

METRIČKI PROSTORI

Boris Guljaš

PREDAVANJA

Osijek, 1.3.2010.

Uvod

Cilj kolegija "Metrički prostori" je upoznati studente sa strukturama metričkih i topoloških prostora i njihovih preslikavanja. Posebno će se obraditi kompaktnost, povezanost i dati glavni rezultati iz teorije potpunih metričkih prostora.

Osim boljeg razumijevanja pojmova i tema obrađenih u prethodnim kolegijima s tematikom iz matematičke analize i vektorskih prostora, cilj je omogućiti usvajanje novih znanja koja otvaraju mogućnost razumijevanja složenijih sadržaja iz kolegija na završnoj godini diplomskog studija, a posebno na poslijediplomskim studijima matematike.

Redoslijed izlaganja i sadržaj kolegija je koncipiran prema predavanjima prof. dr. sc. Krešimira Horvatića¹, redovitog profesora Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

Sadržaj predmeta podijeljen je na pet cjelina. U prvom dijelu definiraju se metrika i metrički prostori. proučavaju se pojmovi kao što su otvoreni skupovi u metričkom prostoru i njihova ekvivalencija s obzirom na različite metrike. također se proučava pojam potprostora metričkog prostora kao i metrika na kartezijevom produktu metričkih prostora.

Drugi dio je posvećen osnovnim pojmovima o topološkim prostorima. Proučavaju se svojstva topologije, baze i podbaze topologije, nutrina i zatvarač skupa. Također se definiraju topologije potprostora, kartezijevog produkta i kvocijentna topologija. Na kraju tog dijela daje se klasifikacija topoloških prostora s obzirom na različite aksiome separacije.

Konvergenciji nizova, a posebno konvergenciji nizova funkcija, posvećen je treći dio. Tu se promatra odnos topološkog i nizovnog zatvorenja. Također se za metričke prostore definira pojam Cauchyjevog niza i potpunog prostora. Na kraju se dokazuje Banachov teorem o fiksnoj točki.

Neprekidnost funkcije se proučava u četvrtom dijelu, gdje se taj pojam proučava od opće topološke varijante do posebnih slučajeva metričkih i normiranih prostora. Posebno se proučavaju homeomorfizmi, tj. funkcije koje čuvaju topološke strukture. U metričkim prostorima definira se i proučava

¹Krešimir Horvatić, rođen u Zagrebu 1930. god.– preminuo u Zagrebu 2008. god.

jednolika neprekidnost funkcije. Također se proučava i pojam topološke povezanosti skupa.

Posljednji, peti dio je posvećen kompaktnim skupovima od općenitog topološkog slučaja do karakterizacije u metričkim prostorima i u $\mathbb{R}^n$. Dani su rezultati o produktu konačno mnogo kompaktnih skupova, a opći slučaj je iskazan bez dokaza. Na kraju su dani neki važni rezultati o funkcijama na kompaktnim skupovima.



Boris Guljaš

Sadržaj

1	METRIČKI PROSTORI	1
1.1	Definicije i osnovna svojstva	1
1.2	Primjeri	4
1.3	Omeđeni i potpuno omeđeni prostori	8
1.4	Topologizacija metričkog prostora	11
1.5	Ekvivalencija topoloških struktura	12
1.6	Direktni produkt prostora	13
1.7	Potprostor metričkog prostora	16
2	TOPOLOŠKI PROSTORI	17
2.1	Definicija topološkog prostora	17
2.2	Baza topologije	20
2.3	Nutrina i zatvorenje skupa	22
2.4	Separabilnost	28
2.5	Produkt i kvocijent prostora	29
2.6	Aksiomi separacije	30
3	KONVERGENCIJA	33
3.1	Definicija i osnovna svojstva	33
3.2	Zatvorenje i konvergencija	34
3.3	Podnizovi i konvergencija	35
3.4	Nizovi funkcija	36
3.5	Cauchyjev niz	38
3.6	Potpuni prostor	39
3.7	Banachov teorem o fiksnoj točki	42
4	NEPREKIDNA PRESLIKAVANJA	45
4.1	Definicija neprekidnosti	45
4.2	Osnovna svojstva. Kategorijalnost	47
4.3	Karakterizacija neprekidnosti	49
4.4	Homeomorfizam	50

4.5	Uniformna neprekidnost	51
4.6	Povezanost prostora	52
5	KOMPAKTNOST	55
5.1	Definicija kompaktnosti	55
5.2	Osnovna svojstva kompaktnosti	57
5.3	Karakterizacija kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$	58
5.4	Kompaktnost metričkih prostora	59
5.5	Produkt kompaktnih prostora	64
5.6	Neprekidne funkcije na kompaktu	65
	Bibliografija	66
	Indeks	68

Poglavlje 1

METRIČKI PROSTORI

1.1 Definicije i osnovna svojstva

1.1.1. Definicija. Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:

- 1) $d(a, b) \geq 0, \forall a, b \in X$ (pozitivnost),
- 2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (strogost),
- 3) $d(a, b) = d(b, a), \forall a, b \in X$ (simetričnost),
- 4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \forall a, b, c \in X$ (nejednakost trokuta).

Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno **metrika** na skupu X . Tada uređeni par (X, d) nazivamo **metrički prostor**, a uvjete 1) – 4) aksiomi metrike.

1.1.2. Napomena. Aksiom 1) je suvišan jer slijedi iz ostalih aksioma. Naime, $\forall a, b \in X$ vrijedi $0 = d(a, a) \leq d(a, b) + d(b, a) = 2d(a, b)$.

Zapravo je moguće svojstva metrike opisati samo sa slijedeća dva aksioma:

- i) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- ii) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c) \forall a, b, c \in X$.

Sada za $c = a$ u ii) dobijemo $d(a, b) \leq d(b, a)$, a zamjenom a sa b i $c = b$ iz ii) imamo $d(b, a) \leq d(a, b)$, tj. vrijedi 3).

Neka je (X, d) metrički prostor i $Y \subseteq X$. Ako je $d' = d|_{Y \times Y}$ onda je (Y, d') također metrički prostor koji nazivamo **potprostor** polaznog prostora.

1.1.3. Napomena. Ako 2) zamijenimo slabijim uvjetom

$$2)' \quad (a = b) \Rightarrow d(a, b) = 0,$$

onda kažemo da je d **pseudometrika** na X , a (X, d) nazivamo **pseudometrički prostor**.

1.1.4. Propozicija. U svakom metričkom prostoru vrijedi i ova nejednakost mnogokuta:

$$d(a_1, a_n) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \cdots + d(a_{n-1}, a_n), \quad (\forall a_1, \dots, a_{n-1}, a_n). \quad (1.1)$$

Dokaz: Indukcijom i primjenom aksioma 4). □

1.1.5. Propozicija. U metričkom prostoru (X, d) , $\forall a, b, a', b' \in X$ vrijedi:

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq d(a, a') + d(b, b'). \quad (1.2)$$

Dokaz: Primjenom propozicije 1.1.4. na a, a', b', b dobivamo $d(a, b) \leq d(a, a') + d(a', b') + d(b', b)$, odnosno zbog simetrije,

$$d(a, b) - d(a', b') \leq d(a, a') + d(b, b'). \quad (1.3)$$

Ako propoziciju 1.1.4. primijenimo na a', a, b, b' dobivamo

$$d(a', b') - d(a, b) \leq d(a, a') + d(b, b'). \quad (1.4)$$

Iz nejednadžbi (1.3) i (1.4) slijedi (1.2) □

1.1.6. Definicija. Neka je $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Kažemo da je $m \in \mathbb{R}$ **donja međa** skupa A ako je $\forall a \in A, m \leq a$. Skup A je ograničen odozdo ako ima bar jednu donju među. **Najveća donja međa (infimum)** skupa A je element $\inf A$ sa svojstvima:

- 1) $\inf A$ je donja međa za A , tj. $\forall a \in A, \inf A \leq a$,
- 2) $m \leq \inf A$ za svaku donju među m od A

1.1.7. Napomena. Uvjet 2) moguće je izraziti i na slijedeće načine:

- 2)' Za svaki $m > \inf A$ postoji $a \in A, a < m$
- 2)'' $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < \inf A + \varepsilon$.

