkcije $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)$ i $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ strogo pozitivne te c konstantni vektor iz $\mathbb{R}^d$.

2. [8] Riješite zadaću

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{za} \quad x \geq 0 \\ u(x,x^2) &= g(x) \qquad \text{za} \quad x < 0 \end{cases}$$

na $\mathbb{R}^2$ transformacijom jednadžbe u novi koordinatni sustav $\xi = x - y^2$, $\eta = y$. Skicirajte projicirane karakteristike u početnom koordinatnom sustavu i u novom koordinatnom sustavu. Kakva je glatkoća rješenja ako je $g \in C^\infty(\mathbb{R})$?

3. [8] Metodom karakteristika riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} (\cos y)u_x + u_y &= \frac{4y}{(y^2-1)^2} \\ u(\cdot,0) &= g \end{cases}$$

na $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm 1\}$. Skicirajte projicirane karakteristike. Pokažite da rješenje nije jedinstveno na Ω i dajte primjer krivulje (ili krivulja) na kojima treba biti dodatno zadana vrijednost funkcije u tako da rješenje bude jedinstveno.

4. [7] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 1-povezano područje čiji se rub $\operatorname{Fr}\Omega$ može parametrizirati regularnom C^1 krivuljom $\gamma : [a,b] \to \operatorname{Fr}\Omega$ takvom da je $\gamma(a) = \gamma(b)$. Nadalje, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcija iz $C^1(\operatorname{Cl}\Omega)$ koja zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete. Koristeći formulu

$$\int_\Omega g_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{Fr}\Omega} g\nu_i\,\mathrm{d}S(x)$$

koja vrijedi za svaki $g \in C^1(\operatorname{Cl}\Omega)$, pri čemu je ν_i i-ta komponenta jedinične vanjske normale ν na rub $\operatorname{Fr}\Omega$, dokažite da funkcija f zadovoljava

$$\oint f\,\mathrm{d}\gamma = \int_a^b f\circ\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Množenje u drugom integralu je množenje kompleksnih brojeva.

Ljudevit Palle

1. Pretpostavimo da imamo rješenje u dane zadaće. Definiramo funkciju

$$z(\tau) = u(\mathsf{x}_0 + \tau \mathsf{c}, \tau),$$

gdje je x_0 zadana točka u $\mathbb{R}^d$. Tada je

$$\begin{aligned} z'(\tau) &= \sum_{i=1}^{d} c_i u_{x_i}(\mathsf{x}_0 + \tau\mathsf{c}, \tau) + u_t(\mathsf{x}_0 + \tau\mathsf{c}, \tau). \\ &= \frac{f(\mathsf{x}_0 + \tau\mathsf{c}, \tau)}{z(\tau)}. \end{aligned}$$

Prebacimo $z(\tau)$ na drugu stranu i integrirajući dobivamo

$$z^2(\tau) = z^2(0) + 2\int_0^\tau f(\mathsf{x}_0 + s\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s,$$

to jest

$$u^2(\mathsf{x}_0 + \tau\mathsf{c}, \tau) = g^2(\mathsf{x}_0) + 2\int_0^\tau f(\mathsf{x}_0 + s\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s.$$

Konačno označimo li $\mathsf{x} = \mathsf{x}_0 + \tau\mathsf{c}$ i $t = \tau$, dobivamo

$$\begin{aligned} u^2(\mathsf{x}, t) &= g^2(\mathsf{x} - t\mathsf{c}) + 2\int_0^t f(\mathsf{x} + (s-t)\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s, \\ u(\mathsf{x}, t) &= \Big(g^2(\mathsf{x} - t\mathsf{c}) + 2\int_0^t f(\mathsf{x} + (s-t)\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dokazali smo da ako je u rješenje dane jednadžbe, onda nužno ima prethodni oblik (primijetimo da se implicitno pretpostavlja u jednadžbi da je $u \neq 0$, a prethodna nam formula daje da je uistinu $u > 0$ na cijeloj domeni pa je sve konzistentno; pri korjenovanju smo uzeli pozitivan predznak jer je $u(\mathsf{x}, 0) = g(\mathsf{x}) > 0$ za sve $\mathsf{x} > 0$).

