

Sveučilište u Zagrebu
PMF - Matematički odjel

Mario Bukal

Ocjena greške za metodu konačnih
volumnih elemenata

Diplomski rad

Zagreb, travanj 2008.

Sveučilište u Zagrebu
PMF - Matematički odjel

Mario Bukal

Ocjena greške za metodu konačnih
volumnih elemenata

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, travanj 2008.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik

2. _____ , član

3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____

2. _____

3. _____

Sadržaj

I	Uvod	1
II	Eliptičke rubne zadaće	3
1	Slaba derivacija i prostori Soboljeva	3
2	Varijacijska formulacija eliptičkih rubnih zadaća	6
III	Metoda konačnih volumnih elemenata	8
3	Metode konačnih volumena	8
4	Metoda konačnih volumnih elemenata	11
5	Pomoćni rezultati	13
6	Analiza metode	22
7	Ocjene greške metode	29
8	Numerički rezultati	35
IV	Zaključak	43
	Dodaci	44
A	test1.edp	44
B	mat_fvm.cpp	46
C	mat_source.cpp	52
D	test2.edp	55
E	mat_source_sing.cpp	57
	Bibliografija	60

Poglavlje I

Uvod

U ovom radu promatramo korektnost metode konačnih volumnih elemenata za sljedeću eliptičku rubnu zadaću

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena konveksna poligonalna domena s rubom $\partial\Omega$, $A = a_{i,j}(x)$ je 2×2 simetrična i uniformno pozitivno definitna matrica u Ω , a funkcija f je dovoljno regularna tako da gornji rubni problem ima jedinstveno rješenje u određenom prostoru Soboljeva. Pod korektnošću metode podrazumijevamo analizu i ocjenu greške metode u standardnim normama H^1 , L^2 i L^∞ . Pritom koristimo samo linearne konformne elemente na trokutima.

Metode konačnih volumena imaju dugu tradiciju korištenja kao značajan alat za numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi. Općenito govoreći, numerička tehnika metoda konačnih volumena leži negdje između metoda konačnih diferencija i metoda konačnih elemenata. Njihova fleksibilnost baratanja kompliciranim domenama slična je metodi konačnih elemenata, a s druge strane, jednostavnost implementacije možemo usporediti s konačnim diferencijama na jednostavnim mrežama. Također, analiza metode konačnih volumena svodi se na neku od ovih metoda. Važno svojstvo metode konačnih volumena jest i to da numeričko rješenje koje ona generira obično ima neka svojstva sačuvanja.

Metoda konačnih volumnih elemenata koju promatramo u ovom radu je jedna varijacija metode konačnih volumena koju ćemo interpretirati i kao Petrov-Galerkinovu. O korektnosti metode koristeći pritom linearne konformne elemente objavljivano je dosta znanstvenih radova pa izdvojimo samo najvažnije rezultate. To su u prvom redu ocjene greške metode u H^1 i L^2 normi (vidi npr. [3]). Dugo

vremena u literaturi su bile poznate sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq Ch\|u\|_2, \\ \|u - u_h\|_0 &\leq Ch^2\|u\|_3,\end{aligned}$$

gdje su u i u_h egzaktno, odnosno numeričko rješenje metodom konačnih volumnih elemenata. Primjetimo da ove ocjene imaju optimalni red konvergencije kao i odgovarajuće ocjene za metodu konačnih elemenata. Međutim, zahtjev H^3 regularnosti egzaktnog rješenja u L^2 ocjeni očito je prestrog jer u primjenama najčešće nemamo ispunjen taj uvjet. U ovom radu prezentiramo noviji rezultat o korektnosti metode konačnih volumnih elemenata iz rada R. E. Ewinga i drugih [1] koji pokazuje da je za kvadratični red konvergencije metode u L^2 normi dovoljna H^2 regularnost egzaktnog rješenja, ali moramo dodatno pretpostaviti H^1 regularnost funkcije f što nije slučaj kod klasične metode konačnih elemenata. Konkretno, prezentiramo sljedeću L^2 ocjenu

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1)$$

koja je optimalna u smislu da daje najbolji mogući red konvergencije za H^2 regularnost točnog rješenja. Također, na samom kraju ovog rada, kontraprimjerom ćemo pokazati da se zahtjev H^1 regularnosti funkcije f u gornjoj ocjeni ne može oslabiti.

Poglavlje II

Eliptičke rubne zadaće

1 Slaba derivacija i prostori Soboljeva

Mnogi problemi u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi formuliraju se i proučavaju u okviru određenih funkcijskih prostora koji nose ime ruskog matematičara S.L. Soboljeva¹ upravo zbog njegovog ogromnog doprinosa razvoju te teorije.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domena. Za funkciju $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je *apsolutno integrabilna* ako je, u Lebesgueovom smislu,

$$\int_{\Omega} |u| dx < +\infty.$$

Na skupu svih takvih funkcija uvodi se relacija ekvivalencije $u_1 \equiv u_2$ ako je $\int_{\Omega} |u_1 - u_2| dx = 0$. To je dobra relacija ekvivalencije i skup svih klasa ekvivalencije u odnosu na \equiv označava se s $L^1(\Omega)$. Tradicionalno se govori o funkcijama iz $L^1(\Omega)$, a pritom podrazumijevamo klase. Na isti način uvode se prostori $L^p(\Omega)$ kao klase svih Lebesgue izmjerivih funkcija u na Ω za koje je

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty, & \quad 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty, & \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Dobro je poznato da su $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ Banachovi prostori (vidi [4]) s normama

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,\Omega} &= \left\{ \int_{\Omega} |u|^p dx \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{\infty,\Omega} &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, & p = \infty, \end{aligned}$$

¹Sergej L. Soboljev (1908 – 1989)

te da je $L^2(\Omega)$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(u, v)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} uv dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Kada je jasno o kojoj domeni je riječ, indeks Ω u gornjim oznakama normi i skalarnog produkta najčešće se ispušta. Sljedeći teorem pokazuje nam u kakvom su odnosu L^p prostori ako je domena ograničena.

Teorem 1.1 *Neka je Ω ograničena domena i $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Ako je $u \in L^q(\Omega)$ onda je također $u \in L^p(\Omega)$ i*

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q,$$

tj. $L^q(\Omega)$ je neprekidno uložen u $L^p(\Omega)$. Nadalje, ako je $u \in L^\infty(\Omega)$ onda vrijedi

$$\|u\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p.$$

Dokaz. Vidi [4]. □

Za funkciju u , definiranu skoro svuda na Ω , kažemo da je *lokalno integrabilna* ako je $u \in L^1(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$. Skup svih takvih funkcija označava se s $L^1_{loc}(\Omega)$.

S D^α označavamo diferencijalni operator reda $|\alpha|$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

gdje je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ *multi-indeks* i $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Definicija 1.1 *Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i α multi-indeks. Ako postoji funkcija $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da vrijedi*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onda kažemo da je g_α slaba derivacija od u .

Definicija 1.2 *Za proizvoljan prirodan broj m i $1 \leq p \leq \infty$ definira se prostor Soboljeva $W^{m,p}(\Omega)$ s*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ za sve } 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Na prostoru $W^{m,p}(\Omega)$ definira se norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty,\Omega}, \quad p = \infty,$$

uz koju je $W^{m,p}(\Omega)$ Banachov (vidi [4]). Često koristimo i polunorme $|\cdot|_{k,p,\Omega}$, $0 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$ definirane s

$$|u|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$|u|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{\infty,\Omega}, \quad p = \infty.$$

Zbog njihove važnosti, za prostore $W^{m,2}(\Omega)$ koristimo posebnu oznaku, $H^m(\Omega)$, a normu i polunorme, kada je jasno o kojoj domeni je riječ, označavamo sa $\|\cdot\|_m$ i $|\cdot|_k$. Dogovorna oznaka za prostor $L^2(\Omega)$ je $H^0(\Omega)$ pa u skladu s time L^2 normu u daljnjem označavamo s $\|\cdot\|_0$.

U teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi važni su i prostori $H_0^m(\Omega)$ koji se mogu definirati kao upotpunjenje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u normi $\|\cdot\|_m$. Također, prostori $H^m(\Omega)$ i $H_0^m(\Omega)$ su Hilbertovi (vidi [4]) sa skalarnim produktom

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0.$$

Za prostor $H_0^1(\Omega)$ označimo s $H^{-1}(\Omega)$ njegov dualni prostor, tj. prostor linearnih neprekidnih funkcionala na $H_0^1(\Omega)$, a djelovanje funkcionala $f \in H^{-1}(\Omega)$ na $v \in H_0^1(\Omega)$ označavamo s $\langle f, v \rangle$. Na prostoru $H^{-1}(\Omega)$ uvodimo sljedeću normu:

$$\|f\|_{-1} = \sup\{\langle f, v \rangle \mid v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_1 \leq 1\}.$$

2 Varijacijska formulacija eliptičkih rubnih zadaća

Eliptičke rubne zadaće matematički su modeli koji opisuju ravnotežna stanja mnogih fizikalnih procesa.

Kao što je već i naznačeno u Uvodu, određenosti radi, promatramo Dirichletovu rubnu zadaću s homogenim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena s dovoljno glatkim rubom $\partial\Omega$. *Klasično rješenje* zadaće (2.1) je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u svim točkama domene i poništava se na rubu. Da bi imali takvo rješenje koeficijenti matrice A moraju biti barem neprekidno derivabilne funkcije, a funkcija f barem neprekidna. Takav strogi zahtjev na glatkoću ulaznih parametara u jednadžbi često je neprirodan u opisu fizikalnih procesa. Naime, prirodno je da koeficijenti jednadžbe mogu biti i funkcije koje imaju skokove. Na taj način dolazi se do potrebe generaliziranja smisla diferencijalne jednadžbe, a time i pojma rješenja. Najprirodniji način bio bi zamjena diferencijalne jednadžbe integralnom jer to fizikalno gledajući obično predstavlja neki zakon sačuvanja, međutim pokazuje se da s teorijskog stajališta to i nije jako korisno. Drugi način generalizacije je *varijacijska formulacija* koja ima dosta dodirnih točaka s integralnom formulacijom, a teorijski je puno pogodnija za daljnju analizu rubnih zadaća.

Pomnožimo jednadžbu iz (2.1) s proizvoljnom *test funkcijom* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ te prointegrirajmo taj izraz po cijeloj domeni Ω . Korištenjem *formule parcijalne integracije* i *Teorema o divergenciji* dobivamo

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.2)$$

Dakle, ako je u klasično rješenje zadaće (2.1) onda u zadovoljava jednakost (2.2) za sve $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Zbog gustoće prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u $H_0^1(\Omega)$ (vidi [5]) pokazuje se da jednakost (2.2) vrijedi i ako umjesto glatke funkcije stavimo $v \in H_0^1(\Omega)$. Odavde se prirodno nameće generalizacija zadaće (2.1),

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ takvo da} \\ \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.3)$$

Sve parcijalne derivacije u (2.3) su u slabom smislu, a integrali su Lebesgueovi. Rješenje zadaće (2.3) tada nazivamo *slabo rješenje* zadaće (2.1). Primjetimo da je

ovo dobra generalizacija zadatka (2.1). Naime, ako je slabo rješenje dovoljno glatko (klase C^2) onda se, koristeći *Osnovnu lemu varijacijskog računa*, lako pokazuje da je ono ujedno i klasično. Sada možemo znatno oslabiti pretpostavke o glatkoći koeficijenata jednadžbe. Da bi gornji integrali u Lebesgueovom smislu postojali, dovoljno je da koeficijenti matrice $A = \{a_{i,j}(x)\}$ budu L^∞ funkcije i f L^2 funkcija.

Pretpostavimo dodatno da je domena Ω konveksan poligon u \mathbb{R}^2 te matrica $A = \{a_{i,j}(x)\}$ 2×2 simetrična i uniformno pozitivno definitna skoro svuda u Ω , tj. postoji konstanta $c > 0$, neovisno o $x \in \Omega$, tako da je

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$$

za sve $\xi \in \mathbb{R}^2$ i za gotovo sve $x \in \Omega$.

Definirajmo formu $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Uz gornje pretpostavke na matricu A , forma a je neprekidna i koercitivna simetrična bilinearna forma na $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Nadalje, za $f \in L^2(\Omega)$ preslikavanje $v \mapsto (f, v)_0$ je neprekidan funkcional na $H_0^1(\Omega)$ i u tom smislu je $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ pa taj funkcional možemo označiti s f . Štoviše, $L^2(\Omega)$ je neprekidno uloženo u $H^{-1}(\Omega)$, tj. $\|f\|_{-1} \leq \|f\|_0$. Zadaću (2.3) možemo sada zapisati u obliku

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ takvo da} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.4)$$

Sljedeći teorem daje egzistenciju i jedinstvenost slabog rješenja zadatka (2.1).

Teorem 2.1 (Lax-Milgramova lema) *Neka je V Hilbertov prostor i $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i koercitivna bilinearna forma. Tada za svaki $f \in V'$ postoji jedinstveni $u \in V$ rješenje zadatka*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Nadalje, vrijedi ocjena

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$$

gdje je $\alpha > 0$ konstanta koercitivnosti forme a .

Dokaz. Vidi [5]. □

Poglavlje III

Metoda konačnih volumnih elemenata

3 Metode konačnih volumena

Iz varijacijske formulacije (2.4) eliptičke zadaće vrlo intuitivno dobivamo najvažniju klasu numeričkih metoda za njeno rješavanje. To je *konformna Galerkinova metoda konačnih elemenata*:

$$\begin{cases} \text{naći } \tilde{u}_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega) \text{ takvo da} \\ a(\tilde{u}_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (3.1)$$

gdje je V_h konačnodimenzionalni potprostor od $H_0^1(\Omega)$.

Za razliku od metode konačnih elemenata koja prirodno slijedi iz varijacijske formulacije, osnovna ideja metode konačnih volumena zapravo dolazi od integralne formulacije eliptičke zadaće koju smo prethodno odbacili kao jednu moguću generalizaciju eliptičkih diferencijalnih jednadžbi.

Za definiciju metode konačnih volumena prije svega potrebno je napraviti konačnu subdiviziju domene takvu da je svaka poddomena poligon i presjek bilo koje dvije poddomene je prazan skup. Poddomene u toj subdiviziji nazivamo *kontrolni volumeni*. Takvu subdiviziju moguće je napraviti na više načina i ovisno o tome dobivamo različite metode.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligonalna domena i \mathcal{T}_h *regularna triangulacija* na Ω (vidi [2]) sastavljena od trokuta i indeksirana maksimalnim dijametrom h , tj. $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, gdje h_K označava dijametar trokuta K . Označimo s \bar{N}_h skup svih čvorova triangulacije \mathcal{T}_h . Neka je $N_h = \bar{N}_h \cap \Omega$, tj. skup svih čvorova u unutrašnjosti domene Ω . Za čvor $x_i \in \bar{N}_h$ označimo s $\Pi(i)$ skup svih susjednih čvorova od x_i . Konstruirajmo sada dualnu mrežu \mathcal{T}_h^* mreže \mathcal{T}_h na sljedeći način. U svakom trokutu $K \in \mathcal{T}_h$ s vrhovima x_i, x_j i x_k uzmimo točku q u unutrašnjosti

i točke x_{ij} na svakom bridu $\overline{x_i x_j}$. Ravnom crtom $\gamma_{ij,K}$ spojimo točku q sa svakom točkom x_{ij} . Tada za svaki čvor $x_i \in N_h$ s V_i označimo poligon čiji bridovi su $\gamma_{ij,K}$, gdje je $x_i \in K$ i $x_j \in \Pi(i)$. Kažemo da je V_i kontrolni volumen centriran oko čvora x_i . Za čvorove x_i koji leže na rubu domene, pripadne kontrolne volumene V_i konstruiramo na sličan način s tom razlikom da je sada x_i vrh poligona V_i čija granica uključuje i dio granice $\partial\Omega$. Očito imamo

$$\bigcup_{x_i \in \overline{N}_h} V_i = \overline{\Omega}$$

i dualnu mrežu \mathcal{T}_h^* tada definiramo kao kolekciju svi kontrolnih volumena V_i .