Svaki neprazan odozdo omeđen skup realnih brojeva ima jednoznačno određen infimum u skupu $\mathbb{R}$.

Ako je $\inf A \in A$ tada pišemo $\inf A = \min A$, i kažemo da je **minimum** ili najmanji element skupa A . No, može biti $\inf A \notin A$, (tj. $\inf A$ ne mora pripadati skupu A).

Analogno se definira **gornja međa** i najmanja gornja međa (**supremum**) skupa B i označava s $\sup B$. Svaki neprazan odozgo omeđen skup realnih brojeva ima jedinstven supremum u skupu $\mathbb{R}$.

1.1.8. Primjer.

$$\begin{aligned} A = [0, +\infty) & \quad \min A = 0, \\ B = \langle -1, 1 \rangle & \quad \inf B = -1, \sup B = 1, \\ C = [-1, 1] & \quad \min C = -1, \max C = 1. \end{aligned}$$

Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in X$ bilo koja njegova točka, onda je udaljenost točke x_0 od skupa A broj:

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a); a \in A\}. \quad (1.5)$$

Kako je udaljenost $d(x_0, a) \geq 0$, to je skup u (1.5) odozdo omeđen i neprazan, pa njegov infimum postoji, tj. $d(x_0, A)$ je dobro definiran realan broj ≥ 0 .

Primijetimo, ako je $d(x_0, A) = 0$ to nužno ne povlači $x_0 \in A$. Naime $d(0, \langle 0, 1 \rangle) = 0$ ali $0 \notin \langle 0, 1 \rangle$.

1.1.9. Propozicija. Za svaki $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, i $x, y \in X$ vrijedi:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \quad (1.6)$$

Dokaz: Ako je $a \in A$, onda zbog definicije infimuma vrijedi:

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a), \text{ dakle} \\ d(x, A) - d(x, y) &\leq d(y, a), \quad (\forall a \in A) \Rightarrow \\ d(x, A) - d(x, y) &\leq \inf\{d(y, a); a \in A\} = d(y, A) \Rightarrow \\ d(x, A) - d(y, A) &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Zamijenimo li uloge točaka x i y , dobivamo

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y).$$

Iz prethodnih nejednakosti slijedi (1.6). □

Konačno, za dva podskupa $A, B \subset X$ u metričkom prostoru (X, d) definiramo njihovu udaljenost sa:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}. \quad (1.7)$$

Primijetimo da funkcija $d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X , zadovoljava samo prvi i treći od aksioma metrike.

1.1.10. Definicija. Neka su (X, d) i (X', d') metrički prostori i $f : X \rightarrow X'$ funkcija koja zadovoljava uvjete:

- 1) f čuva udaljenosti, tj. $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $(\forall x, y \in X)$.
- 2) f je bijekcija.

Tada kažemo da je f **izometrija** sa prostora X na prostor X' .

Ako vrijedi uvjet 1) onda je preslikavanje f injektivno. To je tzv. izometrično smještanje.

Kažemo da je metrički prostor (X, d) metrički ekvivalentan ili izometričan sa metričkim prostorom (Y, d') i pišemo $X \cong Y$, ako postoji bar jedna izometrija sa X na Y .

1.1.11. Propozicija. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na klasi svih metričkih prostora.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz činjenice da je identiteta izometrija, kompozicija izometrija je izometrija i inverz od izometrije je izometrija (vidi zadatak 1.1.12.). □

1.1.12. Zadatak. Neka je f izometrija, tada je f^{-1} također izometrija. Uvjeri se da je uz komponiranje kao binarnu operaciju skup $\mathcal{I}(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ izometrija} \}$ nekomutativna grupa.

1.2 Primjeri

1.2.1. Primjer. Na skupu $\mathbb{R}$ definiramo $d_1(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ i $d_2(\alpha, \beta) = \arctg|\alpha - \beta|$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dokažimo da su d_1 i d_2 metrike na $\mathbb{R}$.

- 1) $|\alpha - \beta| \geq 0$ i $\arctg|\alpha - \beta| \geq 0$.
- 2) $|\alpha - \beta| = 0 \Leftrightarrow \arctg|\alpha - \beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
- 3) $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ i $\arctg|\alpha - \beta| = \arctg|\beta - \alpha|$.

Da bismo dokazali 4) moramo pokazati da je $\arctg$ rastuća funkcija i da je subaditivna, tj. $\arctg(x + y) \leq \arctg(x) + \arctg(y)$ za $x, y \geq 0$. Zbog $(\arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, je $\arctg$ strogo rastuća funkcija na $\mathbb{R}$.

Neka je za čvrsto $y \geq 0$ definirana funkcija

$$f(x) = \arctg(x + y) - \arctg(x) - \arctg(y), \text{ za sve } x \geq 0.$$

Zbog $f'(x) = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{(1+x^2)} = -\frac{2xy+y^2}{(1+(x+y))^2(1+x^2)} \leq 0$ je f padajuća. Sada $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \arctg(x+y) - \arctg(x) - \arctg(y) \leq f(0) = 0$. Znamo da za $|\cdot|$ vrijedi nejednakost trokuta, pa zbog rasta funkcije $\arctg$ i subaditivnosti vrijedi

$$4) \arctg|\alpha - \beta| \leq \arctg(|\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|) \leq \arctg|\alpha - \gamma| + \arctg|\gamma - \beta|.$$

1.2.2. Primjer. Na $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n); \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ definiramo

$$d(x, y) = d((\alpha_i), (\beta_i)) = \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

To je standardna (euklidska) metrika na $\mathbb{R}^n$. Snabdjeven tom metrikom $\mathbb{R}^n$ nazivamo n dimenzionalni euklidski prostor. Svaki podskup od $\mathbb{R}^n$ je također metrički prostor.

Važnu kategoriju metričkih prostora čine normirani prostori. Neka je V (realan) linearni prostor, a $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje s ovim svojstvima:

- 1) $\forall a \in V, \|a\| \geq 0$, (pozitivna definitnost),
- 2) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, (strogost),
- 3) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in V$, (pozitivna homogenost),
- 4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \forall a, b \in V$, (nejednakost trokuta).

To preslikavanje nazivamo **norma** na prostoru V , a uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ je **normirani prostor**.

Svaki normirani prostor V postaje na prirodan način metrički prostor, preko metrike $d(a, b) = \|a - b\|$ inducirane normom na V . Odmah se iz svojstava norme vidi, da su za d ispunjena prva tri aksioma metrike, a četvrti se lako verificira:

$$d(a, b) = \|a - b\| = \|(a - c) + (c - b)\| \leq \|a - c\| + \|c - b\| = d(a, c) + d(c, b).$$

Tako je (V, d) metrički prostor.

1.2.3. Primjer. Na linearnom prostoru $\mathbb{R}^n$ je svakim od sljedećih izraza za $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ definirana jedna norma:

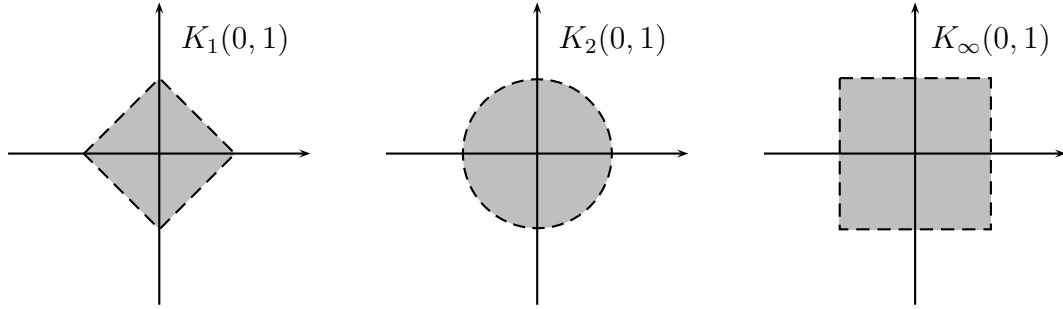
- 1) $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$
- 2) $\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p > 1,$

$$3) \|a\|_\infty = \max\{|\alpha_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

Tako dolazimo do normiranih prostora $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ koji preko normom inducirane metrike postaju metrički prostori.

