Popravni kolokvij: Parcijalne diferencijalne jednadžbe I

21.02.2017.

Zadatak 1. [15] Metodom karakteristika nađite rješenje zadaće

$$\begin{cases} \frac{1}{2x}u_x - \frac{1}{2y}u_y & = 1 \\ u(s,s) & = s, \quad s > 0 \end{cases}$$

na području $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Skicirajte projicirane karakteristike.

Zadatak 2. [20] Lagrangeevom metodom nađite opće rješenje jednadžbe

$$yu_x - xu_y = x^2 - y^2$$

i odredite uvjete uz koje rješenje postoji. Ako zadamo dodatni uvjet $u(s,s) = s^2$ za $s \geq 0$, dobivamo li rješenje definirano na cijelom $\mathbb{R}^2$?

Zadatak 3. [25] Neka je u rješenje Laplaceove jednadžbe

$$\begin{cases} - \triangle u & = 0 \\ u(x', 0) & = g(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1} \end{cases}$$

na domeni $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d > 0\}$ dano Poissonovom formulom i neka je g ograničena funkcija na rubu Ω takva da je $g(x') = |x'|$ za $|x'| \leq 1$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Dokažite da ∇u nije ograničena u okolini točke $x = 0$.

Zadatak 4. [25] Izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - \triangle u & = f \\ u(0, \cdot, \cdot) & = g \end{cases}$$

na području $\{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | t > 0\}$ pri čemu je $f(t, x_1, x_2) = \sin^2 x_1$ i $g(x_1, x_2) = e^{-x_2}$.

Zadatak 5. [15] Koristeći d'Alembertovu formulu izvedite formulu za rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(0, \cdot) = g, u_t(0, \cdot) = h \\ u(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

na području $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Nađite uvjet (ili uvjete) tako da rješenje bude klase C^2.

Ljudevit Palle