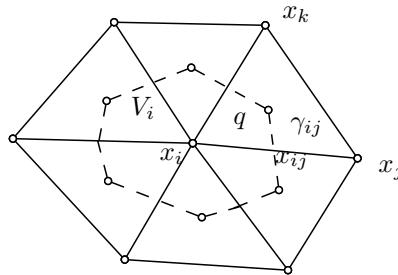
Kao što je za analizu metode konačnih elemenata potrebna regularnost triangulacije \mathcal{T}_h , sličan zahtjev kod metode konačnih volumena imamo na dualnu mrežu \mathcal{T}_h^* .

Definicija 3.1 *Kažemo da je familija dualnih mreža $(\mathcal{T}_h^*)_{h>0}$ regularna ili kvazi-uniformna ako postoji konstanta $C > 0$, neovisna o h , tako da je*

$$C^{-1}h^2 \leq |V_i| \leq Ch^2$$

za sve $V_i \in \mathcal{T}_h^*$ i za sve $h > 0$.

Postoji više načina konstrukcije regularne dualne mreže, no svakako najpopularniji način, jer vodi do relativno jednostavnih računa, je odabir točke q kao težišta (baricentra) trokuta i točaka x_{ij} kao polovišta bridova triangulacije. Takve poligone nazivamo *Donaldovi dijagrami* (vidi [6]).



Slika 3.1: Kontrolni volumen V_i .

Objasnilo ukratko generalnu ideju metoda konačnih volumena. Uzmimo proizvoljni $V_i \in \mathcal{T}_h^*$ i integrirajmo jednadžbu iz (2.1) po V_i . Primjenom Teorema o divergenciji dobivamo

$$-\int_{\partial V_i} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V_i} f dx. \quad (3.2)$$

¹familija kontrolnih volumena može biti konstruirana i na neki drugi način

Odgovarajuća diskretizacija lijeve strane u gornjoj jednakosti vodi na linearnu jednadžbu u kojoj su nepoznanice vrijednosti funkcije u u čvorovima triangulacije. Na isti način, integracijom po ostalim kontrolnim volumenima dolazimo do sistema linearnih jednadžbi koji preostaje numerički riješiti da bi dobili aproksimativno rješenje zadatke (2.1). U tom su smislu metode konačnih volumena slične metodi konačnih diferencija. Međutim, ako i -tu linearnu jednadžbu pomnožimo s proizvoljnim $v_i \in \mathbb{R}$ i sve sumiramo, dolazimo do formulacije problema preko diskretne bilinearne forme. Na taj način metodu konačnih volumena promatramo u okviru teorije metoda konačnih elemenata. Tom idejom zapravo dolazimo do metode konačnih volumnih elementa koju promatramo u ovom radu.

4 Metoda konačnih volumnih elemenata

Neka je V_h standardni prostor linearnih konačnih elemenata definiran na triangulaciji \mathcal{T}_h ,

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_K \text{ je linearna za sve } K \in \mathcal{T}_h \text{ i } v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

i neka je V_h^* prostor konačnih volumnih elemenata definiran na dualnoj triangulaciji \mathcal{T}_h^* s,

$$V_h^* = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega} \text{ je konstanta za sve } V \in \mathcal{T}_h^* \text{ i } v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Označimo s ϕ_i standardne nodalne bazne funkcije pridružene čvorovima triangulacije x_i i s χ_i karakteristične funkcije volumena V_i (vidi [2]). Tada je očito

$$V_h = \text{span}\{\phi_i : x_i \in N_h\} \quad \text{i} \quad V_h^* = \text{span}\{\chi_i : x_i \in N_h\}.$$

Nadalje, definirajmo interpolacijske operatore $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ i $I_h^* : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h^*$ s

$$I_h u = \sum_{x_i \in N_h} u_i \phi_i \quad \text{i} \quad I_h^* u = \sum_{x_i \in N_h} u_i \chi_i,$$

gdje je $u_i = u(x_i)$. Definirajmo diskretnu bilinearnu formu $a_h^* : ((H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cup V_h) \times V_h^* \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$a_h^*(u_h, v_h^*) = - \sum_{x_i \in N_h} v_i^* \int_{\partial V_i} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (u_h, v_h^*) \in ((H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cup V_h) \times V_h^*,$$

gdje je $v_i^* = v_h^*(x_i)$. Dirichletov rubni uvjet iz zadaće (2.1) uzeli smo u obzir odabirom prostora V_h , odnosno V_h^* . Kontrolne volumene koji imaju neprazan presjek s granicom $\partial\Omega$ stoga ne uzimamo u obzir u definiciji forme a_h^* .

Metoda konačnih volumnih elemenata za zadaću (2.1) tada se definira sljedećim diskretnim problemom:

$$\begin{cases} \text{naći } u_h \in V_h \text{ takvo da} \\ a_h^*(u_h, v_h^*) = \langle f, v_h^* \rangle, \quad \forall v_h^* \in V_h^*, \end{cases} \quad (4.1)$$

što je zapravo metoda *Petrov-Galerkinovog* tipa. Iskoristimo li činjenicu da je $I_h^*|_{V_h} : V_h \rightarrow V_h^*$ bijekcija te definiramo diskretnu formu $a_h : ((H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cup V_h) \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$a_h(u_h, v_h) = a_h^*(u_h, I_h^* v_h), \quad u_h \in ((H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cup V_h), \quad v_h \in V_h, \quad (4.2)$$

dobivamo ekvivalentnu formulaciju zadaće (4.1) koja glasi:

$$\begin{cases} \text{naći } u_h \in V_h \text{ takvo da} \\ a_h(u_h, v_h) = \langle f, I_h^* v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.3)$$

Primjetimo da je zadaća (4.3) konformna Galerkinova metoda konačnih elemenata što značajno olakšava daljnju analizu. Naravno, prije svega postavlja se pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja zadaće (4.3), no zbog konačnodimenzionalnosti problema ta dva pitanja su ekvivalentna.

5 Pomoćni rezultati

U ovom paragrafu navodimo pomoćne rezultate koje ćemo kasnije koristiti u analizi metode i ocjenama greške.

Definirajmo najprije diskretne norme i polunormu na prostoru V_h .

Definicija 5.1 Za $u_h \in V_h$ definiramo diskretnu L^2 normu s

$$\|u_h\|_{0,h}^2 = (u_h, u_h)_{0,h},$$

gdje je

$$(u_h, v_h)_{0,h} = \sum_{x_i \in N_h} |V_i| u_i v_i = (I_h^* u_h, I_h^* v_h)_0$$

i $u_i = u_h(x_i)$. Nadalje, definiramo diskretnu H^1 polunormu s

$$|u_h|_{1,h}^2 = \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} |V_i| \left(\frac{u_i - u_j}{d_{ij}} \right)^2,$$

gdje je $d_{ij} = d(x_i, x_j)$, te diskretnu H^1 normu s

$$\|u_h\|_{1,h}^2 = \|u_h\|_{0,h}^2 + |u_h|_{1,h}^2.$$

Kako je prostor V_h konačnodimenzionalan, jasno je da su na njemu norme $\|\cdot\|_0$ i $\|\cdot\|_{0,h}$, odnosno $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_{1,h}$ ekvivalentne, no vrijedi i puno više.

Lema 5.1 Postoje konstante $C_0, C_1 > 0$, neovisne o h , takve da vrijedi

$$\begin{aligned} C_0 \|v_h\|_{0,h} &\leq \|v_h\|_0 \leq C_1 \|v_h\|_{0,h}, & \forall v_h \in V_h, \\ C_0 |v_h|_{1,h} &\leq |v_h|_1 \leq C_1 |v_h|_{1,h}, & \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $K \in \mathcal{T}_h$ proizvoljan trokut čije vrhove označimo s x_1, x_2 i x_3 . Polovišta stranica nasuprotnih vrhovima x_i označimo s m_i , a težište trokuta s q . Za $u_h \in V_h$ korištenjem integracijske formule iz [2] imamo

$$\begin{aligned} \int_K |u_h|^2 dx &= \frac{1}{3} \left(u_h^2(m_1) + u_h^2(m_2) + u_h^2(m_3) \right) |K| \\ &= \frac{1}{12} \left[u_h^2(x_1) + u_h^2(x_2) + u_h^2(x_3) + \left(u_h(x_1) + u_h(x_2) + u_h(x_3) \right)^2 \right] |K|, \end{aligned}$$

odakle je očito

$$\frac{1}{12} \left[u_h^2(x_1) + u_h^2(x_2) + u_h^2(x_3) \right] |K| \leq \int_K |u_h|^2 dx.$$

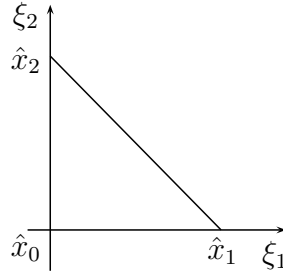
Zbog *Jensenove nejednakosti* vrijedi i druga nejednakost

$$\int_K |u_h|^2 dx \leq \frac{1}{3} \left[u_h^2(x_1) + u_h^2(x_2) + u_h^2(x_3) \right] |K|.$$

Kako je

$$\|u_h\|_{0,h}^2 = \frac{1}{3} \sum_{K=\Delta x_i x_j x_k \in \mathcal{T}_h} \left(u_h^2(x_i) + u_h^2(x_j) + u_h^2(x_k) \right) |K|,$$

sumiranjem gornjih nejednakosti po svim $K \in \mathcal{T}_h$ slijedi uniformna V_h -ekvivalentnost normi $\|\cdot\|_0$ i $\|\cdot\|_{0,h}$. Ostaje još pokazati uniformnu V_h -ekvivalentnost polunormi $|\cdot|_1$ i $|\cdot|_{1,h}$. U tu svrhu koristimo tehniku referentnog elementa, tj. činjenicu da su konačni elementi definirani na trokutima *afino ekvivalentni*. Specificirajmo sada referentni trokut \hat{K} na sljedeći način. Vrhove trokuta u Kartezijevom koordinatnom sustavu označimo s $\hat{x}_0 = (0,0)$, $\hat{x}_1 = (1,0)$ i $\hat{x}_2 = (0,1)$ (vidi Sliku 5.1).



Slika 5.1: Referentni trokut \hat{K} .

Neka je $K \in \mathcal{T}_h$ i F_K pripadno afino preslikavanje definirano na referentnom trokutu \hat{K} s

$$F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K.$$

Navedimo neka važna svojstva preslikavanja F_K koja ćemo koristiti dalje u dokazu.

$$\begin{aligned} K &= F_K(\hat{K}), \\ N_K &= \{x_i\} = \{F_K(\hat{x}_i)\}, \\ P_K &= \{\hat{p} \circ F_K^{-1} : \hat{p} \in \hat{P}\}, \end{aligned}$$

gdje su x_i i \hat{x}_i nodalne točke (u našem slučaju to su vrhovi trokuta) te P_K i \hat{P} prostori (linearnih) polinoma na K , odnosno \hat{K} . Iz *Teorema o zamjeni varijabli* za višestruke integrale direktno slijedi $|K| = |\det B_K| |\hat{K}|$.

Sljedeći rezultat ključan je u ovom dokazu. Uz pretpostavku regularnosti familije \mathcal{T}_h , što je ionako naša stalna pretpostavka u ovom radu², postoje konstante $C_1, C_2 > 0$, neovisne o h , tako da vrijedi

$$\frac{C_1}{h}|\mathbf{v}| \leq |B_K^{-1}\mathbf{v}| \leq \frac{C_2}{h}|\mathbf{v}|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (5.1)$$

Dokaz svih ovih tvrdnji može se naći u standardnim referancama za metodu konačnih elemenata (npr. [2]). Imajući u vidu sve gore navedeno, računamo:

$$\begin{aligned} |u_h|_{1,K}^2 &= \int_K |\nabla u_h|^2 dx = \int_{\hat{K}} |B_K^{-T} \nabla \hat{u}|^2 |\det B_K| d\hat{x} \\ &= |\det B_K| |B_K^{-T} \nabla \hat{u}|^2 |\hat{K}| = |K| |B_K^{-T} \nabla \hat{u}|^2. \end{aligned}$$

Prema (5.1) tada slijedi da postoje konstante $C_1, C_2 > 0$, neovisne o h , tako da je

$$\frac{C_1|K|}{h^2} |\nabla \hat{u}|^2 \leq |u_h|_{1,K}^2 \leq \frac{C_2|K|}{h^2} |\nabla \hat{u}|^2, \quad (5.2)$$

gdje je $\hat{u} = u_h \circ F_K$. $\nabla \hat{u}$ lako izračunamo. $\nabla \hat{u} = (\hat{u}(\hat{x}_1) - \hat{u}(\hat{x}_0), \hat{u}(\hat{x}_2) - \hat{u}(\hat{x}_0)) = (u_h(x_1) - u_h(x_0), u_h(x_2) - u_h(x_0))$, odnosno kraće pisano $\nabla \hat{u} = (u_1 - u_0, u_2 - u_0)$. Korištenjem nejednakosti

$$\begin{aligned} C_3 d(x_i, x_j) &\leq h_K \leq C_4 d(x_i, x_j), \quad x_i, x_j \in K, \quad i \neq j, \\ C_5 \left((u_1 - u_0)^2 + (u_2 - u_0)^2 \right) &\leq (u_1 - u_0)^2 + (u_2 - u_0)^2 + (u_2 - u_1)^2 \\ &\leq C_6 \left((u_1 - u_0)^2 + (u_2 - u_0)^2 \right), \end{aligned}$$

iz (5.2) slijedi

$$|u_h|_{1,K}^2 \leq C_2 |K| \left(\left(\frac{u_1 - u_0}{d(x_1, x_0)} \right)^2 + \left(\frac{u_2 - u_0}{d(x_2, x_0)} \right)^2 + \left(\frac{u_2 - u_1}{d(x_2, x_1)} \right)^2 \right).$$

Sumiranjem posljednje nejednakosti po svim $K \in \mathcal{T}_h$ i uzimajući u obzir regularnost dualne mreže \mathcal{T}_h^* dobivamo

$$|u_h|_1 \leq C_2 |u_h|_{1,h}.$$

Druga nejednakost slijedi analogno iz (5.2). □

Dokažimo sada neke dobro poznate ocjene iz teorije aproksimacija.