Metrički prostor dobiven iz normiranog prostora $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ se podudara sa onim, koji smo direktno definirali u primjeru 1.2.2., euklidskim prostorom.

Primijetimo, da za svaki $a \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\|a\|_\infty \leq \|a\|_n \leq \sqrt[n]{n}\|a\|_\infty$, a odatle slijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a\|_n = \|a\|_\infty$.



Slika 1.1: Jedinične kugle u $\mathbb{R}^2$ za razne metrike

1.2.4. Primjer. Važan primjer metričkog prostora dobivenog iz normiranog prostora čini prostor omeđenih funkcija na danom skupu. Neka je T bilo koji skup. Funkcija $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ je omeđena, ako je skup $f(T)$ omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je $B(T) = \{f : T \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je omeđena} \}$ skup svih omeđenih funkcija definiranih na T . Onda je $B(T)$ linearni prostor, potprostor prostora $\mathbb{R}^T$ svih realnih funkcija definiranih na T . Na $B(T)$ definiramo normu formulom $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in T\}$. Lako se provjeri da se radi o dobro definiranoj normi. Ta norma onda inducira metriku $d(f, g) = \|f - g\| = \sup\{|f(t) - g(t)|; t \in T\}$ i tako dobivamo metrički prostor $B(T)$ svih omeđenih funkcija na T . U specijalnom slučaju, kada je $T = \mathbb{N}$ dobivamo $B(\mathbb{N})$, tj. prostor svih omeđenih nizova, a kada je $T = \{1, \dots, n\}$ dobivamo, da je $B(T) = \mathbb{R}^n$ s metrikom $d_\infty(a, b) = \max\{|\alpha_i - \beta_i|; i = 1, \dots, n\}$, tj. prostor koji je već spomenut u prethodnom primjeru.

1.2.5. Primjer. Kao što znamo, unitarni prostor je linearni prostor X nad poljem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ snabdjeven skalarnim produktom tj. preslikavanjem $(\cdot | \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa ovim svojstvima:

$$(1) \text{ pozitivna definitnost: } (x|x) \geq 0, \forall x \in X,$$

- (2) strogost: $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (3) antisimetrija: $(x|y) = \overline{(y|x)}$, $\forall x, y \in X$,
- (4) homogenost: $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in X$,
- (5) aditivnost: $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$, $\forall x, y, z \in X$.

U svakom takvom prostoru vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowsky

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (1.8)$$

Svaki unitarni prostor je normiran prostor s normom induciranom skalarnim produktom $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Lako se provjeri, da se radi o dobro definiranoj normi. Prva tri aksioma su ispunjena očigledno, a za nejednakost trokuta imamo:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

dakle, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Za normu u unitarnom prostoru vrijedi tzv. jednakost paralelograma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Obratno, kada u nekom normiranom prostoru za normu vrijedi jednakost paralelograma, na tom prostoru se može definirati skalarni produkt takav, da se inducirana norma podudara s normom na tom prostoru. Dakle, normirani prostor je unitaran ako i samo ako za njegovu normu vrijedi jednakost paralelograma.

Pokazuje se da prostori $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ s normama definiranim u primjeru 1.2.3. za $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, nisu unitarni prostori, tj. nemaju skalarni produkt koji bi inducirao normu, a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ je unitaran prostor.

Imamo inkluziju klasa: $\mathcal{U} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

1.2.6. Primjer. Neka je $X \neq \emptyset$ bilo koji skup. Na tom skupu definiramo udaljenost sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Lako se vidi, da se radi o dobro definiranoj metrici, koju nazivamo **diskretna metrika**, a skup X s takvom metrikom **diskretni prostor**.

1.2.7. Primjer. Neka je (X, d) bilo koji metrički prostor. Na skupu X možemo definirati novu metriku d' pomoću formule

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X,$$

koja je omeđena, tj. $d'(x, y) < 1$, za svaki $x, y \in X$. Lako se vidi da je d' zaista metrika. Provjerimo na primjer nejednakost trokuta. Najprije, jer je d metrika, imamo $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, pa pribrajanjem uz obje strane $d(x, y)[d(x, z) + d(z, y)]$ dobivamo:

$$d(x, y) + d(x, y)[d(x, z) + d(z, y)] \leq d(x, z) + d(z, y) + d(x, y)[d(x, z) + d(z, y)]$$

$$d(x, y)[1 + d(x, z) + d(z, y)] \leq [1 + d(x, y)][d(x, z) + d(z, y)],$$

odakle slijedi:

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = d'(x, z) + d'(z, y), \end{aligned}$$

što pokazuje, da je (X, d') metrički prostor.

1.2.8. Primjer. Neka su $a = (\alpha_1, \alpha_2), b = (\beta_1, \beta_2)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^2$. Definiramo $d(a, b) = |\alpha_1 - \beta_1|$. Onda d nije metrika, ali je pseudometrika na $\mathbb{R}^2$. Naime za sve točke na pravcu koji je paralelan s osi y udaljenost je 0.

1.3 Omeđeni i potpuno omeđeni prostori

1.3.1. Definicija. Neka je (X, d) metrički prostor, a $A \subseteq X$ njegov podskup. Kažemo da je A omeđen u X ako je skup $\{d(x, y); x, y \in A\}$ omeđen u $\mathbb{R}$. Posebno, u slučaju $A = X$ govorimo o **omeđenom prostoru**, ili kažemo da je metrika na prostoru X omeđena.

1.3.2. Primjer. Prostor $\mathbb{R}$ je u metrici $d(x, y) = \arctg(|x - y|) < \frac{\pi}{2}$ omeđen prostor. Za bilo koji metrički prostor (X, d) , prostor (X, d') , gdje je d' iz primjera 1.2.7., je omeđen prostor.

Naravno, na $\mathbb{R}$, odnosno $\mathbb{R}^n$, imamo mnoštvo primjera omeđenih prostora u standardnoj metrici. Svaki potprostor omeđenog metričkog prostora i sam je omeđen.

Za podskup $A \subseteq X$ metričkog prostora X definiramo njegov dijametar $\text{diam } A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$. Odmah se vidi da vrijedi:

1.3.3. Propozicija. *Neka su $A, B \subseteq X$ podskupovi metričkog prostora X . Onda vrijedi:*

- 1) *ako je $A \subseteq B$, onda je $\text{diam } A \leq \text{diam } B$,*
- 2) *$\text{diam } (A \cup B) \leq \text{diam } A + d(A, B) + \text{diam } B$.*

Dokaz: : 1) je trivijalno.

2) Kako je $d(A, B)$ infimum udaljenosti točaka iz A i B , za svaki $\varepsilon > 0$ postoje točke $a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$ takve da je $d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) - d(A, B) < \varepsilon$. Zato $\forall a \in A$ i $\forall b \in B$ po relaciji mnogokuta imamo:

$$d(a, b) \leq d(a, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) + d(b_\varepsilon, b) \leq \text{diam } A + d(A, B) + \text{diam } B + \varepsilon.$$

Kako je to istina $\forall \varepsilon > 0$ slijedi $d(a, b) \leq \text{diam } A + d(A, B) + \text{diam } B$.