Provjerimo još je li prethodna formula uistinu i rješenje. Vidimo da je zadovoljen početni uvjet, pa derivirajmo jednadžbu gdje nismo korijenovali.

$$\begin{aligned} 2u(\mathsf{x}, t)u_t(\mathsf{x}, t) =& \, 2\,g(\mathsf{x} - t\mathsf{c})(-\mathsf{c}) \cdot \nabla g(\mathsf{x} - t\mathsf{c}) + 2\,f(\mathsf{x}, t) \\ &+ 2\int_0^t (-\mathsf{c}) \cdot \nabla f(\mathsf{x} + (s-t)\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s, \\ 2u(\mathsf{x}, t)\nabla u(\mathsf{x}, t) =& \, 2\,g(\mathsf{x} - t\mathsf{c})\nabla g(\mathsf{x} - t\mathsf{c}) \\ &+ 2\int_0^t \nabla f(\mathsf{x} + (s-t)\mathsf{c}, s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Množeći drugu jednakost skalarno s c i zbrajajući je s prvom dobijemo nakon kraćenja

$$2u(\mathsf{x}, t)(u_t(\mathsf{x}, t) - \mathsf{c} \cdot \nabla u(\mathsf{x}, t)) = 2f(\mathsf{x}, t).$$

Kako je $u > 0$ jasno iz formule, možemo dijeliti s $2\,u$ i slijedi tvrdnja.

2. Označimo $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ pri čemu vrijede relacije $\xi = x - y^2$ i $\eta = y$. Iz toga slijedi po lančanom pravilu da je $yu_x(x, y) + u_y(x, y) = v_\eta(\xi, \eta) = 0$. Integrirajući po η dobijemo da postoji funkcija $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $v(\xi, \eta) = \phi(\xi)$. Funkciju ϕ odredit ćemo iz početnih uvjeta. Za $t \geq 0$ vrijedi $g(t) = u(t, 0) = v(t, 0) = \phi(t)$, a za $t \leq 0$ je $g(t) = u(t, t^2) = v(t - t^4, t^2) = \phi(t - t^4)$.

Prethodno nas motivira da definiramo funkciju $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ t - t^4, & t \leq 0, \end{cases}$$

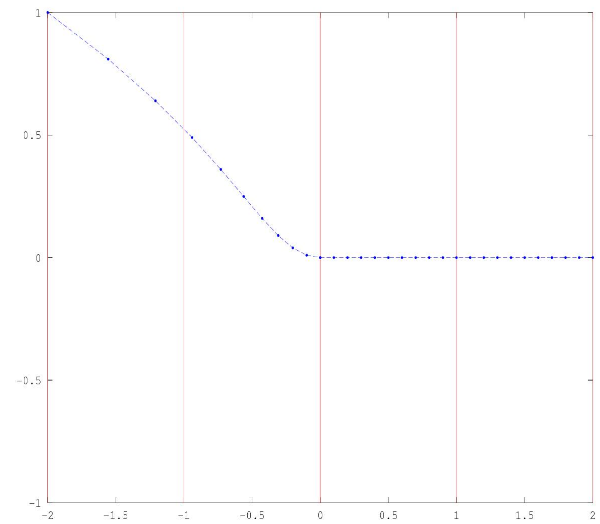
za koju se lako provjeri da je $C^3(\mathbb{R})$ bijekcija koja nije iz $C^4(\mathbb{R})$. Kako je $\psi'(t) \neq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, možemo primijeniti teorem o inverznoj funkciji za zaključiti da je ψ^{-1} također iz $C^3(\mathbb{R})$ i da nije iz $C^4(\mathbb{R})$. (Može se naći i eksplicitna formula za inverz jer je ψ polinom stupnja 4 za $t \leq 0$).