² neke tvrdnje u ovom radu vrijede i bez pretpostavke regularnosti familije \mathcal{T}_h

Propozicija 5.1 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligonalna domena i \mathcal{T}_h triangulacija na Ω . Tada postoji $C > 0$, neovisno o h , tako da je

$$\|f - f_K\|_{0,p,K} \leq Ch_K |f|_{1,p,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall f \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (5.3)$$

gdje je $f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f dx$. Također vrijedi i globalna ocjena

$$\|f - \bar{f}\|_{0,p} \leq Ch |f|_{1,p}, \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (5.4)$$

gdje je $\bar{f} \equiv f_K$ na $K \in \mathcal{T}_h$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Uzmimo proizvoljan $K \in \mathcal{T}_h$. Tada za $x \in K$ imamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f_K| &= \left| f(x) - \frac{1}{|K|} \int_K f(y) dy \right| = \frac{1}{|K|} \left| \int_K (f(x) - f(y)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|K|} \int_K |f(x) - f(y)| dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Kako je K konveksan, za sve $x, y \in K$ primjenom Newton-Leibnitzove formule vrijedi

$$f(y) - f(x) = \int_0^{|y-x|} \frac{d}{dt} f(x + tz) dt = \int_0^{|y-x|} \nabla f(x + tz) \cdot z dt,$$

gdje je $z = \frac{y-x}{|y-x|}$. Odavde u nejednakosti (5.5) dobivamo

$$|f(x) - f_K| \leq \frac{1}{|K|} \int_K \int_0^{|y-x|} |\nabla f(x + tz)| |z| dt dy,$$

odnosno zamjenom varijabli $y - x = w$ slijedi

$$|f(x) - f_K| \leq \frac{1}{|K|} \int_{K-x} \int_0^{|w|} \left| \nabla f \left(x + t \frac{w}{|w|} \right) \right| dt dw. \quad (5.6)$$

Prelaskom na polarne koordinate u integraciji po $K - x$, iz (5.6) imamo

$$|f(x) - f_K| \leq \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \int_0^r |\nabla f(x + t\hat{\omega})| dt r dr d\hat{\omega},$$

gdje je \mathbb{S}^1 jedinična kružnica, $\hat{\omega} = \frac{w}{|w|}$, $d\hat{\omega}$ element kružnice, $\delta(\hat{\omega}) = \max\{r : x + r\hat{\omega} \in K\} \leq h_K$, $dw = r dr d\hat{\omega}$ i radijus $r = |w|$. Dalje računamo:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_K| &\leq \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \left[\int_0^r \frac{|\nabla f(x + t\hat{\omega})|}{t} t dt \right] r dr d\hat{\omega} \\
&\leq \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \left[\int_0^{\delta(\hat{\omega})} \frac{|\nabla f(x + t\hat{\omega})|}{t} t dt \right] r dr d\hat{\omega} \\
&= \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^1} \left(\int_0^{\delta(\hat{\omega})} r dr \right) \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \frac{|\nabla f(x + t\hat{\omega})|}{t} t dt d\hat{\omega} \\
&\leq \frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \frac{|\nabla f(x + t\hat{\omega})|}{t} t dt d\hat{\omega}.
\end{aligned}$$

Ponovnom zamjenom varijabli dobivamo

$$|f(x) - f_K| \leq \frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \int_{K-x} \frac{|\nabla f(x + u)|}{|u|} du = \frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \int_K \frac{|\nabla f(y)|}{|x - y|} dy. \quad (5.7)$$

Izraz $I(f) = \int_K \frac{|\nabla f(y)|}{|x - y|} dy$ naziva se *Rieszov potencijal*. Koristeći *Hölderovu nejednakost* možemo ga ocijeniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{|\nabla f(y)|}{|x - y|} dy &= \int_K \frac{|\nabla f(y)|}{|x - y|^{1/p} |x - y|^{1/q}} dy \\
&\leq \left(\int_K \frac{|\nabla f(y)|^p}{|x - y|} dy \right)^{1/p} \left(\int_K \frac{1}{|x - y|} dy \right)^{1/q}, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

gdje su $1 < p, q < \infty$ takvi da vrijedi $1/p + 1/q = 1$. Drugi faktor u (5.8) ocijenimo ovako:

$$\int_K \frac{1}{|x - y|} dy = \int_{x-K} \frac{1}{|z|} dz = \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^{\delta(\hat{\omega})} \frac{1}{r} r dr d\hat{\omega} \leq h_K |\mathbb{S}^1| = 2\pi h_K. \quad (5.9)$$

Korištenjem ocjena (5.9) i (5.8), za proizvoljni $1 \leq p < \infty$, iz (5.7) slijedi

$$\begin{aligned}
\int_K |f(x) - f_K|^p dx &\leq \left(\frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \right)^p \int_K \left(\int_K \frac{|\nabla f(y)|}{|x - y|} dy \right)^p dx \\
&\leq \left(\frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \right)^p \int_K \left(\int_K \frac{1}{|x - y|} dy \right)^{p/q} \left(\int_K \frac{|\nabla f(y)|^p}{|x - y|} dy \right) dx \\
&\leq \left(\frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|} \right)^p (2\pi h_K)^{p/q} \int_K \int_K \frac{|\nabla f(y)|^p}{|x - y|} dy dx. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Zamjenom poretka integracije u (5.10) i primjenom ocjene (5.9) imamo

$$\begin{aligned} \|f - f_K\|_{0,p,K}^p &\leq \left(\frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|}\right)^p (2\pi h_K)^{p/q} \int_K |\nabla f(y)|^p \left(\int_K \frac{dx}{|x-y|}\right) dy \\ &\leq \left(\frac{h_K^2}{2} \frac{1}{|K|}\right)^p (2\pi h_K)^{\frac{p}{q}+1} \int_K |\nabla f(y)|^p dy \\ &= \left(\frac{\pi}{|K|} h_K^3\right)^p |f|_{1,p,K}^p. \end{aligned}$$

Konačno, zbog regularnosti mreže \mathcal{T}_h , za sve $K \in \mathcal{T}_h$ i za sve $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vrijedi

$$\|f - f_K\|_{0,p,K} \leq Ch_K |f|_{1,p,K}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (5.11)$$

gdje konstanta $C > 0$ ne ovisi o h_K .

Zbog gustoće prostora $C^\infty(\bar{\Omega})$ u $W^{1,p}(\Omega)$ za sve $1 \leq p < \infty$ (vidi [5]), prelaskom na limes u (5.11) slijedi (5.3). Uzmimo sada $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$, tada je prema Teoremu 1.1 funkcija $f - f_K \in L^p(\Omega)$ za sve $1 \leq p \leq \infty$. Korištenjem već pokazane ocjene (5.3) za $1 \leq p < \infty$, prema Teoremu 1.1 imamo

$$\|f - f_K\|_{0,\infty,K} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f - f_K\|_{0,p,K} \leq Ch_K \lim_{p \rightarrow \infty} |f|_{1,p,K} = Ch_K |f|_{1,\infty,K}.$$

Time smo u potpunosti pokazali (5.3). Globalna ocjena (5.4) očito je direktna posljedica lokalne. \square

Propozicija 5.2 (Lokalni Teorem o tragu) *Neka je \mathcal{T}_h triangulacija na Ω . Tada za svaki $K \in \mathcal{T}_h$ i za sve $u \in H^1(K)$ vrijedi*

$$\|u\|_{0,\partial K} \leq C(h_K^{1/2}|u|_{1,K} + h_K^{-1/2}\|u\|_{0,K}), \quad (5.12)$$

gdje je $C > 0$ konstanta neovisna o K .

Dokaz. I u dokazu ove propozicije koristimo tehniku referentnog elementa. Uzmimo $K \in \mathcal{T}_h$ te neka je F_K pripadno afino preslikavanje. Neka je $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \partial\hat{K}$ globalna parametrizacija ruba referentnog trokuta. Kako F_K bijektivno preslikava $\partial\hat{K}$ u ∂K , tada je $F_K \circ \hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \partial K$ globalna parametrizacija od ∂K pa po definiciji krivuljnog integrala imamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} |u|^2 d\sigma &= \int_{F_K(\partial\hat{K})} |\hat{u} \circ F_K^{-1}|^2 d\sigma = \int_0^1 |\hat{u} \circ F_K^{-1} \circ F_K \circ \hat{\gamma}|^2 |(F_K \circ \hat{\gamma})'| dt \\ &= \int_0^1 |\hat{u} \circ \hat{\gamma}|^2 |\nabla F_K \hat{\gamma}'| dt = \int_0^1 |\hat{u} \circ \hat{\gamma}|^2 |B_K \hat{\gamma}'| dt \\ &\leq \|B_K\| \int_0^1 |\hat{u} \circ \hat{\gamma}|^2 |\hat{\gamma}'| dt = \|B_K\| \int_{\partial\hat{K}} |\hat{u}|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Odnosno, dobili smo ocjenu

$$\|u\|_{0,\partial K}^2 \leq \|B_K\| \|\hat{u}\|_{0,\partial \hat{K}}^2.$$

Korištenjem *Teorema o tragu* (vidi [5]) na referentnom trokutu slijedi

$$\|u\|_{0,\partial K}^2 \leq \hat{C} \|B_K\| (\|\hat{u}\|_{1,\hat{K}}^2 + \|\hat{u}\|_{0,\hat{K}}^2),$$

gdje $\hat{C} > 0$ ovisi samo o referentnom trokutu \hat{K} . Nadalje, iskoristimo sljedeće ocjene:

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,\hat{K}} &\leq C |\det B_K|^{-1/2} \|B_K\|^m |v|_{m,K}, \quad \forall m \geq 0, \\ \|B_K\| &\leq Ch_K \quad \text{i} \quad h_K^2 \leq C |\det B_K|, \end{aligned}$$

gdje $C > 0$ ne ovisi o trokutu K (vidi [2]). Konačno imamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\partial K}^2 &\leq C \|B_K\| (|\det B_K|^{-1} \|B_K\|^2 |u|_{1,K}^2 + |\det B_K|^{-1} \|u\|_{0,K}^2) \\ &\leq C (h_K |u|_{1,K}^2 + h_K^{-1} \|u\|_{0,K}^2), \end{aligned}$$

a odavde lagano dobivamo ocjenu (5.12). □

Teorem 5.1 *Neka je $u \in H^2(\Omega)$. Tada postoji konstanta $C > 0$, neovisna o $K \in \mathcal{T}_h$, tako da vrijedi*

$$\|u - I_h u\|_{1,K} \leq Ch_K |u|_{2,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (5.13)$$

odnosno

$$\|u - I_h u\|_1 \leq Ch |u|_2. \quad (5.14)$$

Dokaz. Vidi [6]. □

Propozicija 5.3 *Za sve $\phi_h \in V_h$ i za svaki $K \in \mathcal{T}_h$ vrijedi*

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,K} \leq h_K |\phi_h|_{1,K}, \quad (5.15)$$

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,\partial K} \leq Ch_K^{1/2} |\phi_h|_{1,K}, \quad (5.16)$$

gdje je $C > 0$ konstanta neovisna o h_K . Sumiranjem nejednakosti (5.15) po svim $K \in \mathcal{T}_h$ dobivamo globalnu ocjenu

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_0 \leq h |\phi_h|_1, \quad \forall \phi_h \in V_h. \quad (5.17)$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $\phi_h \in V_h$ i $K \in \mathcal{T}_h$ te označimo vrhove od K s x_1, x_2 i x_3 . Tada računamo:

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,K}^2 = \int_K |\phi_h - I_h^* \phi_h|^2 dx = \sum_{i=1}^3 \int_{K \cap V_i} |\phi_h(x) - \phi_h(x_i)|^2 dx.$$

Budući da je $\nabla \phi_h|_K = \text{const}$, slijedi

$$|\phi_h(x) - \phi_h(x_i)| \leq |x - x_i| |\nabla \phi_h(x)| \leq h_K |\nabla \phi_h(x)|, \quad \forall x \in K, \quad i = 1, 2, 3.$$

Stoga je

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,K}^2 \leq h_K^2 \sum_{i=1}^3 \int_{K \cap V_i} |\nabla \phi_h(x)|^2 dx = h_K^2 |\phi_h|_{1,K}^2.$$

Analogno dobivamo

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,\partial K}^2 \leq h_K^2 \sum_{i=1}^3 \int_{\partial K \cap V_i} |\nabla \phi_h(x)|^2 dx = h_K^2 |\nabla \phi_h|^2 |\partial K| \leq Ch_K^3 |\nabla \phi_h|^2.$$

Zbog regularnosti triangulacije \mathcal{T}_h slijedi

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,\partial K}^2 \leq Ch_K |K| |\nabla \phi_h|^2 = Ch_K \int_K |\nabla \phi_h|^2 dx = Ch_K |\phi_h|_{1,K}^2,$$

gdje je $C > 0$ konstanta neovisna o K . □

Lema 5.2 Za sve $w_h \in V_h$ vrijedi

$$\int_K (w_h - I_h^* w_h) dx = 0, \quad \text{za sve } K \in \mathcal{T}_h.$$

Dokaz. Neka su ϕ_i bazne funkcije pridružene vrhovima trokuta $K \in \mathcal{T}_h$ te $E_i = K \cap V_i$. Tada je

$$\int_K I_h^* w_h dx = \sum_{x_i \in K} \int_{E_i} I_h^* w_h dx = \sum_{x_i \in K} w_i |E_i|,$$

gdje je $w_i = w_h(x_i)$. S druge strane računamo

$$\begin{aligned} \int_K w_h dx &= \sum_{x_i \in K} w_i \int_K \phi_i dx = \sum_{x_i \in K} w_i \sum_{x_j \in K} \int_{E_j} \phi_i dx \\ &= \sum_{x_i \in K} w_i \sum_{x_j \in K} \int_{E_i} \phi_j dx = \sum_{x_i \in K} w_i \int_{E_i} \left(\sum_{x_j \in K} \phi_j \right) dx \\ &= \sum_{x_i \in K} w_i \int_{E_i} dx = \sum_{x_i \in K} w_i |E_i|, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da su ϕ_i zapravo baricentričke koordinate na K te da vrijedi $\int_{E_j} \phi_i dx = \int_{E_i} \phi_j dx$. \square

Propozicija 5.4 Za sve $\phi_h \in V_h$ vrijedi

$$\|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{-1} \leq Ch^2 |\phi_h|_1, \quad (5.18)$$

gdje je $C > 0$ konstanta koja ne ovisi o h .

Dokaz. Po definiciji norme $\|\cdot\|_{-1}$ i svojstvu monotonosti supremuma imamo

$$\begin{aligned} \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{-1} &= \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H_0^1(\Omega)}} (\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi)_0 \\ &= \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H_0^1(\Omega)}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi)_{0,K} \\ &\leq \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H^1(\Omega)}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi)_{0,K}. \end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi je $(\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi)_{0,K} = (\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi - \phi_K)_{0,K}$ pa u daljnjem ocjenjivanju primjenom Schwarz-Cauchyjeve nejednakosti i Propozicije 5.1 dobivamo

$$\begin{aligned} \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{-1} &\leq \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H^1(\Omega)}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\phi_h - I_h^* \phi_h, \phi - \phi_K)_{0,K} \\ &\leq \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H^1(\Omega)}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,K} \|\phi - \phi_K\|_{0,K} \\ &\leq \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H^1(\Omega)}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{0,K} |\phi|_{1,K} \\ &\leq Ch \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_0 \sup_{\substack{\|\phi\|_1 \leq 1 \\ \phi \in H^1(\Omega)}} |\phi|_1 \\ &\leq Ch \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_0. \end{aligned}$$

Konačno, prema Propoziciji 5.3 slijedi ocjena (5.18). \square

6 Analiza metode

U svim narednim tvrdnjama pretpostavljamo da su elementi matrice A iz jednačbe (2.1) $W^{1,\infty}$ funkcije na svakom trokutu K triangulacije \mathcal{T}_h , a točke diskontinuiteta (ako postoje) nalaze se na bridovima triangulacije.