Također, $\forall x, x' \in A$ i $\forall y, y' \in B$ vrijedi $\max\{d(x, x'), d(y, y')\} \leq \text{diam } A + \text{diam } B \leq \text{diam } A + d(A, B) + \text{diam } B$, što daje $d(x, y) \leq \text{diam } A + d(A, B) + \text{diam } B$, za svaki $x, y \in A \cup B$, tj. vrijedi 2). $\square$

1.3.4. Korolar. *Unija konačno mnogo omeđenih skupova i sama je omeđen skup.*

1.3.5. Definicija. Neka je $\mathcal{S} = \{S_\alpha; S_\alpha \subseteq S, \alpha \in \Lambda\}$ familija podskupova od S . Ako je $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha = S$ onda kažemo da je $\mathcal{S}$ **pokrivač** skupa S . Pokrivač $\mathcal{S}$ je konačan ako je skup Λ konačan, a prebrojiv ako je skup Λ prebrojiv.

1.3.6. Primjer. Pokrivači od $\mathbb{R}$ su $S = \{< r, r' >; r, r' \in \mathbb{R}, r' > r\}$, $S' = \{< q, q' >; q, q' \in \mathbb{Q}, q' > q\}$, $S'' = \{< n, n+2 >; n \in \mathbb{N}\}$, s tim da su S' i S'' prebrojivi pokrivači.

1.3.7. Definicija. Metrički prostor (X, d) je **potpuno omeđen** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan pokrivač $\mathcal{S}$ za skup X čiji su elementi dijametra manjeg od ε , tj. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $\text{diam } S_i < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$.

1.3.8. Korolar. *Svaki potpuno omeđen metrički prostor je i omeđen prostor.*

Obrat ne vrijedi općenito što pokazuje ovaj jednostavan primjer.

1.3.9. Primjer. Neka je $X = \mathbb{N}$ s diskretnom metrikom d iz primjera 1.2.6.. (X, d) je omeđen metrički prostor, međutim taj prostor nije potpuno omeđen. Ne postoji konačni pokrivač, čiji bi elementi bili dijametra manjeg od 1.

Obrat vrijedi za podskupove euklidskog prostora.

1.3.10. Teorem. *Svaki omeđen podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je potpuno omeđen.*

Dokaz: Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ omeđen, onda je $\text{diam}(A \cup \{0\}) = \alpha \in \mathbb{R}_+$. Neka je $I_\alpha = [-\alpha, \alpha]$ segment u $\mathbb{R}$ i $K = \underbrace{I_\alpha \times \cdots \times I_\alpha}_n$ je n -dimenzionalna kocka u

$\mathbb{R}^n$ sa središtem u ishodištu i stranicom duljine 2α .

Neka je $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ bilo koja točka. Onda je $|a_i| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = d(0, a) \leq \text{diam}(A \cup \{0\}) = \alpha$.

U smislu ranije primjedbe dovoljno je pokazati da je kocka K potpuno omeđen skup. Uzmimo $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ tako da je $k > \frac{\alpha\sqrt{n}}{\varepsilon}$. Podijelimo $I_\alpha = [-\alpha, \alpha]$ na $2k$ jednakih segmenata $I_j = [\frac{\alpha}{k}(i-1), \frac{\alpha}{k}i]$, $i = -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1$, tako dolazimo do kocaka $K_{i_1, \dots, i_n} = I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_n}$. Takvih kocaka ima $(2k)^n$ i one čine konačni pokrivač za K . Svaka mala kocka ima stranicu duljine $\frac{\alpha}{k}$ i njezin je dijametar $\text{diam } K_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\alpha}{k}\sqrt{n} < \varepsilon$. $\square$

1.3.11. Primjer. (Hausdorffova metrika) Neka je (X, d) metrički prostor i neka su $A, B \subset X$ omeđeni podskupovi. Prvo stavimo $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B); a \in A\}$, gdje je $d(a, B)$ definiran s (1.5).

Hausdorffova metrika d_H se zadaje s

$$d_H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}. \quad (1.9)$$

Pokažimo da je d_H pseudometrika na familiji svih ograničenih nepraznih podskupova od X . Pozitivnost, simetričnost i $(A = B) \Rightarrow (d_H(A, B) = 0)$ su očigledna svojstva. Pokažimo da vrijedi i nejednakost trokuta.

Iz (1.6) imamo $d(a, B) \leq d(c, B) + d(a, c)$, $\forall a \in A$ i $\forall c \in C$. Odatle je $d(a, B) \leq d(a, c) + \sup\{d(c, B); c \in C\} = d(a, c) + \rho(C, B)$, $\forall a \in A$ i $\forall c \in C$, a to daje $d(a, B) \leq d(a, C) + \rho(C, B)$, $\forall a \in A$. Iz prethodne nejednakosti imamo $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B); a \in A\} \leq \sup\{d(a, C); a \in A\} + \rho(C, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Sada u slučaju $d_H(A, B) = \rho(A, B)$ imamo $d_H(A, B) = \rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$, a isto vrijedi i u slučaju $d_H(A, B) = \rho(B, A)$.

1.3.12. Zadatak. Neka je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor sa standardnom metrikom $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokažite da za intervale $A = [0, 1)$ i $B = \langle 0, 1]$ vrijedi $d_H(A, B) = 0$ iako je $A \neq B$.

1.3.13. Zadatak. Pokažite da Hausdorffova metrika zadovoljava i aksiom strogosti 2) na skupu svih nepraznih konačnih podskupova metričkog prostora (X, d) , tj. ako su $A, B \subset X$ konačni skupovi i ako vrijedi $d_H(A, B) = 0$ onda je $A = B$.

1.4 Topologizacija metričkog prostora

1.4.1. Definicija. Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ njegova točka, a $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, realan broj. Pod **otvorenom kuglom** u prostoru X sa središtem u x_0 i radijusom r podrazumijevamo skup $U(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$.

Neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U **otvoren** skup u prostoru X ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala iz tog prostora.

1.4.2. Teorem. *Skup $U \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d) je otvoren ako i samo ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji kugla $U(x_0, r) \subseteq U$.*

Dokaz: Primijetimo da se oko svake točke x dane kugle $U(x_0, r)$ može opisati mala kugla koja je sadržana u toj većoj kugli. Dovoljno je uzeti za radijus manje kugle $\rho = r - d(x, x_0)$, pa je $U(x, \rho) \subseteq U(x_0, r)$. Naime, za $y \in U(x, \rho)$ je $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) = r$.

Neka je U otvoren skup i $x_0 \in U$. Prema definiciji otvorenog skupa postoji kugla $U(y_0, r_0) \subseteq U$ koja sadrži x_0 . Sada, prema prethodnom, postoji kugla $U(x_0, \rho) \subseteq U(y_0, r_0) \subseteq U$.

Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup takav da za svaki $x \in U$ postoji kugla $U(x, r_x) \subseteq U$. Tada vrijedi $U = \bigcup_{x \in U} U(x, r_x)$, tj. U je unija kugala, pa je otvoren skup po definiciji. □

1.4.3. Teorem. *U metričkom prostoru kolekcija $\mathcal{T}$ svih otvorenih skupova ima svojstva:*

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- 2) unija bilo koje familije iz $\mathcal{T}$ je iz $\mathcal{T}$,
- 3) presjek konačne familije elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$.

Dokaz: 1) i 2) slijede neposredno iz definicije otvorenih skupova. Svojstvo 3) je dovoljno dokazati za dva elementa iz $\mathcal{T}$. Neka su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ i $U = U_1 \cap U_2$. Da bi dokazali da je U otvoren, prema teoremu 1.4.2. dovoljno je vidjeti da za svaki $x \in U$ postoji kugla $U(x, r) \subseteq U$. Kako je U_1 otvoren to postoji $U(x, r_1) \subset U_1$ i analogno, za U_2 postoji $U(x, r_2) \subset U_2$. Sada za $r = \min\{r_1, r_2\}$ vrijedi $U(x, r) \subseteq U(x, r_1) \cap U(x, r_2) \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. □

Familija $\mathcal{T}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se topološka struktura ili **topologija** prostora (X, d) .

1.5 Ekvivalencija topoloških struktura

1.5.1. Definicija. Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na istom skupu X . Kažemo da su metrike **topološki ekvivalentne** i pišemo $d_1 \sim d_2$ ako se topološka struktura $\mathcal{T}_1$ na metričkom prostoru (X, d_1) podudara sa topološkom strukturom $\mathcal{T}_2$ na metričkom prostoru (X, d_2) , i pišemo $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Drugim riječima, metrike su topološki ekvivalentne ako induciraju istu topološku strukturu, tj. istu kolekciju otvorenih skupova.

