Kolokvij: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I
24.01.2017.

Zadatak 1. [12+13]

(a) Nađite rješenje zadaće

$$\begin{cases} xu_x - yu_y & = 2\sqrt{u} \\ u(s,s) & = e^{-s}, \quad s > 0 \end{cases}$$

na području $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

(b) Nađite rješenje zadaće

$$\begin{cases} yu_x - xu_y & = 0 \\ u(s,s) & = s, \quad s > 0 \end{cases}$$

na području $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

Zadatak 2. [15] Lagrangeevom metodom nađite opće rješenje jednadžbe

$$-xu_x + yu_y = x^3 - y^2$$

i odredite uvjete uz koje rješenje postoji.

Zadatak 3. [20]

Konstruirajte Greenovu funkciju za Laplaceovu jednadžbu za domenu

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d | 1 < \|x\| < R\}$$

pri čemu je $R > 1$ i $d > 2$.

Zadatak 4. [25] Izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - \triangle u & = f \\ u(0, \cdot, \cdot) & = g \end{cases}$$

na području $\{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | t > 0\}$ pri čemu je $f(t, x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2$ i $g(x_1, x_2) = e^{-x_1}$.

Zadatak 5. [5+5+5]

(a) Dokažite da je opće rješenje jednadžbe $u_{xy} = 0$ oblika $u(x,y) = F(x) + G(y)$ za proizvoljne funkcije F i G.

(b) Koristeći zamjenu varijabli $\xi = x + t$ i $\eta = x - t$, dokažite da je $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ako i samo ako $u_{\xi\eta} = 0$.

(c) Izvedite D'Alembertovu formulu za rješenje valne jedandžbe u jednoj dimenziji.

Ljudevit Palle