Zaključujemo da je $\phi = g \circ \psi^{-1}$, a kako je $u(x, y) = v(\xi, \eta) = \phi(\xi)$, slijedi

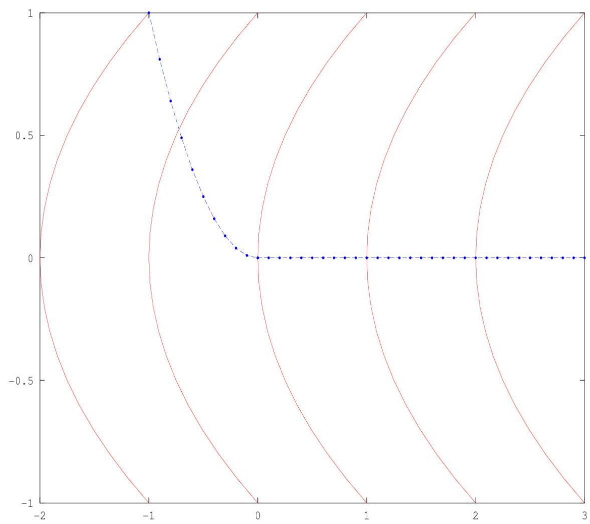
$$u(x, y) = g \circ \psi^{-1}(x - y^2),$$

i u je $C^3(\mathbb{R}^2)$ funkcija kao kompozicija takvih. Za dokazati da u nije općenito iz $C^4(\mathbb{R}^2)$, uzmimo $g(s) = s$ za svaki $s \in \mathbb{R}$ (ili bilo koji $C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ difeomorfizam; štoviše može biti čak i samo lokalni C^4 difeomorfizam oko 0) i definirajmo krivulju $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ s $\gamma(t) = (t, 0)$. Tada kada bi u bio $C^4(\mathbb{R}^2)$, posebno bi bio takav i $u \circ \gamma$, no $u \circ \gamma(t) = \psi^{-1}(t)$, što je kontradikcija.

Konačno, kako je očito iz jednadžbe $v_\eta = 0$ da su pravci $\xi = C$, $C \in \mathbb{R}$, karakteristike, slijedi da su karakteristike u početnom koordinatnom sustavu krivulje $x - y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$ (ovdje koristimo da su karakteristike očuvane promjenom koordinatnog sustava, za našu jednadžbu je zapravo lako provjeriti direktno da su karakteristike u početnom koordinatnom sustavu oblika $x - y^2 = C$ preko jednadžbi za karakteristike).



Slika 1: (ξ, η) - koordinate



Slika 2: (x, y) - koordinate

3. Prepoznajemo da je $\mathsf{a}(x,y,z) = (\cos y, 1)$ i $\mathsf{b}(x,y,z) = \frac{4y}{(y^2-1)^2}$. Rubni uvjet je zadan na krivulji $S = \{F = 0\}$ gdje je $F(x,y) = y$, pa je normala $\nabla F(x,y) = (0,1)$. Slijedi da je za $(x_0, 0) \in S$

$$\mathsf{a}(x_0, 0, g(x_0)) \cdot \nabla F(x_0, 0) = 1 \neq 0,$$

i zaključujemo da nema karakterističnih točaka.

Sljedeće rješavamo inicijalni problem za karakteristične jednadžbe

$$\begin{aligned} x'(\tau) &= \cos(y(\tau)) \\ y'(\tau) &= 1 \\ z'(\tau) &= \frac{4y(\tau)}{(y(\tau)^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

s početnim uvjetima $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $z(0) = g(x_0)$. Iz druge jednadžbe dobivamo da je $y(\tau) = \tau$, pa uvrstimo li to u prvu jednadžbu i integriramo, dobivamo da je $x(\tau) = x_0 + \sin(\tau)$. Isto tako uvrstimo i u treću jednadžbu i integriranjem dobivamo $z(\tau) = g(x_0) + \frac{2}{1-\tau^2} - 2$. Dakle, karakteristika kroz $(x_0, 0, g(x_0))$ je