Promatramo sada dvije metrike d_1 i d_2 na skupu X , i neka je za $i = 1, 2$ sa $U_i(x_0, r)$ označena kugla oko točke x_0 u metrici d_i , tj. $U_i \in \mathcal{T}_i$.

1.5.2. Teorem. *Metrike d_1 i d_2 na skupu X su topološki ekvivalentne ako i samo ako za svaki $x_0 \in X$ i za svaku kuglu $U_1(x_0, r_1)$ u metrici d_1 postoji kugla $U_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 takva da je $U_2(x_0, r_2) \subseteq U_1(x_0, r_1)$, i obratno, ako za svaku kuglu $U_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 postoji kugla $U_1(x_0, r_1)$ u metrici d_1 takva da je $U_1(x_0, r_1) \subseteq U_2(x_0, r_2)$.*

Dokaz: Za dokaz nužnosti neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne i neka je $U_1(x_0, r_1)$ bilo koja kugla u metrici d_1 . Onda je ta kugla otvoren skup u topologiji $\mathcal{T}_1$ pa je to (po pretpostavci) otvoren skup i u topologiji $\mathcal{T}_2$. No, prema teoremu 1.4.2. o karakterizaciji otvorenih skupova, postoji kugla $U_2(x_0, r_2)$ oko točke x_0 , takva da je $U_2(x_0, r_2) \subseteq U_1(x_0, r_1)$. Analogno se vidi da vrijedi i obratno.

Za dokaz dovoljnosti pretpostavimo da za svaku kuglu u metrici d_1 postoji kugla u metrici d_2 s istim središtem, koja je u njoj sadržana i obratno. Neka je $V \in \mathcal{T}_1$ bilo koji otvoren skup u topološkoj strukturi na (X, d_1) . Treba vidjeti da je takav $V \in \mathcal{T}_2$. Prema teoremu 1.4.2. postoji kugla $U_1(x_0, r_1) \subseteq V$. Iz pretpostavke zaključujemo, da postoji manja kugla $U_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 , sa istim središtem, tako da je $x_0 \in U_2(x_0, r_2) \subseteq U_1(x_0, r_1)$. Kako je to istina za svaki $x_0 \in V$, skup V je otvoren u topologiji $\mathcal{T}_2$, tj. $V \in \mathcal{T}_2$, pa je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Slično se vidi da je $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, dakle $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, tj. $d_1 \sim d_2$. $\square$

Na primjer, metrike d_1, d_2 i d_∞ su topološki ekvivalentne na $\mathbb{R}^n$, što je očito iz geometrijskih razloga.

1.5.3. Definicija. Kažemo da je metrika na prostoru (X, d) **omeđena**, ako je prostor X u toj metrici omeđen, tj. ako je $\text{diam } X < \infty$.

1.5.4. Propozicija. *Za svaku metriku d na skupu X postoji topološki ekvivalentna metrika d' , koja je omeđena.*

Dokaz: Neka je d bilo koja metrika na X . Onda je d' dana sa

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \forall x, y \in X,$$

također metrika na X , koja je omeđena, jer je $d'(x, y) < 1$. Treba vidjeti da je $d \sim d'$.

Neka je $U(x_0, r)$ bilo koja kugla u metrici d . Za $x \in U(x_0, r)$ je $d(x_0, x) < r$. Možemo uzeti $r = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, gdje je $0 < \varepsilon < 1$. Tada je

$$d'(x_0, x) = \frac{d(x_0, x)}{1 + d(x_0, x)} < \frac{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \varepsilon,$$

pa zbog $r = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > \varepsilon$, uz $r' = \varepsilon$, imamo $U'(x_0, r') \subseteq U(x_0, r)$. Analogno se vidi da vrijedi i obratno, pa tvrdnja slijedi iz teorema 1.4.2. $\square$

Sada ćemo definirati još jednu ekvivalenciju metrika, koja daje finiju klasifikaciju od prethodne.

1.5.5. Definicija. Kažemo da su metrike d_1 i d_2 na istom skupu X ekvivalentne i pišemo $d_1 \approx d_2$, ako postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ takvi da je $d_1(x, y) \leq \lambda_1 d_2(x, y)$ i $d_2(x, y) \leq \lambda_2 d_1(x, y)$ za svaki $x, y \in X$. Ponekad se u ovom slučaju govori i o **uniformnoj ekvivalenciji**.

Na primjer, metrike d_1, d_2 i d_∞ su ekvivalentne na $\mathbb{R}^n$ i u ovom smislu.

1.5.6. Propozicija. *Ekvivalentne metrike su uvijek i topološki ekvivalentne.*

Dokaz: Neka je $d_1 \approx d_2$ i promatramo kuglu $U_1(x_0, r_1)$. Definirajmo $r_2 = \frac{r_1}{\lambda_1} > 0$ i tvrdimo da je $U_2(x_0, r_2) \subseteq U_1(x_0, r_1)$. Zaista, za $x \in U_2(x_0, r_2)$ imamo $d_2(x_0, x) < r_2$, pa iz definicije slijedi $d_1(x_0, x) \leq \lambda_1 d_2(x_0, x) < r_1$, tj. $x \in U_1(x_0, r_1)$ i tvrdnja je dokazana.

Analogno se pokazuje i druga inkluzija, pa tvrdnja slijedi iz teorema 1.5.2. $\square$

Obrat tvrdnje propozicije 1.5.6. nije općenito istinit.

1.6 Direktni produkt prostora

Neka su (X', d') i (X'', d'') metrički prostori. Promatramo kartezijev produkt $X = X' \times X''$ danih skupova i želimo ga snabdjeti metričkom strukturom, induciranom metrikama na X' i X'' . Ima nekoliko prirodnih načina, kako se to može učiniti. Neka su $x = (x', x'')$ i $y = (y', y'')$ bilo koje dvije točke iz X . Definiramo:

- 1) $d_1(x, y) = d'(x', y') + d''(x'', y'')$,
- 2) $d_2(x, y) = \sqrt{d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2}$,
- 3) $d_\infty(x, y) = \max\{d'(x', y'), d''(x'', y'')\}$.

1.6.1. Propozicija. *Svakim od preslikavanja d_1 , d_2 i d_∞ dana je metrika na Kartezijevom produktu $X = X_1 \times X_2$.*

Dokaz: Lako se provjere aksiomi metrike. □

Za svaku od tih metrika postoje dakle metrički prostori $X_1 \times X_2$, direktni produkti prostora X_1 i X_2 .

1.6.2. Propozicija. *Za metrike d_1 , d_2 i d_∞ vrijede ove nejednakosti:*

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{2}d_\infty(x, y),$$

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq 2d_\infty(x, y),$$

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{2}d_2(x, y).$$

Dokaz: Ako je $d'(x', y') \geq d''(x'', y'')$, onda vrijedi

$$d_\infty(x, y) = d'(x', y') \leq \sqrt{d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2} = d_2(x, y).$$

U drugu ruku je

$$2d_\infty(x, y)^2 = 2d'(x', y')^2 \geq d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2 = d_2(x, y)^2$$

pa je $d_2(x, y) \leq \sqrt{2}d_\infty(x, y)$ i prve nejednakosti su provjerene.

Za druge nejednakosti slično vrijedi

$$d_\infty(x, y) = d'(x', y') \leq d'(x', y') + d''(x'', y'') = d_1(x, y) \leq 2d'(x', y') = 2d_\infty(x, y).$$

Treće nejednakosti slijede iz $0 \leq d'(x', y')d''(x'', y'') \leq d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2$. □

1.6.3. Korolar. *Metrike d_1 , d_2 i d_∞ su ekvivalentne, pa onda i topološki ekvivalentne na prostoru $X = X' \times X''$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.6.2. i propozicije 1.5.6.. $\square$

Prema tome, bilo koju od tih metrika odabrali na $X' \times X''$, dobivamo na tom skupu istu topološku strukturu $\mathcal{T}$ i to je **topologija direktnog produkta dvaju metričkih prostora**.