Sljedeća lema ključna je u analizi metode konačnih volumnih elemenata. Ona daje eksplicitnu vezu formi a i a_h te pokazuje koliko se, u ovisnosti o h , diskretna forma a_h razlikuje od forme a .

Lema 6.1 *Za sve $u_h, v_h \in V_h$ vrijedi*

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + E_h(u_h, v_h), \quad (6.1)$$

gdje je

$$\begin{aligned} E_h(u_h, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A - A_K) \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \\ &\quad - \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \frac{1}{2} (v_i - v_j) \int_{\gamma_{ij}} (A - \bar{A}) \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma, \\ A_K &= \frac{1}{|K|} \int_K A(x) dx, \quad K \in \mathcal{T}_h, \end{aligned}$$

te

$$\bar{A} \equiv A_K \quad \text{na} \quad K \in \mathcal{T}_h.$$

Nadalje, postoji konstanta $C > 0$, neovisna o h , tako da vrijedi

$$|E_h(u_h, v_h)| \leq Ch \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h}. \quad (6.2)$$

Za dokaz ove leme potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 6.2 *Pretpostavimo da su koeficijenti matrice A po dijelovima konstantne funkcije. Tada vrijedi*

$$a(u_h, v_h) = a_h(u_h, v_h), \quad \forall u_h, v_h \in V_h.$$

Dokaz. Trebamo pokazati da za sve $u_h, v_h \in V_h$ vrijedi

$$- \sum_{x_i \in N_h} v_i \int_{\partial V_i} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} A \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx,$$

odnosno raspisano u bazi

$$\sum_{x_i \in N_h} v_i \sum_{x_j \in N_h} u_j \left[\int_{\partial V_i} -A \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n} d\sigma \right] = \sum_{x_i \in N_h} v_i \sum_{x_j \in N_h} u_j \left[\int_{\Omega} A \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right].$$

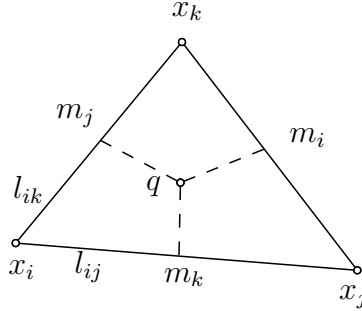
Prema tome, dovoljno je pokazati tvrdnju za bazne funkcije ϕ_i , tj. provjeriti jednakost

$$-\int_{\partial V_i} A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}d\sigma = \int_{\Omega} A\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx, \quad \text{za sve } i \neq j.$$

Odnosno, dovoljno je pokazati da za svaki $K \in \mathcal{T}_h$ za koji je $\partial V_i \cap K \neq \emptyset$ vrijedi

$$-\int_{\partial V_i \cap K} A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}d\sigma = \int_K A\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx.$$

Fiksirajmo sada jedan takav trokut K s vrhovima x_i , x_j i x_k , polovištima stranica m_i , m_j i m_k te težištem q (vidi Sliku 6.1).



Slika 6.1: Trokut K .

Korištenjem Teorema o divergenciji i pretpostavke da je A konstantna po trokutima dobivamo

$$\begin{aligned} -\int_{\partial V_i \cap K} A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}d\sigma &= -\int_{K \cap V_i} \operatorname{div}(A\nabla\phi_j) dx \\ &\quad + \int_{l_{ij}} A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}d\sigma + \int_{l_{ik}} A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}d\sigma \\ &= A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}_{l_{ij}} |l_{ij}| + A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}_{l_{ik}} |l_{ik}|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

gdje je $l_{ij} = \overline{x_i m_j}$, odnosno $l_{ik} = \overline{x_i m_k}$. S druge strane, primjenom formule parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned} \int_K A\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx &= \int_{\partial K} (A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n})\phi_i d\sigma - \int_K \operatorname{div}(A\nabla\phi_j)\phi_i dx \\ &= \int_{x_i x_j} (A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n})\phi_i d\sigma + \int_{x_i x_k} (A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n})\phi_i d\sigma \\ &= A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}_{l_{ij}} \int_{x_i x_j} \phi_i d\sigma + A\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n}_{l_{ik}} \int_{x_i x_k} \phi_i d\sigma. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Primjetimo da je $\int_{x_i x_j} \phi_i d\sigma = \frac{1}{2}|x_i x_j|$, odnosno $\int_{x_i x_k} \phi_i d\sigma = \frac{1}{2}|x_i x_k|$, pa iz (6.3) i (6.4) slijedi tvrdnja. \square

Dokaz Leme 5.3. Uzmimo proizvoljne $u_h, v_h \in V_h$. Tada je

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) - a(u_h, v_h) &= - \sum_{x_i \in N_h} v_i \int_{\partial V_i} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega} A \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx \\ &= - \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} v_i \int_{\gamma_{ij}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx, \end{aligned}$$

gdje je $\gamma_{ij} = \partial V_i \cap \partial V_j$. Neka je granica kontrolnih volumena orijentirana vanjskom normalom, premda sama orijentacija ovdje nije bitna već je važno samo da je konzistentna. Stoga su γ_{ij} i γ_{ji} dvije suprotno orijentirane krivulje pa je $\int_{\gamma_{ji}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\gamma_{ij}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma$ što koristimo u daljnjem računu:

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) - a(u_h, v_h) &= - \frac{1}{2} \sum_{x_i \in \bar{N}_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \left(v_i \int_{\gamma_{ij}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + v_j \int_{\gamma_{ji}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \right) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{x_i \in \bar{N}_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} (v_i - v_j) \int_{\gamma_{ij}} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma - \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A - A_K) \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Prema prethodnoj propoziciji je

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx &= - \sum_{x_i \in N_h} v_i \int_{\partial V_i} \bar{A} \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{x_i \in \bar{N}_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} (v_i - v_j) \int_{\gamma_{ij}} \bar{A} \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem ovog izraza u (6.5) slijedi (6.1).

Pretpostavimo sada da je $A \in W^{1,\infty}(K)$ za sve $K \in \mathcal{T}_h$ i ocjenimo grešku E_h u obliku

$$|E_h(u_h, v_h)| \leq I_1 + I_2.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A - A_K) \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx \right| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |(A - A_K) \nabla u_h| |\nabla v_h| dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|(A - A_K) \nabla u_h\|_{0,K} \|\nabla v_h\|_{0,K}. \end{aligned}$$

Lako se vidi da je

$$\|(A - \bar{A})\nabla u_h\|_{0,K} \leq \|A - \bar{A}\|_{0,\infty,K} \|\nabla u_h\|_{0,K},$$

a jer je $A \in W^{1,\infty}(K)$, prema Propoziciji 5.1 je

$$\|A - \bar{A}\|_{0,\infty,K} \leq Ch_K |A|_{1,\infty,K},$$

gdje je $C > 0$ neovisno o h_K . Stoga je

$$I_1 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K |A|_{1,\infty,K} \|\nabla u_h\|_{0,K} \|\nabla v_h\|_{0,K} \leq Ch |u_h|_1 |v_h|_1.$$

Zbog ekvivalentnosti polunormi $|\cdot|_1$ i $|\cdot|_{1,h}$ (Lema 5.1) slijedi

$$I_1 \leq Ch |u_h|_{1,h} |v_h|_{1,h}. \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} (v_i - v_j) \int_{\gamma_{ij}} (A - \bar{A}) \nabla u_h \cdot \mathbf{n} d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} |v_i - v_j| \int_{\gamma_{ij}} |(A - \bar{A}) \nabla u_h| d\sigma. \end{aligned}$$

Rastavimo integral po γ_{ij} na dijelove $\gamma_{ij,K} = \gamma_{ij} \cap K$ po trokutima $K \in \mathcal{T}_h$ za koje je $\gamma_{ij} \cap K \neq \emptyset$ te napravimo odgovarajuće ocjene integrala po tim dijelovima:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{ij,K}} |(A - \bar{A}) \nabla u_h| d\sigma &\leq \|A - \bar{A}\|_{0,\infty,\gamma_{ij,K}} \int_{\gamma_{ij,K}} |\nabla u_h| d\sigma \\ &\leq \|A - \bar{A}\|_{0,\infty,K} |\nabla u_h| |\gamma_{ij,K}| \\ &\leq \|A - \bar{A}\|_{0,\infty,K} |\nabla u_h| h_K. \end{aligned} \quad (6.7)$$

S druge strane imamo

$$|u_h|_{1,K}^2 = \int_K |\nabla u_h|^2 dx = |\nabla u_h|^2 |K| \geq C |\nabla u_h|^2 h_K^2, \quad (6.8)$$

gdje smo za dobivanje posljednje nejednakosti iskoristili regularnost triangulacije \mathcal{T}_h . Iz (6.7) i (6.8) slijedi da postoji $C > 0$, neovisno o h_K , tako da je

$$\int_{\gamma_{ij,K}} |(A - \bar{A}) \nabla u_h| d\sigma \leq C \|A - \bar{A}\|_{0,\infty,K} |u_h|_{1,K},$$

odakle koristeći Propoziciju 5.1 dobivamo

$$\int_{\gamma_{ij,K}} |(A - \bar{A}) \nabla u_h| d\sigma \leq Ch |A|_{1,\infty,K} |u_h|_{1,K}.$$

Prema tome vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \sum_{K \cap \gamma_{ij} \neq \emptyset} |v_i - v_j| \int_{\gamma_{ij,K}} |(A - \bar{A}) \nabla u_h| d\sigma \\
&\leq Ch |A|_{1,\infty,K} \sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \sum_{K \cap \gamma_{ij} \neq \emptyset} |v_i - v_j| |u_h|_{1,K} \\
&\leq Ch \left(\sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \sum_{K \cap \gamma_{ij} \neq \emptyset} |u_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} \sum_{K \cap \gamma_{ij} \neq \emptyset} h^2 \left(\frac{v_i - v_j}{h} \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Nadalje, zbog regularnosti dualne mreže \mathcal{T}_h^* i činjenice da suma $\sum_{K \cap \gamma_{ij} \neq \emptyset}$ ima najviše dva pribrojnika slijedi

$$I_2 \leq Ch |u_h|_1 \left(\sum_{x_i \in N_h} \sum_{x_j \in \Pi(i)} |V_i| \left(\frac{v_i - v_j}{d_{ij}} \right)^2 \right)^{1/2},$$

odnosno zbog ekvivalentnosti polunormi $|\cdot|_1$ i $|\cdot|_{1,h}$ imamo

$$I_2 \leq Ch |u_h|_{1,h} |v_h|_{1,h}. \quad (6.9)$$

Konačno, prema (6.6) i (6.9) slijedi tvrdnja (6.2). \square

Propozicija 6.1 *Postoje konstante $C_0, C_1 > 0$, neovisne o h , i postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi*

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq C_1 \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h}, \quad u_h, v_h \in V_h, \quad (6.10)$$

$$a_h(u_h, u_h) \geq C_0 \|u_h\|_{1,h}^2, \quad u_h \in V_h. \quad (6.11)$$

Dokaz. Dokaz uniformne V_h -neprekidnosti diskretne forme a_h identičan je postupku ocjenjivanja izraza I_2 iz prethodne leme i stoga ga ovdje izostavljamo. Pokažimo sada uniformnu V_h -koercitivnost forme a_h . Prema Lemi 6.1 postoji $C > 0$, neovisno o h , tako da za sve $u_h \in V_h$ vrijedi

$$|a_h(u_h, u_h) - a(u_h, u_h)| \leq Ch \|u_h\|_{1,h}^2,$$

odnosno

$$a_h(u_h, u_h) - a(u_h, u_h) \geq -Ch \|u_h\|_{1,h}^2.$$

Zbog koercitivnosti forme a i ekvivalentnosti normi $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_{1,h}$ dobivamo

$$a_h(u_h, u_h) \geq (\tilde{\alpha} - Ch) \|u_h\|_{1,h}^2.$$

Odavde je jasno da postoji $h_0 > 0$ takav da je $C_0 = \tilde{\alpha} - Ch_0 > 0$, neovisno o h , i da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi

$$a_h(u_h, u_h) \geq C_0 \|u_h\|_{1,h}^2.$$

□

Korištenjem prethodne propozicije, prema Teoremu 2.1, za dovoljno male $h > 0$ dobivamo rješivost i korektnost zadaće (4.3).

Teorem 6.1 *Postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ i za svaki $f \in L^2(\Omega)$ postoji jedinstveni $u_h \in V_h$ rješenje zadaće (4.3) i pri tome vrijedi*

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C \|f\|_0, \quad (6.12)$$

gdje je $C > 0$ konstanta neovisna o h .

Dokaz. Propozicija 6.1 osigurava ispunjenost dovoljnih uvjeta u Lax-Milgramovoj lemi. Ostaje još samo provjeriti ocjenu (6.12). Uniformna V_h -koercitivnost diskretne forme a_h iz prethodne propozicije i uniformna V_h -ograničenost operatora I_h^* daju

$$\begin{aligned} C_0 \|u_h\|_{1,h}^2 &\leq a_h(u_h, u_h) = \langle f, I_h^* u_h \rangle \leq \|f\|_0 \|I_h^* u_h\|_0 \\ &\leq \|f\|_0 \|u_h\|_{1,h}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\|u_h\|_{1,h} \leq \frac{1}{C_0} \|f\|_0.$$

□

Slično kao i Lema 6.1, sljedeća lema daje nam još jednu važnu vezu forme a i diskretne forme a_h .

Lema 6.3 *Za sve $u_h \in H^2(\Omega) + V_h$ i $v_h \in V_h$ vrijedi*

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= a_h(u_h, v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n})(v_h - I_h^* v_h) d\sigma - \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A \nabla u_h)(v_h - I_h^* v_h) dx. \end{aligned}$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne u_h i $v_h \in V_h$. Formula parcijalne integracije po svim trokutima triangulacije \mathcal{T}_h daje nam:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A \nabla u_h) v_h dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) v_h d\sigma - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) v_h d\sigma - a(u_h, v_h). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Analogno računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A \nabla u_h) I_h^* v_h dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{x_i \in N_h} \int_{K \cap V_i} \operatorname{div}(A \nabla u_h) I_h^* v_h dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{x_i \in N_h} \int_{\partial(K \cap V_i)} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) I_h^* v_h d\sigma \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) I_h^* v_h d\sigma + \\ &\quad + \sum_{x_i \in N_h} \int_{\partial V_i} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) I_h^* v_h d\sigma \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) I_h^* v_h d\sigma - a_h(u_h, v_h). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Oduzimanjem jednakosti (6.13) i (6.14) slijedi tvrdnja leme. \square

Lema 6.4 *Neka je $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ slabo rješenje zadatke (2.1) te $u_h \in V_h$ aproksimativno rješenje metodom konačnih volumnih elemenata. Tada za sve $v_h \in V_h$ vrijedi*

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0.$$

To je svojstvo ortogonalnosti forme a_h .

Dokaz. Po definiciji forme a_h i formuli parcijalne integracije po svakom kontrolnom volumenu, za proizvoljni $v_h \in V_h$ imamo

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, v_h) &= - \sum_{x_i \in N_h} \int_{\partial V_i} A \nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{n} I_h^* v_h d\sigma \\ &= - \sum_{x_i \in N_h} \int_{V_i} \operatorname{div}(A \nabla u) I_h^* v_h dx + \sum_{x_i \in N_h} \int_{\partial V_i} A \nabla u_h \cdot \mathbf{n} I_h^* v_h d\sigma \\ &= (f, I_h^* v_h)_0 - a_h(u_h, v_h) = 0. \end{aligned}$$

\square

7 Ocjene greške metode

Prvo promatramo ocjenu greške metode u H^1 normi. U tu svrhu iskažimo najprije sljedeću lemu.