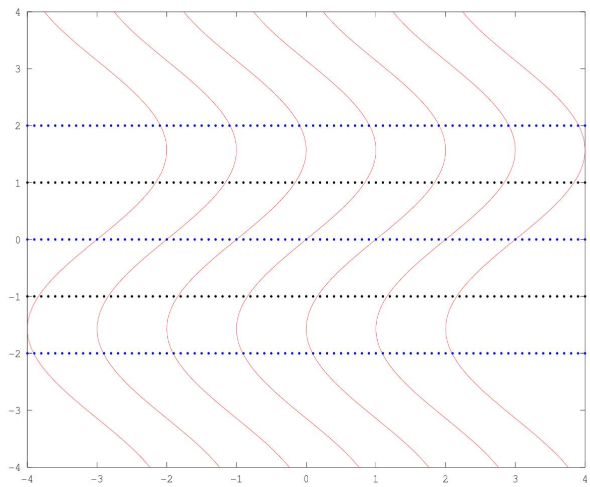
$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + \sin(\tau) \\ y(\tau) &= \tau \\ z(\tau) &= g(x_0) + \frac{2}{1-\tau^2} - 2. \end{aligned}$$

Želimo da projicirana karakteristika prolazi kroz neku zadanu točku $(x,y) \in \Omega$. Iz prethodnog dobivamo jednadžbe $x = x_0 + \sin(\tau)$ i $y = \tau$ pa je $x_0 = x - \sin(y)$ i $\tau = y$. Slijedi da je naše rješenje $u(x,y) = z(\tau) = g(x - \sin y) + \frac{2}{1-y^2} - 2$ i vidimo da je dobro definirano na Ω.

Kako je rubni uvjet zadan na samo jednoj komponenti povezanosti, rješenje nije jedinstveno. Funkcija definirana s

$$u(x,y) = \begin{cases} g(x - \sin y) + \frac{2}{1-y^2} - 2, & \text{za } -1 < y < 1 \\ \frac{2}{1-y^2} & \text{za } y > 1 \text{ ili } y < -1 \end{cases}$$

je također rješenje na Ω. Primjer krivulja na kojima treba dodatno zadati vrijednosti funkcije u da rješenje bude jedinstveno su $\{y = -2\}$ i $\{y = 2\}$ jer projicirane karakteristike pokrivaju cijeli prostor i svaka projicirana karakteristika siječe ove krivulje.



4. Definiramo funkciju $\nu(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ pri čemu je γ_1 realni, a γ_2 imaginarni dio krivulje γ. Reparametrizirajući ako treba u suprotnom smjeru, možemo pretpostaviti da je ν vanjska (jedinična) normala na $\operatorname{Fr}\Omega$; ovo će promijeniti predznak integrala, a to nije važno jer tvrdimo da je integral jednak 0. Raspišimo izraz $\int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t$.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b (f_1 \circ \gamma(t) + \mathrm{i} f_2 \circ \gamma(t))(\gamma_1' + \mathrm{i}\gamma_2')\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f_1 \circ \gamma(t)\gamma_1' - f_2 \circ \gamma(t)\gamma_2'\mathrm{d}t \\
&\quad + \mathrm{i} \int_a^b f_2 \circ \gamma(t)\gamma_1' + f_1 \circ \gamma(t)\gamma_2'\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (f_1 \circ \gamma(t)\nu_2(t) + f_2 \circ \gamma(t)\nu_1(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \\
&\quad + \mathrm{i} \int_a^b (f_2 \circ \gamma(t)\nu_2(t) - f_1 \circ \gamma(t)\nu_1(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \\
&= \int_{\operatorname{Fr}\Omega} (f_1\nu_2 + f_2\nu_1)\mathrm{d}S + \mathrm{i} \int_{\operatorname{Fr}\Omega} (f_2\nu_2 - f_1\nu_1)\mathrm{d}S \\
&= \int_\Omega (\partial_y f_1 + \partial_x f_2)\mathrm{d}S + \mathrm{i} \int_\Omega (\partial_y f_2 - \partial_x f_1)\mathrm{d}S \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost slijedi iz Cauchy-Riemannovih uvjeta.