Pojam se lako generalizira na konačno mnogo faktora. Neka su $(X_i, d^{(i)})$, $i = 1, \dots, k$, metrički prostori, a $X = X_1 \times \dots \times X_k$ njihov Kartezijev produkt.

Na X definiramo metriku sa:

$$1) \ d_1(x, y) = \sum_{i=1}^k d^{(i)}(x_i, y_i),$$

$$2) \ d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k d^{(i)}(x_i, y_i)^2},$$

$$3) \ d_\infty(x, y) = \max\{d^{(i)}(x_i, y_i); i = 1, \dots, k\}.$$

gdje je $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in X$.

Dolazimo do metrika za koje vrijedi:

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{k} d_\infty(x, y),$$

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq k d_\infty(x, y),$$

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_2(x, y),$$

koje su ekvivalentne pa onda i topološki ekvivalentne, tj. induciraju istu topologiju na $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$.

1.6.4. Primjer. Neka su $(X', \|\cdot\|')$ i $(X'', \|\cdot\|'')$ normirani vektorski prostori, a $X = X' \times X''$ direktni produkt linearnih prostora X' i X'' . X je normirani prostor za bilo koju od normi

$$\|(x', x'')\|_1 = \|x'\|' + \|x''\|'',$$

$$\|(x', x'')\|_2 = \sqrt{\|x'\|'^2 + \|x''\|''^2},$$

$$\|(x', x'')\|_\infty = \max\{\|x'\|', \|x''\|''\}.$$

Pomoću tih normi dolazimo do metrika $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ za $i = 1, 2, \infty$ koje predstavljaju ranije definirane produktne metrike na $X = X' \times X''$.

1.6.5. Primjer. Ako na $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ metrike d_1 , d_2 i d_∞ definiramo kao metrike direktnog produkta one se podudaraju sa metrikama definiranim ranije na $\mathbb{R}^n$ pomoću odgovarajuće norme, pa su te metrike ekvivalentne na $\mathbb{R}^n$.

1.7 Potprostor metričkog prostora

Neka je (X, d) metrički prostor i $Y \subseteq X$. Onda je (Y, d') , gdje je $d' = d|_{Y \times Y}$ također metrički prostor. No metrika inducira topološke strukture $\mathcal{T}$ na X i $\mathcal{T}'$ na Y . Na pitanje u kakvom su odnosu te strukture, odgovor daje ovaj teorem:

1.7.1. Teorem. *Neka je $Y \subseteq X$ potprostor metričkog prostora X . Skup $V \subseteq Y$ je otvoren u prostoru Y ako i samo ako postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u X , tako da je $V = U \cap Y$, tj.*

$$V \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T}, U \cap Y = V.$$

Dokaz: Nužnost: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren u Y . Tada prema karakterizaciji otvorenih skupova za svaki $x \in V$ postoji kugla $U_Y(x, r_x)$ takva da je $x \in U_Y(x, r_x) \subseteq V$. Promatrajmo kuglu $U_X(x, r_x)$ s istim središtem i radijusom, ali u prostoru X . Očito vrijedi $U_Y(x, r_x) = U_X(x, r_x) \cap Y$. No skup $U = \bigcup_{x \in V} U_X(x, r_x)$ je otvoren u X (kao unija kugala u X), pa je

$$U \cap Y = \left[\bigcup_{x \in V} U_X(x, r_x) \right] \cap Y = \bigcup_{x \in V} [U_X(x, r_x) \cap Y] = \bigcup_{x \in V} U_Y(x, r_x) = V.$$

Dovoljnost: Neka je $V \subseteq Y$, a $U \subseteq X$ otvoren skup u X takav, da je $V = U \cap Y$. Tvrđimo da je V otvoren skup u Y . Kako je $V \subseteq U$, za svaki $x \in V$ postoji kugla $U(x, r_x)$ takva, da je $x \in U(x, r_x) \subseteq U$. Tada je $x \in U(x, r_x) \cap Y \subseteq U \cap Y = V$. Međutim $U(x, r_x) \cap Y = U_Y(x, r_x)$, dakle je $x \in U_Y(x, r_x) \subseteq V$, pa je V otvoren u Y . $\square$

Poglavlje 2

TOPOLOŠKI PROSTORI

2.1 Definicija topološkog prostora

Imajući pred očima metrički prostor kao model, generalizacijom dolazimo do šire klase objekata, tzv. topoloških prostora. U izgradnji pojma prostora posebnu zaslugu imaju Frechet i Hausdorff.

Neka je X dani skup, a $\mathcal{T} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ familija podskupova od X (Λ je indeksni skup) koja zadovoljava ove uvjete:

- 1) Prazan skup i cijeli skup X su elementi od $\mathcal{T}$, tj. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- 2) $\mathcal{T}$ je zatvorena na uniju, tj. unija bilo koje podfamilije elemenata iz $\mathcal{T}$ i sama je element od $\mathcal{T}$. Preciznije, ako za svaki $\lambda \in \Lambda' \subseteq \Lambda$ vrijedi $U_\lambda \in \mathcal{T}$ onda je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \in \mathcal{T}$.
- 3) $\mathcal{T}$ je zatvorena na konačne presjeke, tj. presjek od konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$. Preciznije, ako su $U_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, \dots, k$, onda je i $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$.

2.1.1. Definicija. Kažemo da je $\mathcal{T}$ **topološka struktura** ili kraće **topologija** na skupu X . Par $(X, \mathcal{T})$ koji se sastoji iz skupa X i topološke strukture $\mathcal{T}$ definirane na tom skupu naziva se **topološki prostor**. Elemente skupa X nazivamo točke topološkog prostora, a elementi familije $\mathcal{T}$ su otvoreni skupovi u prostoru X .

Zahtjevi 1)-3) iz definicije nazivaju se aksiomi topologije. Primijetimo, da se ovdje ne definira pojam otvorenog skupa nego je to osnovni pojam, implicitno opisan aksiomima. U alternativnim definicijama topoloških prostora za osnovi se pojam mogu uzeti zatvoreni skupovi ili pak pojam zatvorenja (aksiomi Kuratovskog).

Kako smo vidjeli, svaki je metrički prostor (X, d) na prirodan način i topološki prostor, jer familija $\mathcal{T} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, gdje je svaki U_λ unija kugala u metrici d , zadovoljava aksiome 1)-3) i prema tome definira jednu topološku strukturu na X .

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor sa svojstvom da se topologija $\mathcal{T}$ može dobiti na upravo opisani način iz neke metrike definirane na X . Tada kažemo da je taj prostor **metrizabilan**.

Osnovni primjeri topoloških prostora su metrički odnosno metrizable prostori, ali postoje i topološki prostori koji nisu metrizable.

Kad je iz konteksta jasno o kojoj se topološkoj strukturi na prostoru $(X, \mathcal{T})$ radi, kraće ćemo govoriti i pisati naprosto o topološkom prostoru X .

Na istom skupu možemo definirati različite topološke strukture $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, pa tako dolazimo do različitih topoloških prostora, $(X, \mathcal{T}_1) \neq (X, \mathcal{T}_2)$.

2.1.2. Definicija. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dvije topološke strukture na istom skupu X . Kažemo da je $\mathcal{T}_1$ **slabija** od $\mathcal{T}_2$, odnosno da je $\mathcal{T}_2$ **jača** od $\mathcal{T}_1$ i pišemo $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ ako je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ tj. ako iz $U \in \mathcal{T}_1$ slijedi da je $U \in \mathcal{T}_2$.

Sinonimi su slabija je manja ili grublja, a za jača je veća ili finija. Topološke strukture mogu biti i neusporedive. Skup svih topoloških struktura na skupu X je parcijalno uređen skup.