Lema 7.1 *Neka je u_h rješenje aproksimativne zadaće (4.3). Tada za sve $v_h \in V_h$ vrijedi*

$$a(u_h, v_h) = \langle f, I_h^* v_h \rangle - E_h(u_h, v_h). \quad (7.1)$$

Dokaz. Slijedi direktno iz Leme 6.1 i formulacije zadaće (4.3). \square

Teorem 7.1 *Neka je $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ i $f \in L^2(\Omega)$ te neka su u slabo rješenje zadaće (2.1) i u_h rješenje zadaće (4.3). Pretpostavimo dodatno da je $u \in H^2(\Omega)$. Tada postoji $C > 0$, neovisno o h , i postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch(\|u\|_2 + \|f\|_0). \quad (7.2)$$

Dokaz. Iz koercitivnosti i bilinearnosti forme a te Leme 7.1 slijedi

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_1^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - I_h u) + a(u - u_h, I_h u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - I_h u) + a(u - u_h, \phi_h) \\ &= a(u - u_h, u - I_h u) + a(u, \phi_h) - a(u_h, \phi_h) \\ &= a(u - u_h, u - I_h u) + \langle f, \phi_h \rangle - \langle f, I_h^* \phi_h \rangle + E_h(u_h, \phi_h) \\ &= a(u - u_h, u - I_h u) + \langle f, \phi_h - I_h^* \phi_h \rangle + E_h(u_h, \phi_h), \end{aligned}$$

gdje je $\phi_h = I_h u - u_h \in V_h$. Nadalje, koristeći neprekidnost forme a te Schwarz-Cauchyjevu nejednakost i ocjenu (6.2) dobivamo

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq C \|u - u_h\|_1 \|u - I_h u\|_1 + \|f\|_0 \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_0 + Ch \|u_h\|_{1,h} \|\phi_h\|_{1,h}.$$

Korištenjem Propozicije 5.3, zatim ocjene (5.14) za grešku interpolacije te ocjene (6.12) slijedi

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq Ch \|u - u_h\|_1 |u|_2 + Ch \|\phi_h\|_1 \|f\|_0. \quad (7.3)$$

Nejednakost trokuta, uz ekvivalentnost normi $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_{1,h}$ i ocjena (5.14) daju

$$\|\phi_h\|_{1,h} \leq \|I_h u - u\|_{1,h} + \|u - u_h\|_{1,h} \leq Ch |u|_2 + C \|u - u_h\|_1. \quad (7.4)$$

Iskoristimo sada ocjenu (7.4) u nejednakosti (7.3). Iz toga dobivamo

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq Ch \|u - u_h\|_1 |u|_2 + Ch \|u - u_h\|_1 \|f\|_0 + Ch^2 \|f\|_0 |u|_2.$$

Primjenimo Schwarz-Cauchyjevu nejednakost na prva dva člana u posljednjoj ocjeni. Tada je

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1^2 &\leq Ch^2 \|f\|_0^2 + \frac{1}{4} \|u - u_h\|_1^2 + Ch^2 |u|_2^2 + \frac{1}{4} \|u - u_h\|_1^2 + Ch^2 \|f\|_0 |u|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - u_h\|_1^2 + Ch^2 (|u|_2^2 + \|f\|_0 |u|_2 + \|f\|_0^2), \end{aligned}$$

odnosno

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq Ch^2 (|u|_2 + \|f\|_0)^2,$$

odakle očito slijedi (7.2). \square

Korolar 7.1 *Neka vrijede sve pretpostavke Teorema 7.1 i dodatno pretpostavimo da je $f \in H^1(\Omega)$. Tada vrijedi sljedeća ocjena*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch(\|u\|_2 + h\|f\|_1). \quad (7.5)$$

Dokaz. Analogno dokazu prethodnog teorema, za $\phi_h = I_h u - u_h$ nalazimo:

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq Ch \|u - u_h\|_1 |u|_2 + \|f\|_1 \|\phi_h - I_h^* \phi_h\|_{-1} + Ch \|u_h\|_{1,h} \|\phi_h\|_{1,h}. \quad (7.6)$$

Ocjenimo $\|u_h\|_1$ koristeći nejednakost trokuta i rezultat iz prethodnog teorema,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_1 &\leq \|u_h - u\|_1 + \|u\|_1 \leq Ch(\|u\|_2 + \|f\|_0) + \|u\|_1 \\ &\leq C(\|u\|_2 + h\|f\|_0). \end{aligned}$$

Iskoristimo sada dobivenu ocjenu te Propoziciju 5.4 i ocjenu (7.4) u nejednakosti (7.6):

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1^2 &\leq Ch \|u - u_h\|_1 |u|_2 + Ch^2 \|f\|_1 \|\phi_h\|_{1,h} + Ch(\|u\|_2 + h\|f\|_0) \|\phi_h\|_{1,h} \\ &\leq Ch \|u - u_h\|_1 |u|_2 + Ch^2 \|f\|_1 \|\phi_h\|_{1,h} + Ch \|u\|_2 \|\phi_h\|_{1,h} \\ &\leq Ch \|u - u_h\|_1 \|u\|_2 + Ch^3 \|f\|_1 |u|_2 + Ch^2 \|f\|_1 \|u - u_h\|_1 + Ch^2 \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Nadalje, primjenom Schwarz-Cauchyjeve nejednakosti dobivamo

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq Ch^2 \|u\|_2^2 + \frac{1}{4} \|u - u_h\|_1^2 + Ch^3 \|f\|_1 \|u\|_2 + Ch^4 \|f\|_1^2 + \frac{1}{4} \|u - u_h\|_1^2,$$

odnosno

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq C(h\|u\|_2 + h^2\|f\|_1)^2,$$

što je zapravo tražena ocjena. \square

Sada smo konačno u stanju dokazati centralni rezultat u ovom radu. To je optimalna ocjena pogreške metode u L^2 normi.

Teorem 7.2 *Pretpostavimo da je $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ i $f \in H^1(\Omega)$. Neka je u rješenje zadatice (2.1) koje ima dodatnu H^2 regularnost i u_h rješenje zadatice (4.3). Tada postoji $C > 0$, neovisno o h , i postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi*

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1). \quad (7.7)$$

Dokaz. Neka je $w \in H_0^1(\Omega)$ rješenje zadatice

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = u - u_h, & \text{u } \Omega, \\ w = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.8)$$

Tada prema teoriji regularnosti za eliptičke rubne zadatice (vidi [5]) w je u $H_0^1 \cap H^2(\Omega)$ i vrijedi apriorna ocjena

$$\|w\|_2 \leq C\|u - u_h\|_0, \quad (7.9)$$

gdje konstanta $C > 0$ ovisi samo o domeni Ω i matrici A . Uzimanjem $u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ kao test funkcije te korištenjem ocjene iz Korolara 7.1, za proizvoljni $w_h \in V_h$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0^2 &= a(u - u_h, w - w_h) + a(u - u_h, w_h) \\ &\leq C(h\|u\|_2 + h^2\|f\|_1)\|w - w_h\|_1 + a(u - u_h, w_h). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Prema Lemi 6.3 imamo

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= a_h(u - u_h, w_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(A\nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{n} \right) (w_h - I_h^* w_h) d\sigma - \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A\nabla(u - u_h))(w_h - I_h^* w_h) dx. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir ortogonalnost diskretne forme a_h (Lema 5.6) i jednadžbu iz zadatice (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(A\nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{n} \right) (w_h - I_h^* w_h) d\sigma + \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(w_h - I_h^* w_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A\nabla u_h)(w_h - I_h^* w_h) dx. \end{aligned}$$

Radi preglednosti u daljnjoj analizi, odnosno ocjenjivanju, prethodnu jednakost zapisujemo u obliku

$$a(u - u_h, w_h) = J_1(u_h, w_h) + J_2(u_h, w_h) + J_3(u, u_h, w_h).$$

Izrazi za J_i dani su redom:

$$\begin{aligned} J_1(u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(w_h - I_h^* w_h) dx, \\ J_2(u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(A \nabla u_h)(w_h - I_h^* w_h) dx, \\ J_3(u, u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(A \nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{n} \right) (w_h - I_h^* w_h) d\sigma. \end{aligned}$$

Ocijenimo sada izraze J_i . Koristeći Lemu 5.2 te ocjenu (5.3) iz Propozicije 5.1 i Propoziciju 5.3 imamo

$$\begin{aligned} J_1(u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_K)(w_h - I_h^* w_h) dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f - f_K\|_{0,K} \|w_h - I_h^* w_h\|_{0,K} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K^2 |f|_{1,K} |w_h|_{1,K} \\ &\leq Ch^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |f|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |w_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^2 \|f\|_1 \|w_h\|_{1,h}. \end{aligned}$$

Analogno, koristeći pretpostavku da je $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$, slijedi

$$\begin{aligned} J_2(u_h, w_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\operatorname{div}(A \nabla u_h) - (\operatorname{div}(A \nabla u_h))_K \right) (w_h - I_h^* w_h) dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left((\operatorname{div} A - (\operatorname{div} A)_K) \cdot \nabla u_h \right) (w_h - I_h^* w_h) dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|(\operatorname{div} A - (\operatorname{div} A)_K) \cdot \nabla u_h\|_{0,K} \|w_h - I_h^* w_h\|_{0,K} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} A - (\operatorname{div} A)_K\|_{0,\infty,K} \|\nabla u_h\|_{0,K} \|w_h - I_h^* w_h\|_{0,K} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K^2 |\operatorname{div} A|_{1,\infty,K} |u_h|_{1,K} |w_h|_{1,K} \\ &\leq Ch^2 \|u_h\|_{1,h} \|w_h\|_{1,h} \leq Ch^2 \|f\|_0 \|w_h\|_{1,h}. \end{aligned}$$

Označimo s \tilde{A} matricu definiranu po bridovima E triangulacije \mathcal{T}_h s

$$\tilde{A}(x) = A(x_c), \quad x \in E,$$

gdje je x_c polovište brida E . Budući da je $\int_E (w_h - I_h^* w_h) d\sigma = 0$ za svaki brid E , tada je i $\int_E (\tilde{A} \nabla u_h \cdot \mathbf{n})(w_h - I_h^* w_h) d\sigma = 0$. Zbog neprekidnosti funkcije $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ po bridovima triangulacije i zbog obilaska svakog brida točno dva puta, ali u različitim smjerovima, dobivamo

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\tilde{A} \nabla u \cdot \mathbf{n})(w_h - I_h^* w_h) d\sigma = 0.$$

Prema tome je

$$J_3(u, u_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left((A - \tilde{A}) \nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{n} \right) (w_h - I_h^* w_h) d\sigma.$$

Budući da je, prema *Teoremu ulaganja*, $W^{2,\infty}(K) \subset C^1(K)$, (vidi [4]), primjenom *Teorema srednje vrijednosti* vrijedi $\|A - \tilde{A}\|_{0,\infty,K} \leq Ch_K \|A\|_{1,\infty,K}$ pa u ocjenjivanju izraza J_3 imamo:

$$\begin{aligned} J_3(u, u_h, w_h) &\leq C \|A\|_{1,\infty} h \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} |\nabla(u - u_h)| |w_h - I_h^* w_h| d\sigma \\ &\leq Ch \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,\partial K} \|w_h - I_h^* w_h\|_{0,\partial K} \\ &\leq Ch \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K^{1/2} |\nabla(u - u_h)|_{1,K} + h_K^{-1/2} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,K} \right) \times \\ &\quad \times h_K^{1/2} |w_h|_{1,K} \\ &\leq Ch \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K^{1/2} \|u\|_{2,K} + h_K^{-1/2} \|u - u_h\|_{1,K} \right) h_K^{1/2} \|w_h\|_{1,K}. \end{aligned}$$

U pretposljednjoj nejednakosti iskoristili smo Lokalni Teorem o tragu i ocjenu (5.16) iz Propozicije 5.3. Primjenom Teorema 7.1 dalje dobivamo

$$J_3(u, u_h, w_h) \leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{2,K} \|w_h\|_{1,K} \leq Ch^2 \|u\|_2 \|w_h\|_{1,h}.$$

Skupimo sada ocjene za J_i -ove i uzmimo $w_h = I_h w$. Tada je

$$J_1 + J_2 + J_3 \leq Ch^2 (\|u\|_2 + \|f\|_1) \|I_h w\|_{1,h}.$$

Zbog uniformne V_h -ograničenosti interpolacijskog operatora I_h i ocjene (7.9) imamo

$$\|I_h w\|_{1,h} \leq C \|w\|_2 \leq C \|u - u_h\|_0$$

pa je

$$J_1 + J_2 + J_3 \leq Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1)\|u - u_h\|_0.$$

Iskoristimo ovu posljednju ocjenu i činjenicu da je $w_h = I_h w$ u nejednakosti (7.10). Primjenom interpolacijske ocjene (5.14) dobivamo

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0^2 &\leq Ch(h\|u\|_2 + h^2\|f\|_1)\|w\|_2 + Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1)\|u - u_h\|_0 \\ &\leq Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1)\|u - u_h\|_0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2(\|u\|_2 + \|f\|_1).$$

□

Napomena. Primjerom se može pokazati (vidi [1]) da se glatkoća funkcije f iz prethodnog teorema ne može smanjiti, a da se pritom zadrži kvadratična konvergencija metode u L^2 normi. Potvrdu ovog pokazujemo u sljedećem paragrafu (vidi Primjer 8.2).

Sljedeća dva teorema, koja navodimo bez dokaza, daju ocjenu greške u $W^{1,\infty}$, odnosno L^∞ normi.

Teorem 7.3 *Neka je $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ i $f \in L^\infty(\Omega)$ te neka su u i u_h rješenja zadaća (2.1) i (4.3) respektivno. Pretpostavimo dodatno da je $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Tada postoji $C > 0$, neovisno o h , i postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi*

$$\|u - u_h\|_{1,\infty} \leq Ch \log\left(\frac{1}{h}\right) \left(\|u\|_{2,\infty} + \|f\|_\infty\right).$$

Dokaz. Vidi [1].

□

Teorem 7.4 *Neka je $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ i $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ te neka su u i u_h rješenja zadaća (2.1) i (4.3) respektivno. Pretpostavimo dodatno da je $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Tada postoji $C > 0$, neovisno o h , i postoji $h_0 > 0$ takvo da za sve $0 < h \leq h_0$ vrijedi*

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 \log\left(\frac{1}{h}\right) \left(\|u\|_{2,\infty} + \|f\|_{1,\infty}\right).$$

Dokaz. Vidi [1].

□

8 Numerički rezultati

Prisjetimo se zadaće (2.1) koju promatramo. To je eliptička zadaća s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.1)$$

Ovaj oblik eliptičke zadaće promatran je radi jednostavnosti izlaganja i analize metode konačnih volumnih elemenata. Metodu lako možemo proširiti i na ostale tipove eliptičkih zadaća. Dakle, u obzir dolaze i nehomogeni Dirichletov rubni uvjet, Neumanovi te mješoviti rubni uvjeti. Također, i samu diferencijalnu jednačbu možemo proširiti dodavanjem konvektivnog člana $\operatorname{div}(\mathbf{q}u)$ (vidi [5]), a većina rezultata koje smo napravili za zadaću (8.1) i dalje vrijedi. U našim numeričkim primjerima promatrat ćemo zadaće u kojima na rubu $\partial\Omega$ imamo zadan Dirichletov rubni uvjet.

