Prva zadaća: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

08.11.2016.

1. [7] Nađite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + \mathsf{c} \cdot \nabla u &= \frac{f}{u} \\ u(\cdot, 0) &= g, \end{cases}$$

pri čemu su zadane funkcije $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+)$ i $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ strogo pozitivne te c konstantni vektor.

2. [8] Riješite zadaću

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{za} \quad x \geq 0 \\ u(x,x^2) &= g(x) \qquad \text{za} \quad x < 0 \end{cases}$$

na $\mathbb{R}^2$ transformacijom jednadžbe u novi koordinatni sustav $\xi = x - y^2$, $\eta = y$. Skicirajte projicirane karakteristike u početnom koordinatnom sustavu i u novom koordinatnom sustavu. Kakva je glatkoća rješenja ako je $g \in C^\infty(\mathbb{R})$?

3. [8] Metodom karakteristika riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} (\cos y)u_x + u_y &= \frac{4y}{(y^2-1)^2} \\ u(\cdot, 0) &= g \end{cases}$$

na $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm 1\}$. Skicirajte projicirane karakteristike. Pokažite da rješenje nije jedinstveno na Ω i dajte primjer krivulje (ili krivulja) na kojima treba biti dodatno zadana vrijednost funkcije u tako da rješenje bude jedinstveno.

4. [7] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 1-povezano područje čiji se rub $\operatorname{Fr}\Omega$ može parametrizirati regularnom C^1 krivuljom $\gamma : [a,b] \to \operatorname{Fr}\Omega$ takvom da je $\gamma(a) = \gamma(b)$. Nadalje, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcija iz $C^1(\operatorname{Cl}\Omega)$ koja zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete. Koristeći formulu

$$\int_\Omega g_{x_i} \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{Fr}\Omega} g\nu_i \mathrm{d}S(x)$$

koja vrijedi za svaki $g \in C^1(\operatorname{Cl}\Omega)$, pri čemu je ν_i i-ta komponenta jedinične vanjske normale ν na rub $\operatorname{Fr}\Omega$, dokažite da funkcija f zadovoljava

$$\oint f \mathrm{d}\gamma = \int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Množenje u drugom integralu je množenje kompleksnih brojeva.

Rješenja treba predati u pisanom obliku najkasnije 18. studenog 2016. do 13h.

Ljudevit Palle