Na skupu X možemo definirati topološku strukturu $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. To je tzv. trivijalna topologija na X i ona je očito najslabija (najmanja) od svih topologija na X . U drugu ruku, ako na X definiramo $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (partitivni skup od X), onda je to također topološka struktura, koju nazivamo diskretna topologija na X . To je najjača (najveća) topologija na X .

2.1.3. Primjer. Na $X = \{a, b\}$ postoje ove topološke strukture:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \text{ (trivijalna topologija)}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} \text{ (diskretna topologija)}$$

2.1.4. Primjer. Na $\mathbb{R}$ možemo definirati različite topologije:

$\mathcal{T}_1$: $U \in \mathcal{T}_1$ ako i samo ako je U unija otvorenih intervala u $\mathbb{R}$ tj.

$$\forall x \in U, \exists a, b \in \mathbb{R}, a < b, x \in (a, b) \subseteq U.$$

To je tzv. prirodna topologija na pravcu.

$\mathcal{T}_2$: $U \in \mathcal{T}_2$ ako i samo ako je $U = \emptyset, \mathbb{R}$ ili $\exists a \in \mathbb{R}, U =]-\infty, a[$.

$\mathcal{T}_3$: $U \in \mathcal{T}_3$ ako i samo ako je $U = \emptyset$ ili je U takav da je $\mathbb{R} \setminus U$ konačan skup.

Provjerite da su $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_3$ topološke strukture. Može se pokazati da je $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ nemetrizabilan topološki prostor.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, a $Y \subseteq X$ podskup. Y možemo snabdjeti nekom topologijom tako da postane topološki prostor. Mi želimo Y snabdjeti takvom topologijom koja je inducirana topologijom na X , tako da možemo govoriti o potprostoru, kao u slučaju metričkih prostora. U tom smislu definiramo topološku strukturu $\mathcal{V} = \{V_\lambda; q, \lambda \in \Lambda\}$ na Y stavljajući $V \in \mathcal{V}$ ako i samo ako postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $V = U \cap Y$.

2.1.5. Propozicija. $\mathcal{V}$ je dobro definirana topološka struktura na Y .

Dokaz: Provjerimo aksiome topologije:

(1) $\emptyset = \emptyset \cap Y, Y = X \cap Y \in \mathcal{V}$ jer su $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

$$(2) \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} (U_\lambda \cap Y) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \right) \cap Y.$$

$$(3) \bigcap_{i=1}^n V_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap Y. \quad \square$$

Par $(Y, \mathcal{V})$ nazivamo **potprostor topološkog prostora** $(X, \mathcal{T})$, a topologiju $\mathcal{V}$ **relativna topologija** na Y inducirana topologijom $\mathcal{T}$ na X .

Ako je $Y \subseteq X$ potprostor metričkog prostora (X, d) , pomoću teorema 1.7.1. zaključujemo da $d|_{Y \times Y}$ inducira relativnu topologiju, tj. Y je potprostor topološkog prostora X .

Naprimjer, svaki podskup $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ topološkog prostora $\mathbb{R}^n$ (sa topološkom strukturom induciranom bilo kojom od topološki ekvivalentnih metrika d_1, d_2, d_∞) je potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Važniji potprostori od $\mathbb{R}^n$:

(1) n -ćelija $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 \leq 1\}$,

(2) n -sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 = 1\}$.

Uz topološke prostore promatramo preslikavanja koja čuvaju njihovu topološku strukturu.

2.1.6. Definicija. Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori, a $f : X \rightarrow Y$ preslikavanje sa svojstvima:

- (1) f je bijekcija,
- (2) $\forall U \in \mathcal{T}$ je $f(U) \in \mathcal{V}$,
- (3) $\forall V \in \mathcal{V}$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$

Tada kažemo da je f **homeomorfizam** prostora X i Y . Homeomorfizam preslikava otvorene skupove iz X na otvorene skupove u Y i obratno, tj. prevodi topološku strukturu na topološku strukturu.

2.1.7. Propozicija. *Kompozicija homeomorfizama je homeomorfizam. Inverz homeomorfizma je homeomorfizam.*

Dokaz: Dokaz je trivijalan jer se sva tri svojstva homeomorfizma čuvaju kod kompozicije funkcija. □

Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ homeomorfan sa $(Y, \mathcal{V})$ i pišemo $X \cong Y$, ako postoji homeomorfizam $f : X \rightarrow Y$.

2.1.8. Propozicija. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi neposredno iz propozicije 2.1.7. □

Pomoću te relacije klasificiramo topološke prostore u klase međusobno homeomorfni prostora.

Svojstvo prostora, koje je isto za sve prostore iz iste klase (sve homeomorfne prostore), zove se **topološko svojstvo** ili **topološka invarijanta**. Topološke invarijante su važne kod dokazivanja da dva prostora nisu homeomorfna.

2.2 Baza topologije

2.2.1. Definicija. Baza topologije je svaka podfamilija topologije koja generira topološku strukturu. Preciznije, neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ podskup topološke strukture sa svojstvom da se svaki $U \in \mathcal{T}$ može dobiti kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$, tj. $U = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$, $U_{\lambda} \in \mathcal{B}$, onda kažemo da je $\mathcal{B}$ **baza topologije** $\mathcal{T}$.

Naprimjer, u metričkom prostoru je baza skup svih kugala u tom prostoru.

2.2.2. Propozicija. *Baza topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ima svojstva:*

(1) $\mathcal{B}$ je pokrivač za X .

(2) Ako su $U, V \in \mathcal{B}$ i $x_0 \in U \cap V$, onda postoji $S \in \mathcal{B}$, tako da je $x_0 \in S \subseteq U \cap V$ tj. $U \cap V$ je unija elemenata iz $\mathcal{B}$, odnosno $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Dokaz: Kako je X otvoren u X , po definiciji baze, X se može dobiti kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$, tj. $\mathcal{B}$ je pokrivač za X .

Nadalje, za $U, V \in \mathcal{B}$ je $U \cap V \in \mathcal{T}$, pa se može dobiti kao unija elemenata iz baze. Dakle, ako je $x_0 \in U \cap V$ to postoji $S \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in S \subseteq U \cap V$. $\square$

Ta dva svojstva karakteriziraju bazu.

2.2.3. Propozicija. Neka je X dani skup, a $\mathcal{B}$ familija podskupova od X sa svojstvima (1) i (2) iz propozicije 2.2.2. Onda postoji jedna i samo jedna topologija $\mathcal{T}$ na X sa svojstvom da je $\mathcal{B}$ baza te topologije. Elementi topologije $\mathcal{T}$ su podskupovi iz X , koji se mogu dobiti kao unije elemenata iz $\mathcal{B}$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{T}$ kolekcija svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Provjerimo da je $\mathcal{T}$ jedna topologija na X .

Prazan skup je po definiciji otvoren, a $X \in \mathcal{T}$ je zbog svojstva (1). Da je $\mathcal{T}$ zatvorena na operaciju unije slijedi iz svojstva asocijativnosti unije. Zatvorenost $\mathcal{T}$ na konačne presjeke, a dovoljno je pokazati zatvorenost na presjeke po dva elementa, slijedi odmah iz svojstva (2) za $\mathcal{B}$.

Iz definicije baze je jasno da je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$ i da je to jedina topologija s bazom $\mathcal{B}$. $\square$

Topologija na X se obično задаje preko baze, tj. задаje se jedna familija sa svojstvima (1) i (2). Tako smo postupili i u slučaju metričkih prostora. Tamo je jedna prirodna baza skup svih otvorenih kugala.

Isto topološki prostor dopušta razne i raznobrojne baze. Trivijalna baza neke topologije je sama ta topologija. No, od interesa su baze sa što manjim kardinalnim brojem.

2.2.4. Definicija. Težina topološkog prostora X je najmanji kardinalni broj α takav da postoji baza $\mathcal{B}$ topologije od X sa svojstvom da je $\alpha = \text{card}(\mathcal{B})$. Tada pišemo $\alpha = \omega(X)$. Ako je $\omega(X) \leq \aleph_0$, gdje je $\aleph_0$ kardinalni broj prirodnih brojeva, kažemo da X ima **prebrojivu bazu topologije** ili da zadovoljava **II aksiom prebrojivosti**.