Diskretizacija jednadžbe

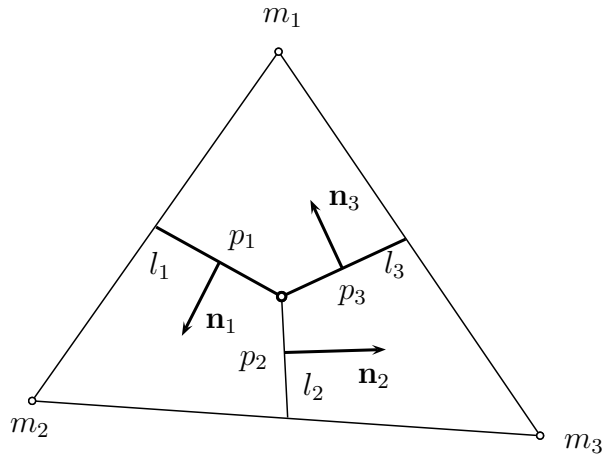
Neka je \mathcal{T}_h triangulacija na Ω i \mathcal{T}_h^* njena dualna mreža sastavljena od Donaldovih dijagrama. Uzmimo proizvoljan kontrolni volumen $V_i \in \mathcal{T}_h^*$ i prointegrirajmo jednadžbu iz (8.1) po V_i :

$$-\int_{\partial V_i} A\nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{V_i} f dx. \quad (8.2)$$

Izraz $\int_{\partial V_i} A\nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma$ možemo rastaviti po trokutima $K \in \mathcal{T}_h$ za koje je $K \cap V_i \neq \emptyset$:

$$\int_{\partial V_i} A\nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \cap V_i \neq \emptyset}} \int_{\partial V_i \cap K} A\nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Fiksirajmo sada jedan takav trokut K i uvedimo lokalne oznake kao na slici (vidi Sliku 8.1). Radi jednostavnosti, možemo uzeti da je lokalni indeks vrha x_i jednak 1. To nema nikakav utjecaj kasnije na algoritam asembliranja matrice sustava.



Slika 8.1: Trokut K .

Neka su granice kontrolnih volumena orijentirane vanjskom normalom. Tada je

$$\int_{\partial V_i \cap K} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{l_1} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{-l_3} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Za računanje linijskih integrala uzimamo formulu numeričke integracije

$$\int_{\overline{x_1 x_2}} v d\sigma = v \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) |\overline{x_1 x_2}|$$

koja je točna na polinomima prvog stupnja. Numeričko rješenje u_h tražimo u prostoru polinoma prvog stupnja po trokutima pa nadalje u diskretizaciji uzimamo da je $\nabla u|_K = \text{const}$. Korištenjem spomenute integracijske formule u gornjem izrazu tada dobivamo

$$\int_{\partial V_i \cap K} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = A(p_1) \nabla u|_K \cdot \mathbf{n}_1 |l_1| - A(p_3) \nabla u|_K \cdot \mathbf{n}_3 |l_3|.$$

Za lokalne bazne funkcije ϕ_k^K , ($k = 1, 2, 3$) na trokutu K imamo $\nabla \phi_1^K + \nabla \phi_2^K + \nabla \phi_3^K = 0$ pa je

$$\nabla u|_K = \sum_{k=1}^3 u(m_k) \nabla \phi_k^K = \sum_{k=2}^3 (u(m_k) - u(m_1)) \nabla \phi_k^K.$$

Time dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_i \cap K} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma &= A(p_1) \left((u_2^K - u_1^K) \nabla \phi_2^K + (u_3^K - u_1^K) \nabla \phi_3^K \right) \cdot \mathbf{n}_1 |l_1| \\ &\quad - A(p_3) \left((u_2^K - u_1^K) \nabla \phi_2^K + (u_3^K - u_1^K) \nabla \phi_3^K \right) \cdot \mathbf{n}_3 |l_3| \\ &= (A(p_1) \mathbf{n}_1 |l_1| - A(p_3) \mathbf{n}_3 |l_3|) \cdot \nabla \phi_2^K (u_2^K - u_1^K) \\ &\quad + (A(p_1) \mathbf{n}_1 |l_1| - A(p_3) \mathbf{n}_3 |l_3|) \cdot \nabla \phi_3^K (u_3^K - u_1^K), \end{aligned}$$

gdje je $u_k^K = u|_K(m_k)$.

Uvedimo oznake $D_{1,k}^K = (A(p_1)\mathbf{n}_1|l_1| - A(p_3)\mathbf{n}_3|l_3|) \cdot \nabla\phi_k^K$, ($k = 2, 3$). Sada je

$$\int_{\partial V_i \cap K} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{k=2}^3 D_{1,k}^K (u_k^K - u_1^K).$$

Prijeđimo na globalne indekse i označimo s $D_{i,j} = \int_{\partial V_i \cap \partial V_j} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma$ za $x_j \in \Pi(i)$. Sada, koristeći prvo lokalno, a onda globalno indeksiranje dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_i} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \cap V_i \neq \emptyset}} \int_{\partial V_i \cap K} A \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \cap V_i \neq \emptyset}} \sum_{k=2}^3 D_{1,k}^K (u_k^K - u_1^K) \\ &= \sum_{x_j \in \Pi(i)} D_{i,j} (u_j - u_i). \end{aligned}$$

Tu smo uveli oznaku $u_j = u(x_j)$.

Povratkom u jednadžbu (8.2) slijedi

$$\left(\sum_{x_j \in \Pi(i)} D_{i,j} \right) u_i - \sum_{x_j \in \Pi(i)} D_{i,j} u_j = \int_{V_i} f dx.$$

Asembliranje matrice krutosti

Matricu krutosti ovdje asembliramo bez uvažavanja rubnih uvjeta. To odgovara zadaći s homogenim Neumannovim rubnim uvjetom. Nehomogeni Neumannov uvjet daje doprinos samo desnoj strani, a za Dirichletov rubni uvjet naknadno modificiramo matricu. Matrica sustava je dimenzije $\bar{N}_h \times \bar{N}_h$ i označavamo ju s M . Algoritam asembliranja je lokalnog karaktera, tj. za svaki trokut $K \in \mathcal{T}_h$ izračunamo lokalne koeficijente $D_{l,k}^K$ i njih pridodajemo odgovarajućim koeficijentima matrice M .

-
- 1: **for** $K \in \mathcal{T}_h$ **do**
 - 2: Izračunaj lokalne koeficijente $D_{l,k}^K$, $l, k \in \{1, 2, 3\}$, $l \neq k$;
 - 3: Nađi globalne indekse vrhova $i = \text{glob}(l)$, $j = \text{glob}(k)$;
 - 4: $M_{i,j} = M_{i,j} - D_{l,k}^K$, $M_{i,i} = M_{i,i} + D_{l,k}^K$ za $l, k \in \{1, 2, 3\}$, $l \neq k$;
 - 5: **end for**
-

Računanje koeficijenata $D_{l,k}^K$

Radimo na trokutu K i koristimo oznake kao na Slici 8.1. U diskretizaciji jednadžbe definirali smo koeficijente $D_{1,k}^K$, $k = 2, 3$ kao doprinos u integraciji po dijelu granice kontrolnog volumena V_i koji se nalazi u K . Analogno definiramo koeficijente $D_{2,k}^K$, $k = 1, 3$ i $D_{3,k}^K$, $k = 1, 2$ kao doprinose u integraciji po dijelu granice kontrolnih volumena centriranih oko čvorova m_2 i m_3 . Stoga dobivamo sljedeće formule:

$$\begin{aligned} D_{2,k}^K &= (A(p_2)\mathbf{n}_2|l_2| - A(p_1)\mathbf{n}_1|l_1|) \cdot \nabla\phi_k^K, \quad k = 1, 3, \\ D_{3,k}^K &= (A(p_3)\mathbf{n}_3|l_3| - A(p_2)\mathbf{n}_2|l_2|) \cdot \nabla\phi_k^K, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Matrica A u praksi nam je poznata kroz vrijednosti u čvorovima triangulacije pa vrijednosti u točkama p_k , ($k = 1, 2, 3$), dobivamo interpolacijom matrice polinomom prvog stupnja na trokutu K . Stoga je

$$\begin{aligned} A(p_1) &= \frac{1}{12}(5A(m_1) + 5A(m_2) + 2A(m_3)), \\ A(p_2) &= \frac{1}{12}(2A(m_1) + 5A(m_2) + 5A(m_3)), \\ A(p_3) &= \frac{1}{12}(5A(m_1) + 2A(m_2) + 5A(m_3)). \end{aligned}$$

Za lokalne bazne funkcije se lako vidi da je $\nabla\phi_k^K = -\frac{|L_k|}{2|K|}\mathbf{N}_k$, gdje je L_k stranica trokuta K nasuprotna vrhu m_k , a \mathbf{N}_k jedinična normala na L_k , $k = 1, 2, 3$.

Asembliranje vektora desne strane

Označimo s F vektor desne strane u metodi konačnih volumnih elemenata. Iz jednadžbe (8.2) slijedi da je i -ta komponenta vektora F jednaka

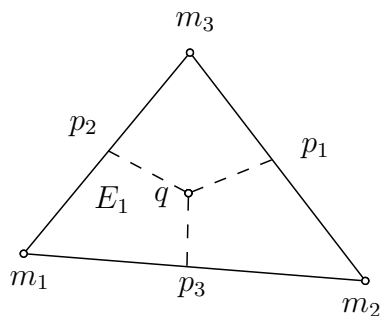
$$F_i = \int_{V_i} f dx.$$

Algoritam asembliranja vektora F također je lokalnog karaktera po trokutima triangulacije \mathcal{T}_h , tj. za svaki trokut $K \in \mathcal{T}_h$ za koji je $K \cap V_i \neq \emptyset$ računamo lokalni doprinos $r_l^K = \int_{K \cap V_i} f dx$ i -toj komponenti vektora F . l nam označava lokalni indeks čvora x_i .

Računanje komponenti r_l^K

Uzmimo proizvoljni trokut $K \in \mathcal{T}_h$ i uvedimo lokalne oznake kao na Slici 8.2:

-
- 1: **for** $K \in \mathcal{T}_h$ **do**
 - 2: Izračunaj lokalni doprinos r_l^K , $l \in \{1, 2, 3\}$;
 - 3: Nađi globalne indekse vrhova $i = \text{glob}(l)$, $l \in \{1, 2, 3\}$;
 - 4: $F_i = F_i + r_l^K$ za $l \in \{1, 2, 3\}$;
 - 5: **end for**
-



Slika 8.2: *Trokut K.*

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da lokalni indeks 1 odgovara globalnom indeksu i . Tada je $E_1 = K \cap V_i$ i $r_1^K = \int_{E_1} f dx$. Spajanjem težišta q i vrha m_1 podijelimo četverokut E_1 na dva trokuta $K_1 = \triangle m_1 q p_2$ i $K_2 = \triangle m_1 p_3 q$. Zbog aditivnosti integrala po području integracije slijedi

$$r_1^K = \int_{K_1} f dx + \int_{K_2} f dx.$$

Za računanje ovih integrala koristimo integracijsku formulu

$$\int_{\Delta x_1 x_2 x_3} v dx = \frac{1}{3} |\Delta x_1 x_2 x_3| (v(x_1) + v(x_2) + v(x_3))$$

koja je točna na polinomima prvog stupnja.

Kako nam je funkcija f u praksi poznata samo kroz vrijednosti u čvorovima triangulacije, za vrijednosti funkcije f u polovištima stranica i težištu trokuta uzimamo odgovarajuće aritmetičke sredine. Sada primjenom gornje integracijske formule i sređivanjem izraza dobivamo

$$r_1^K = \frac{1}{18} |K_1| (11f_1 + 2f_2 + 5f_3) + \frac{1}{18} |K_2| (11f_1 + 5f_2 + 2f_3),$$

gdje je $f_l = f(m_l)$. Na potpuno analogan način izračunamo r_2^K i r_3^K .

Algoritmi asembliranja matrice krutosti i vektora desne strane implementirani su u C++ datotekama `mat_fvm.cpp` i `mat_source.cpp` respektivno (vidi Dodatak B i C). Algoritmi su implementirani u vanjskim funkcijama za FreeFem++,

programski paket za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom konačnih elemenata. Matricu krutosti asembliramo preko vanjske funkcije `MatrixFVEM()`, a vektor desne strane preko funkcije `RHS()`. Detalji oko same implementacije gornjih algoritama i vanjskih funkcija za `FreeFem++` te način njihovog korištenja mogu se naći u Dodacima i priručniku za `FreeFem++` (vidi [7]).

Pokažimo sada na jednom test primjeru korištenje metode i ispitajmo eksperimentalno red konvergencije.

Primjer 8.1 *Neka je $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, jedinični kvadrat. Riješimo sljedeću Dirichletovu zadaću:*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neka je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 + 10x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 10y^2 \end{bmatrix}$, a funkciju desne strane f izračunamo uzimanjem točnog rješenja $u(x, y) = (x^2 - x)(y^2 - y)$.

Rješenje. Način rješavanja u `FreeFem++`-u je sljedeći:

1. Prije svega u program treba uključiti vanjske linkove koji nam omogućava korištenje vanjskih funkcija `MatrixFVEM()` i `RHS()` te definiramo ulazne podatke iz zadaće koju rješavamo.

```
load "mat_fvm";
load "mat_source"; // vanjski linkovi
                    //ulazni podaci
func u = (x^2-x)*(y^2-y);
func u0 = 0;
func f = -2*(-x^3+x^4+x*(-1+20*y-40*y^2)
          + x^2*(1-40*y+60*y^2)+y*(-1+y-y^2+y^3));
func A11 = 1+10*x^2+y^2;
func A12 = 0;
func A22 = 1+x^2+10*y^2;
```

2. Zatim na domeni konstruiramo mrežu sa željenim brojem trokutova i definiramo prostore konačnih elemenata.

```
mesh Th = square(100,100); // konstrukcija mreze
fespace Wh(Th,P0); // konstrukcija prostora P0 elemenata
fespace Vh(Th,P1); // konstrukcija prostora P1 elemenata
Vh uh, vh, Fh; // numericko rjesenje, test-funkcija i vektor
                // desne strane
matrix M; // matrica krutosti
```

3. Definicija varijacijske forme.

```
varf a(uh,vh) = int2d(Th) (A11*dx(uh)*dx(vh)+A12*dy(uh)*dx(vh)
                        +A12*dx(uh)*dy(vh)+A22*dy(uh)*dy(vh))
                        + on(1,2,3,4, uh=u0);
```

4. Asembliranje matrice krutosti i vektora desne strane preko vanjskih funkcija te modificiranje vektora desne strane zbog Dirichletovog rubnog uvjeta. Naime, zbog Dirichletovog rubnog uvjeta, u rubnim čvorovima imamo zadane vrijednosti rješenja pa odgovarajuće jednadžbe ne ulaze u linearni sustav. FreeFem++ taj problem rješava penalizacijom tako da vektoru desne strane na mjestu koje odgovara Dirichletovoj točki x_i doda $1.0e+30*u0(x_i)$, gdje je $u0()$ funkcija kojom je dan Dirichletov rubni uvjet.

```
MatrixFVEM(M,Th,[A11,A12,A22]);
set(M, solver=GMRES, eps=1.0e-10, tgv=1e30, dimKrylov=150);
RHS(Fh[],Th,f);
Vh md; // penalizacija zbog Dirichletovog r.u.
md[] = a(0,Vh);
Fh[]+=md[];
```

5. Rješavanje linearnog sustava.

```
uh[] = M^-1*Fh[]; // rjesavanje sustava
```

Kako nam je poznato točno rješenje, možemo računati greške u H^1 i L^2 normi te uniformnim profinjavanjem triangulacije eksperimentalno odrediti red konvergencije metode u obje norme. U donjoj tablici nalaze se greške u H^1 i L^2 normi, ovisno o finoći triangulacije, te aproksimativni redovi konvergencije izračunati u FreeFem++ programu `test1.edp` (vidi Dodatak A).

