Druga zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

12.01.2017.

1. [7] Lagrangeevom metodom nađite opće rješenje jednadžbe

$$yuu_x + xuu_y = xy.$$

2. [8] Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} -\triangle u &= f \\ u(\cdot,\cdot,0) &= 0 \end{cases}$$

na području $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$ pri čemu je $f(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_3}\sin(x_1)\cos(x_2)$.

3. [8] Izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= f \\ u(0,\cdot,\cdot) &= g \end{cases}$$

na području $\{(t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 | t > 0\}$ pri čemu je $f(t,x_1,x_2) = t\sin(t)$ i $g(x_1,x_2) = e^{-x_1^2}\cos(x_2)$.

4. [7] Neka je u rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u(0,\cdot) &= g \\ u_t(0,\cdot) &= h \end{cases}$$

na području $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$ pri čemu su g i h glatke funkcije s kompaktnim nosačem. Definiramo kinetičku energiju $k(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\mathrm{d}x$ i potencijalnu energiju $p(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\mathrm{d}x$. Dokažite da izraz $k(t)+p(t)$ ne ovisi o vremenu te da postoji t_0 takav da je $k(t) = p(t)$ za svaki $t \geq t_0$.

Zadaću predajete prije početka kolokvija.

Ljudevit Palle