Ntr	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	red knv.	$\ u - u_h\ _{H^1}$	red knv.
200	0.141421	6.488e-04		2.428e-02	
800	0.070711	1.611e-04	2.009563	1.216e-02	0.997185
3200	0.035355	4.021e-05	2.002528	6.085e-03	0.999364
12800	0.017678	1.005e-05	2.000639	3.043e-03	0.999846
51200	0.008839	2.512e-06	2.000159	1.521e-03	0.999962
204800	0.004419	6.280e-07	2.000036	7.607e-04	0.999990

Kao što smo prema teorijskim rezultatima i mogli zaključiti, iz ovih izračuna vidi se da metoda ima kvadratični red konvergencije u L^2 , odnosno linearni u H^1 normi. \square

Sljedeći primjer je već prethodno najavljivan kontraprimjer preuzet iz [1] kojim pokazujemo da je H^1 regularnost funkcije f nužna za kvadratičnu konvergenciju metode u L^2 normi.

Primjer 8.2 *Neka je $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, jedinični kvadrat. Promotrimo sljedeću zadaću*

$$\begin{cases} -\Delta u = -\frac{24}{25}x^{-\frac{2}{5}} & \text{u } \Omega, \\ u = x^{\frac{8}{5}} & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rješenje. Lako se vidi da je $u(x, y) = x^{\frac{8}{5}}$ točno rješenje koje je u $H^2(\Omega)$, ali nije u $H^3(\Omega)$. S druge strane funkcija $f(x, y) = -\frac{24}{25}x^{-\frac{2}{5}}$ zbog singulariteta duž y -osi je samo u $L^2(\Omega)$. Upravo zbog prisutnosti singulariteta, u asembliranju vektora desne strane potrebni su nam precizniji izračuni. U tu svrhu gornju funkciju f definiramo u vanjskoj funkciji `RHS()` i koristimo precizniju formulu numeričke integracije

$$\int_{\Delta x_1 x_2 x_3} v dx = \frac{1}{3} |\Delta x_1 x_2 x_3| (v(p_1) + v(p_2) + v(p_3)),$$

gdje su p_l polovišta stranica trokuta $\Delta x_1 x_2 x_3$ (vidi Dodatak E). Ova formula točna je na polinomima drugog stupnja. Sam algoritam asembliranja vektora desne strane pritom ostaje isti.

Rezultati greška u H^1 i L^2 normi, ovisno o finoći triangulacije, u donjoj tablici dobiveni su u FreeFem++ programu `test2.edp` (Dodatak D) uz korištenje vanjskih linkova `mat_fvm` i `mat_source_sing` (vidi Dodatak E).

Ntr	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	red knv.	$\ u - u_h\ _{H^1}$	red knv.
200	0.141421	1.575e-03		4.893e-02	
800	0.070711	4.411e-04	1.836234	2.541e-02	0.945619
3200	0.035355	1.251e-04	1.817523	1.310e-02	0.955648
12800	0.017678	3.606e-05	1.794999	6.717e-03	0.963536
51200	0.008839	1.056e-05	1.771750	3.430e-03	0.969750
204800	0.004419	3.060e-06	1.787331	1.745e-03	0.974703

U četvrtom stupcu vidimo da više nemamo kvadratični red konvergencije metode u L^2 normi, dok za H^1 normu ipak možemo reći da zadržava linearnu konvergenciju. Dobivene rezultate možemo usporediti s onima iz [1] i vidimo da je među njima jako mala razlika što dodatno potvrđuje korektnost naših izračuna. \square

Poglavlje IV

Zaključak

U ovom radu analizirali smo metodu konačnih volumnih elemenata za numeričko rješavanje eliptičke rubne zadaće drugog reda. Pristup metodi kao Galerkinovoj metodi konačnih elemenata omogućio nam je da ju promatramo kao perturbaciju klasične metode konačnih elemenata za eliptičke rubne zadaće. To se pokazalo izuzetno korisnim u izvodu apriornih ocjena grešaka u H^1 i L^2 normi. Ocjene koje smo prezentirali su optimalne. Pokazali smo da je za optimalni red konvergencije u L^2 normi potrebna H^1 regularnost funkcije f na desnoj strani, a dodatnu regularnost trebamo upravo zbog diskontinuiranosti prostora test funkcija (vidi zadaću (4.1)). Primjer 8.2 potvrđuje da metoda nema standardni $O(h^2)$ red konvergencije u L^2 normi ako je funkcija f samo L^2 regularna, čak i kad je egzaktno rješenje u $H^2(\Omega)$.

Dodaci

A test1.edp

```
include "ispis.edp" // pomocna datoteka za ispis gresaka
load "mat_fvm";      // vanjski linkovi load
"mat_source";

// parametri u funkciji ispis()
int [int] Ntr(10);
real [int] h(10);
real [int] errL2(10),errH1(10);
int noOfItems = 6;
bool zaglavlje = true;
string ime1 = "ispis_test1.tex";
// ulazni podaci
func u = (x^2-x)*(y^2-y);
func u0 = 0;
func f = -2*(-x^3+x^4+x*(-1+20*y-40*y^2)
          +x^2*(1-40*y+60*y^2)+y*(-1+y-y^2+y^3));
func K11 = 1+10*x^2+y^2;
func K12 = 0;
func K22 = 1+x^2+10*y^2;

for(int i=1,j=1; i<=32; i*=2){
  mesh Th = square(10*i,10*i);
  fespace Wh(Th,P0);
  fespace Vh(Th,P1);
  fespace Ph(Th,P2);      // pomocni prostor
  Vh uh, Fh;
  Ph uhP2;
  uhP2 = u; // interpolacija egzaktnog rjesenja
  matrix A;
  // definicija varijacijske forme
```



```

varf a(uh,vh) = int2d(Th)(K11*dx(uh)*dx(vh)+K12*dy(uh)*dx(vh)
                    +K12*dx(uh)*dy(vh)+K22*dy(uh)*dy(vh))
                    + on(1,2,3,4, uh=u0);
// asembliranje matrice krutosti
MatrixFVEM(A,Th,[K11,K12,K22]);
// postavljanje parametara za rjesavanje lin sustava
set(A, solver=GMRES, eps=1.0e-10, tgv=1e30, dimKrylov=150);
// asembliranje vektora desne strane
RHS(Fh[],Th,f);
Vh md; // penalizacija zbog Dirichletovog r.u.
md[] = a(0,Vh);
Fh[]+=md[];
uh[] = A^-1*Fh[]; // rjesavanje sustava
// racunanje gresaka
Wh dijametriTrokuta = hTriangle;
h[j-1] = dijametriTrokuta[].max;
Ntr[j-1] = dijametriTrokuta[].n;
errL2[j-1] = sqrt(int2d(Th)(u-uh)^2);
errH1[j-1] = sqrt(int2d(Th)((u-uh)*(u-uh))
                    + int2d(Th)((dx(uhP2)-dx(uh))^2
                    + (dy(uhP2)-dy(uh))^2));
j++;
}
ispis(Ntr,h,errL2,errH1,noOfItems,zaglavljje,ime1);

```

B mat_fvm.cpp

```
#include <iostream>
#include <cfloat>
#include <cmath>
using namespace std;
#include "error.hpp"
#include "AFunction.hpp"
#include "rgraph.hpp"
#include "RNM.hpp"
#undef HAVE_LIBUMFPACK
#undef HAVE_CADNA
#include "MatriceCreuse_tpl.hpp"
#include "MeshPoint.hpp"
#include "lgfem.hpp"
#include "lgsolver.hpp"
#include "problem.hpp"

class MatrixFVEM : public E_FOmps {
public:
    typedef Matrice_Creuse<R> * Result;
    Expression emat, expTh, expK11, expK12, expK22;
    MatrixFVEM(const basicAC_F0 & args){
        args.SetNameParam();
        emat =args[0];
        expTh= to<pmesh>(args[1]);
        const E_Array * a = dynamic_cast<const E_Array*>
            ((Expression) args[2]);
        if (a->size() != 3)
            CompileError("syntax: MatrixFVEM(A,Th,[K11,K12,K22])");
        expK11= CastTo<double>((*a)[0]);
        expK12= CastTo<double>((*a)[1]);
        expK22= CastTo<double>((*a)[2]);
    }
    ~MatrixFVEM(){}
    static ArrayOfaType typeargs(){
        return ArrayOfaType(atype<Matrice_Creuse<R>*>(),
            atype<pmesh>(),atype<E_Array>());
    }
    static E_F0 * f(const basicAC_F0 & args){
        return new MatrixFVEM(args);
    }
};
```

```

}
AnyType operator()(Stack s) const ;
};
// lokalno racunanje matrice krutosti
int fvemP1P0(double DA[2][2], double DB[2][2], double DC[2][2],
             double m[3][2], double a[3][3]){
double Dp1[2][2], Dp2[2][2], Dp3[2][2];
double z1[2], z2[2], z3[2];
double fi1[2], fi2[2], fi3[2];
double K;
double q[2]; // koordinate tezista
double p[3][2]; // koordinate polovista
// površina trokuta
K = 0.5*fabs(m[0][0]*(m[2][1]-m[1][1])
            + m[1][0]*(m[0][1]-m[2][1])
            + m[2][0]*(m[1][1]-m[0][1]));
for(int i=0; i<2; i++){
for(int j=0; j<2; j++){
Dp1[i][j]=(5*DA[i][j]+5*DB[i][j]+2*DC[i][j])/12;
Dp2[i][j]=(2*DA[i][j]+5*DB[i][j]+5*DC[i][j])/12;
Dp3[i][j]=(5*DA[i][j]+2*DB[i][j]+5*DC[i][j])/12;
}
p[0][0] = (m[1][0]+m[2][0])/2; //p1.x
p[0][1] = (m[1][1]+m[2][1])/2; //p1.y
p[1][0] = (m[0][0]+m[2][0])/2; //p2.x
p[1][1] = (m[0][1]+m[2][1])/2; //p2.y
p[2][0] = (m[0][0]+m[1][0])/2; //p3.x
p[2][1] = (m[0][1]+m[1][1])/2; //p3.y
q[0]=(m[0][0]+m[1][0]+m[2][0])/3; //q.x
q[1]=(m[0][1]+m[1][1]+m[2][1])/3; //q.y

z1[0]= q[1]-p[2][1]; //z1.x z1=Q*11, l1=q-p3,
// Q = rotacija za -pi/2
z1[1]= -(q[0]-p[2][0]); //z1.y
z2[0]= q[1]-p[0][1]; //z2.x z2=Q*12, l2=q-p1
z2[1]= -(q[0]-p[0][0]); //z2.y
z3[0]= q[1]-p[1][1]; //z3.x z3=Q*13, l3=q-p2
z3[1]= -(q[0]-p[1][0]); //z3.y
fi1[0]= -(m[2][1]-m[1][1])/(2*K);
fi1[1]= (m[2][0]-m[1][0])/(2*K);

```

```

fi2[0]= -(m[0][1]-m[2][1])/(2*K);
fi2[1]= (m[0][0]-m[2][0])/(2*K);
fi3[0]= -(m[1][1]-m[0][1])/(2*K);
fi3[1]= (m[1][0]-m[0][0])/(2*K);
for(int i=0;i<3;i++)
    for(int j=0;j<3;j++)
        a[i][j]=0;
a[0][1] = (Dp1[0][0]*z1[0] + Dp1[0][1]*z1[1]
          - Dp3[0][0]*z3[0] - Dp3[0][1]*z3[1])*fi2[0]
          + (Dp1[1][0]*z1[0] + Dp1[1][1]*z1[1]
          - Dp3[1][0]*z3[0] - Dp3[1][1]*z3[1])*fi2[1];
a[0][2] = (Dp1[0][0]*z1[0] + Dp1[0][1]*z1[1]
          - Dp3[0][0]*z3[0] - Dp3[0][1]*z3[1])*fi3[0]
          + (Dp1[1][0]*z1[0] + Dp1[1][1]*z1[1]
          - Dp3[1][0]*z3[0] - Dp3[1][1]*z3[1])*fi3[1];
a[1][0] = (Dp2[0][0]*z2[0] + Dp2[0][1]*z2[1]
          - Dp1[0][0]*z1[0] - Dp1[0][1]*z1[1])*fi1[0]
          + (Dp2[1][0]*z2[0] + Dp2[1][1]*z2[1]
          - Dp1[1][0]*z1[0] - Dp1[1][1]*z1[1])*fi1[1];
a[1][2] = (Dp2[0][0]*z2[0] + Dp2[0][1]*z2[1]
          - Dp1[0][0]*z1[0] - Dp1[0][1]*z1[1])*fi3[0]
          + (Dp2[1][0]*z2[0] + Dp2[1][1]*z2[1]
          - Dp1[1][0]*z1[0] - Dp1[1][1]*z1[1])*fi3[1];
a[2][0] = (Dp3[0][0]*z3[0] + Dp3[0][1]*z3[1]
          - Dp2[0][0]*z2[0] - Dp2[0][1]*z2[1])*fi1[0]
          + (Dp3[1][0]*z3[0] + Dp3[1][1]*z3[1]
          - Dp2[1][0]*z2[0] - Dp2[1][1]*z2[1])*fi1[1];
a[2][1] = (Dp3[0][0]*z3[0] + Dp3[0][1]*z3[1]
          - Dp2[0][0]*z2[0] - Dp2[0][1]*z2[1])*fi2[0]
          + (Dp3[1][0]*z3[0] + Dp3[1][1]*z3[1]
          - Dp2[1][0]*z2[0] - Dp2[1][1]*z2[1])*fi2[1];
    // dijagonalni elementi nam nisu vazni pa ih
    // ne treba racunati
return 1;
}

AnyType MatrixFVEM::operator()(Stack stack) const {
    Matrice_Creuse<R> * sparse_mat = GetAny<Matrice_Creuse<R>* >
                                   ((*emat)(stack));
    MatriceMorse<R> * amorse = 0;

```

```

MeshPoint *mp(MeshPointStack(stack)) , mps=*mp;
Mesh * pTh = GetAny<pmesh>((*expTh)(stack));
ffassert(pTh);
Mesh & Th (*pTh);
{
map< pair<int,int>, R> Aij;
KN<double> D11(Th.nv);
KN<double> D12(Th.nv);
KN<double> D22(Th.nv);
double infini=DBL_MAX;
D11=infini;
D12=infini;
D22=infini;
for (int it=0;it<Th.nt;it++)
    for (int iv=0;iv<3;iv++){
        int i=Th(it,iv);
        if ( D11[i]==infini){
            mp->setP(&Th,it,iv);
            D11[i]=GetAny<double>((*expK11)(stack));
        }
        if ( D12[i]==infini){
            mp->setP(&Th,it,iv);
            D12[i]=GetAny<double>((*expK12)(stack));
        }
        if ( D22[i]==infini){
            mp->setP(&Th,it,iv);
            D22[i]=GetAny<double>((*expK22)(stack));
        }
    }
}
for (int k=0;k<Th.nt;k++){
    const Triangle & K(Th[k]);
    const Vertex & A(K[0]), &B(K[1]),&C(K[2]);
    R2 Pt(1./3.,1./3.);
    MeshPointStack(stack)->set(Th,K(Pt),Pt,K,K.lab);
    // globalni indeksi vrhova A, B, C
    int ii[3] ={Th(A),Th(B),Th(C)};
    // koordinate vrhova trokuta ABC
    double m[3][2]= {{A.x,A.y},{B.x,B.y},{C.x,C.y}};
    // oznake cvorova
    double where[3]={A.lab,B.lab,C.lab};
}

```

```

        // tenzori difuzije u tockama triangulacije
double DA[2][2]={D11[ii[0]],D12[ii[0]]},
           {D12[ii[0]],D22[ii[0]]}};
double DB[2][2]={D11[ii[1]],D12[ii[1]]},
           {D12[ii[1]],D22[ii[1]]}};
double DC[2][2]={D11[ii[2]],D12[ii[2]]},
           {D12[ii[2]],D22[ii[2]]}};
double a[3][3];
    // asembliranje matrice krutosti
if (fvemP1PO(DA,DB,DC,m,a)){
    for (int l=0;l<3;l++){
        for (int k=0;k<3;k++){
            if ((k!=l)&&(fabs(a[l][k]) >= 1e-30)){
                Aij[make_pair(ii[l],ii[k])]--a[l][k];
                Aij[make_pair(ii[l],ii[l])] +=a[l][k];
            }
            // penalizacija zbog Dirichletovog r.u.
            if(where[l])
                Aij[make_pair(ii[l],ii[l])]=1e30;
        }
    }
}
amorse= new MatriceMorse<R>(Th.nv,Th.nv,Aij,false);
}
sparce_mat->pUh=0;
sparce_mat->pVh=0;
sparce_mat->A.master(amorse);
sparce_mat->typemat=(amorse->n == amorse->m) ?
    TypeSolveMat(TypeSolveMat::GMRES)
    : TypeSolveMat(TypeSolveMat::NONESQUARE);
*mp=mps;
if(verbosity>3)
    { cout << " End Build MatrixFVEM : " << endl;}
return sparce_mat;
}

class Init { public:
    Init();
};
Init init;

```

```
Init::Init() {  
    cout << " load: init Mat Chacon " << endl;  
    Global.Add("MatrixFVEM", "(", new OneOperatorCode<MatrixFVEM >( ));  
}
```

C mat_source.cpp

```
#include <iostream>
#include <cfloat>
#include <cmath>
using namespace std;
#include "error.hpp"
#include "AFunction.hpp"
#include "rgraph.hpp"
#include "RNM.hpp"
#undef HAVE_LIBUMFPACK
#undef HAVE_CADNA
#include "MatriceCreuse_tpl.hpp"
#include "MeshPoint.hpp"
#include "lgfem.hpp"
#include "lgsolver.hpp"
#include "problem.hpp"

class RHS : public E_FOmps { public:
    typedef KN<double> * Result;
    Expression expFh, expTh, expf;
    RHS(const basicAC_F0 & args){
        args.SetNameParam();
        expFh= args[0];
        expTh= to<pmesh>(args[1]);
        expf= CastTo<double>(args[2]);
    }
    ~RHS(){}
    static ArrayOfaType typeargs(){
        return ArrayOfaType(atype<KN<double>* >(), atype<pmesh>(),
            atype<double>());
    }
    static E_F0 * f(const basicAC_F0 & args){
        return new RHS(args);
    }
    AnyType operator()(Stack s) const ;
};

/**/ lokalno izracunavanje vektora desne strane **/
int source (double f[3], double r[3], double m[3][2]){
    double q[2]; // koordinate tezista
    double p[3][2]; // koordinate polovista
```



```

p[0][0] = (m[1][0]+m[2][0])/2; //p1.x
p[0][1] = (m[1][1]+m[2][1])/2; //p1.y
p[1][0] = (m[0][0]+m[2][0])/2; //p2.x
p[1][1] = (m[0][1]+m[2][1])/2; //p2.y
p[2][0] = (m[0][0]+m[1][0])/2; //p3.x
p[2][1] = (m[0][1]+m[1][1])/2; //p3.y
q[0]=(m[0][0]+m[1][0]+m[2][0])/3; //q.x
q[1]=(m[0][1]+m[1][1]+m[2][1])/3; //q.y
for(int i=0; i<3; i++)
    r[i]=0;
for(int i=0; i<3; i++){
    double K1,K2;
    int ip=(i+1)%3, ipp=(i+2)%3;
    double f1,f2;
    K1 = 0.5*fabs(m[i][0]*(q[1]-p[ip][1])
        + q[0]*(p[ip][1]-m[i][1])
        + p[ip][0]*(m[i][1]-q[1]));
    K2 = 0.5*fabs(m[i][0]*(p[ipp][1]-q[1])
        + p[ipp][0]*(q[1]-m[i][1])
        + q[0]*(m[i][1]-p[ipp][1]));
    // integracijska formula
    f1 = (K1/18)*(11*f[i]+2*f[ip]+5*f[ipp]);
    f2 = (K2/18)*(11*f[i]+5*f[ip]+2*f[ipp]);
    // lokalni doprinos po dijelu kontrolnog volumena
    r[i]= f1+f2;
}
return 1;
}
// *****
AnyType RHS::operator()(Stack stack) const {
    KN<double> * F = GetAny<KN<double>* >((*expFh)(stack));
    MeshPoint *mp(MeshPointStack(stack)) , mps=*mp;
    Mesh * pTh = GetAny<pmesh>((*expTh)(stack));
    fassert(pTh);
    Mesh & Th (*pTh);
    {
    KN<double> ff(Th.nv);
    double infini=DBL_MAX;
    ff=infini;
    for (int it=0;it<Th.nt;it++)

```

```

        for (int iv=0;iv<3;iv++){
            int i=Th(it,iv);          // vektor desne strane
            if ( ff[i]==infini){
                mp->setP(&Th,it,iv);
                ff[i]=GetAny<double>((*expf)(stack));
            }
        }
    for (int k=0;k<Th.nt;k++){
        const Triangle & K(Th[k]);
        const Vertex & A(K[0]), &B(K[1]),&C(K[2]);
        R2 Pt(1./3.,1./3.);
        MeshPointStack(stack)->set(Th,K(Pt),Pt,K,K.lab);
        // globalni indeksi vrhova A, B, C
        int ii[3] ={Th(A),Th(B),Th(C)};
        // koordinate vrhova trokuta
        double m[3][2]= {{A.x,A.y},{B.x,B.y},{C.x,C.y}} ;
        // lokalni vektor desne strane
        double f[3]={ff[ii[0]],ff[ii[1]],ff[ii[2]]};
        double r[3];
        if(source(f,r,m))
            for(int l=0; l<3; l++){
                *(F[0]+ii[l])+=r[l];
            }
    }
}
return F;
}
class Init { public:
    Init();
};
Init init;
Init::Init() {
    cout << " load: RHS " << endl;
    Global.Add("RHS",(" , new OneOperatorCode<RHS>( ) );
}

```

D test2.edp

```
include "ispis.edp" // pomocna datoteka za ispis gresaka
load "mat_fvm";      // vanjski linkovi
load "mat_source_sing";
                    // parametri u funkciji ispis()
int [int] Ntr(10);
real [int] h(10);
real [int] errL2(10),errH1(10);
int noOfItems = 6;
bool zaglavlje = true;
string ime1 = "ispis_test2.tex";
                    // ulazni podaci
func u = x^(8.0/5);
func u0 = x^(8.0/5);
func f = -(24.0/25.0)*x^(-2.0/5);
func K11 = 1;
func K12 = 0;
func K22 = 1;

for(int i=1,j=1; i<=32; i*=2){
    mesh Th = square(10*i,10*i);
    fespace Wh(Th,P0);
    fespace Vh(Th,P1);
    fespace Ph(Th,P2);      // pomocni prostor
    Vh uh, Fh;
    Ph uhP2;
    uhP2 = u; // interpolacija egzaktnog rjesenja
    matrix A;
                    // definicija varijacijske forme
    varf a(uh,vh) = int2d(Th)(K11*dx(uh)*dx(vh)+K12*dy(uh)*dx(vh)
        +K12*dx(uh)*dy(vh)+K22*dy(uh)*dy(vh))
        + on(1,2,3,4, uh=u0);
                    // asembliranje matrice krutosti
    MatrixFVEM(A,Th,[K11,K12,K22]);
                    // postavljanje parametara za rjesavanje lin sustava
    set(A, solver=GMRES, eps=1.0e-10, tgv=1e30, dimKrylov=150);
                    // asembliranje vektora desne strane
    RHS(Fh[],Th);
    Vh md; // penalizacija zbog Dirichletovog r.u.
    md[] = a(0,Vh);
```

```

Fh[]+=md[];
uh[] = A^-1*Fh[]; // rjesavanje sustava
           // racunanje gresaka
Wh dijametriTrokuta = hTriangle;
h[j-1] = dijametriTrokuta[].max;
Ntr[j-1] = dijametriTrokuta[].n;
errL2[j-1] = sqrt(int2d(Th)(u-uh)^2);
errH1[j-1] = sqrt(int2d(Th)((u-uh)*(u-uh))
           + int2d(Th)((dx(uhP2)-dx(uh))^2
           + (dy(uhP2)-dy(uh))^2));
    j++;
}
ispis(Ntr,h,errL2,errH1,noOfItems,zaglavlje,ime1);

```

E mat_source_sing.cpp

```
#include <iostream>
#include <cfloat>
#include <cmath>
using namespace std;
#include "error.hpp"
#include "AFunction.hpp"
#include "rgraph.hpp"
#include "RNM.hpp"
#undef HAVE_LIBUMFPACK
#undef HAVE_CADNA
#include "MatriceCreuse_tpl.hpp"
#include "MeshPoint.hpp"
#include "lgfem.hpp"
#include "lgsolver.hpp"
#include "problem.hpp"
// Ovaj link radi samo za Primjer 8.2

class RHS : public E_F0mps { public:
    typedef KN<double> * Result;
    Expression expFh, expTh;
    RHS(const basicAC_F0 & args){
        args.SetNameParam();
        expFh= args[0];
        expTh= to<pmesh>(args[1]);
    }
    ~RHS(){}
    static ArrayOfaType typeargs(){
        return ArrayOfaType(atype<KN<double>* >(),
                            atype<pmesh>());
    }
    static E_F0 * f(const basicAC_F0 & args){
        return new RHS(args);
    }
    AnyType operator()(Stack s) const ;
};
// funkcija desne strane iz Primjera 8.2
double ff (double x){
    if(x>0.0)
        return ((-24.0/25)*pow(x,-0.4));
}
```

```

else
    return (-1.0*pow(10.0,10.0));
}
/** lokalno izracunavanje vektora desne strane */
int source (double r[3], double m[3][2]){
    double q[2];    // koordinate tezista
    double p[3][2]; // koordinate polovista
    p[0][0] = (m[1][0]+m[2][0])/2; //p1.x
    p[0][1] = (m[1][1]+m[2][1])/2; //p1.y
    p[1][0] = (m[0][0]+m[2][0])/2; //p2.x
    p[1][1] = (m[0][1]+m[2][1])/2; //p2.y
    p[2][0] = (m[0][0]+m[1][0])/2; //p3.x
    p[2][1] = (m[0][1]+m[1][1])/2; //p3.y
    q[0]=(m[0][0]+m[1][0]+m[2][0])/3; //q.x
    q[1]=(m[0][1]+m[1][1]+m[2][1])/3; //q.y
    for(int i=0; i<3; i++)
        r[i]=0;
    for(int i=0; i<3; i++){
        double K1,K2;
        int ip=(i+1)%3, ipp=(i+2)%3;
        double f1,f2;
        K1 = 0.5*fabs(m[i][0]*(q[1]-p[ip][1])
            + q[0]*(p[ip][1]-m[i][1])
            + p[ip][0]*(m[i][1]-q[1]));
        K2 = 0.5*fabs(m[i][0]*(p[ipp][1]-q[1])
            + p[ipp][0]*(q[1]-m[i][1])
            + q[0]*(m[i][1]-p[ipp][1]));
        // integracijska formula
        f1 = (1.0/3)*K1*(ff((m[i][0]+q[0])/2)
            + ff((p[ip][0]+q[0])/2)
            + ff((m[i][0]+p[ip][0])/2));
        f2 = (1.0/3)*K2*(ff((m[i][0]+q[0])/2)
            + ff((p[ipp][0]+q[0])/2)
            + ff((m[i][0]+p[ipp][0])/2));
        // lokalni doprinos po dijelu kontrolnog volumena
        r[i]= f1+f2;
    }
    return 1;
}
// *****

```

```

AnyType RHS::operator()(Stack stack) const {
    KN<double> * F = GetAny<KN<double>* >((*expFh)(stack));
    MeshPoint *mp(MeshPointStack(stack)) , mps=*mp;
    Mesh * pTh = GetAny<pmesh>((*expTh)(stack));
    ffassert(pTh);
    Mesh & Th (*pTh);
    {
        for (int k=0;k<Th.nt;k++){
            const Triangle & K(Th[k]);
            const Vertex & A(K[0]), &B(K[1]),&C(K[2]);
            R2 Pt(1./3.,1./3.);
            MeshPointStack(stack)->set(Th,K(Pt),Pt,K,K.lab);
            // globalni indeksi vrhova A, B, C
            int ii[3] ={ Th(A), Th(B),Th(C)};
            // koordinate vrhova
            double m[3][2]= { { A.x,A.y} ,{B.x,B.y},{C.x,C.y} } ;
            double r[3];
            if(source(r,m))
                for(int l=0; l<3; l++){
                    (*(F[0]+ii[l]))+=r[l];
                }
        }
    }
    return F;
}
class Init { public:
    Init();
};
Init init;
Init::Init() {
    cout << " load: RHS " << endl;
    Global.Add("RHS",(" ", new OneOperatorCode<RHS>( ));
}

```

Bibliografija

- [1] R.E. Ewing, T. Lin, Y. Lin: *On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials*, Siam J. Numer. Anal., Vol. 39, No. 6, pp. 1865 – 1888, 2002.
- [2] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
- [3] S.-H. Chou, Q. Li: *Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ i covolume methods for elliptic and parabolic problems: A unified approach*, Mathematics of Computation, Vol. 69, No. 229, pp. 103 – 120, 1999.
- [4] R.A. Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [5] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [6] P. Knabner, L. Angermann: *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer, 2002.
- [7] FreeFem++ manual, Version 2.17 – 1.
- [8] I.D. Mishev: *Finite Volume and Finite Volume Element Methods for Non-Symmetric Problems*, Ph. D. thesis, Technical Report ISC-96-04-MATH, Institute for Scientific Computation, Texas A&M University, College Station, TX, 1997.
- [9] Z. Cai: *On the finite volume element method*, Numer. Math., 58, pp. 713–735, 1991.
- [10] R.E. Ewing, Z. Li, T. Lin, Y. Lin: *The immersed finite volume element methods for the elliptic interface problems*, Math. Comput. Simulations, 50, pp. 63 – 76, 1999.