2.2.5. Primjer. Ako je $\mathbb{R}$ snabdjeven prirodnom topologijom, jednu bazu čine svi intervali, tj. $\mathcal{B}_1 = \{ \langle a, b \rangle; a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$, pa je $\text{card}(\mathcal{B}_1) = c = 2^{\aleph_0}$.

Druga ekonomičnija baza za istu topologiju je $\mathcal{B}_2 = \{\langle p, q \rangle; p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$. Vrijedi $\text{card}(\mathcal{B}_2) = \aleph_0$ dakle je $\omega(\mathbb{R}) \leq \aleph_0$. No, $\omega(\mathbb{R})$ ne može biti konačan, jer se sa konačno intervala pravac ne može pokriti. Zato je $\omega(\mathbb{R}) = \aleph_0$. Jasno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\omega(\mathbb{R}^n) = \aleph_0$.

Ako je X topološki prostor sa diskretnom topologijom, njegovu bazu čine sve točke iz X shvaćene kako jednočlani skupovi.

Primijetimo, da metrički prostor ne mora općenito imati prebrojivu bazu. Ako je X neprebrojiv skup, a (X, d) metrički prostor sa diskretnom metrikom, onda je to topološki prostor sa diskretnom topologijom, pa je $\omega(X) > \aleph_0$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. **Podbaza** topologije $\mathcal{T}$ je familija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ koja ima svojstvo da skup svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{P}$ predstavlja bazu za $\mathcal{T}$. Drugim riječima, svaki se otvoreni skup može dobiti kao unija konačnih presjeka elemenata iz podbaze.

2.2.6. Propozicija. *Neka je $\mathcal{P}$ familija podskupova od X , koja je pokrivač za skup X . Onda je $\mathcal{P}$ podbaza neke topologije na X .*

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ familija svih konačnih presjeka skupova iz $\mathcal{P}$. Tvrdimo da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije. Treba vidjeti da $\mathcal{B}$ ima svojstva (1) i (2) iz propozicije 2.2.2. Onda je prema propoziciji 2.2.3. to baza koja jednoznačno generira topologiju na X .

Očito je da je $\mathcal{B}$ pokrivač za X , jer je već $\mathcal{P}$ pokrivač i $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$. Nadalje, za $U, V \in \mathcal{B}$ je $U = U_1 \cap \dots \cap U_k$ i $V = V_1 \cap \dots \cap V_r$, gdje su $U_i, V_j \in \mathcal{P}$, $\forall i, j$. Tada je $U \cap V = U_1 \cap \dots \cap U_k \cap V_1 \cap \dots \cap V_r \in \mathcal{B}$ po definiciji familije $\mathcal{B}$. $\square$

2.3 Nutrina i zatvorenje skupa

Neka je $A \subseteq X$ podskup topološkog prostora X . Definiramo $\text{int } A$, **nutrinu (interior)** skupa A , kao najveći otvoreni skup koji je sadržan u A .

Unija otvorenih skupova koji su podskupovi od A je otvoren skup, i to je najveći otvoreni skup u X koji je sadržan u A , tj. sadrži svaki otvoreni podskup od A . Dakle, $\text{int } A$ je unija svih otvorenih skupova koji su podskupovi od A .

2.3.1. Teorem. *Nutrina podskupova iz prostora X ima ova svojstva:*

- (1) $\text{int } A \subseteq A$,
- (2) $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$,
- (3) $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$,

$$(4) (A \subseteq B) \Rightarrow (\text{int } A \subseteq \text{int } B),$$

$$(5) \text{int } X = X,$$

$$(6) A \subseteq X \text{ je otvoren} \Leftrightarrow A = \text{int } A.$$

Dokaz: Tvrdnje (1), (2), (4), (5) i (6) su evidentne, pa dokazujemo samo (3). Zbog (4) imamo $(A \cap B \subseteq A) \Rightarrow (\text{int } (A \cap B) \subseteq \text{int } A)$ i $(A \cap B \subseteq B) \Rightarrow (\text{int } (A \cap B) \subseteq \text{int } B)$ pa je $\text{int } (A \cap B) \subseteq (\text{int } A \cap \text{int } B)$.

Obratno, zbog (1) je $(\text{int } A \cap \text{int } B) \subseteq (A \cap B)$. No, $\text{int } A \cap \text{int } B$ je otvoren skup sadržan u $A \cap B$, a kako je $\text{int } (A \cap B)$ najveći takav skup, imamo $(\text{int } A \cap \text{int } B) \subseteq \text{int } (A \cap B)$. Odatle slijedi jednakost (4). $\square$

2.3.2. Definicija. Neka je $x \in X$ bilo koja točka. **Okolina** točke x je svaki skup $O \subseteq X$ sa svojstvom, da je x u njegovoj nutrini, tj. $x \in \text{int } O$.

Svaka točka $x \in X$ ima okolinu. Naprimjer, čitav X je jedna okolina točke. Iz definicije slijedi da je okolina točke ili otvoren skup koji ju sadrži ili nadskup takvog skupa.

Neka je sa $\vartheta(x)$ označen skup svih okolina točke x .

2.3.3. Teorem. *Familija $\vartheta(x)$ ima ova svojstva:*

$$(1) O \in \vartheta(x) \Rightarrow x \in O,$$

$$(2) O \in \vartheta(x) \text{ i } O \subseteq O' \Rightarrow O' \in \vartheta(x),$$

$$(3) O_1, O_2 \in \vartheta(x) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \vartheta(x), \text{ tj. presjek okolina točke } x \text{ je opet okolina točke } x.$$

Dokaz: Tvrdnje (1) i (2) su očigledne. Dokazujemo samo tvrdnju (3). Neka su O_1, O_2 okoline od x . To znači da je $x \in \text{int } O_1 \cap \text{int } O_2 = \text{int } (O_1 \cap O_2)$, pa je $O_1 \cap O_2$ okolina od x po definiciji. $\square$

Tvrdnja (3) iz teorema lako se generalizira na konačno mnogo okolina, ali ne vrijedi za beskonačno mnogo njih.

2.3.4. Primjer. Neka je $\mathbb{R}$ topološki prostor s topologijom generiranom otvorenim intervalima. Za svako $x \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ je $O_n = \langle x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \rangle$ otvorena okolina točke x . Međutim, za $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{x\}$ je $\text{int } \{x\} = \emptyset$ i zato $\{x\}$ nije okolina od x .

2.3.5. Definicija. **Baza okolina** točke $x \in X$ je $\beta(x)$, podskup skupa svih okolina $\vartheta(x)$, sa svojstvom da za svaku okolinu $O \in \vartheta(x)$ postoji okolina $B \in \beta(x)$ takva da je $B \subseteq O$.

Naprimjer, sve okoline od x koje su otvoreni skupovi, tzv. otvorene okoline, čine jednu bazu okolina za $\vartheta(x)$.

Od interesa su baze s najmanje okolina. Naprimjer, u metričkom prostoru jednu bazu okolina za x čine sve kugle oko x , $\beta_1(x) = \{U(x, r); r > 0\}$. Također, je i $\beta_2(x) = \{U(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}$ baza okolina od x s prebrojivo elementa.

2.3.6. Definicija. Najmanji kardinalni broj k takav da za $x \in X$ postoji baza okolina $\beta(x)$, $\text{card } \beta(x) = k$, naziva se **težina prostora** X u točki x ili **lokalna težina** prostora u x ili karakter prostora X u točki x . Pišemo $k = \omega(x)$.

Naprimjer, lokalna težina u nekoj točki $x \in \mathbb{R}$ je $\aleph_0$, jer postoji prebrojiva baza okolina, a manje nema.

Iz prethodne primjedbe je jasno da svaki metrički prostor ima prebrojivu bazu okolina, dakle, za svako x je lokalna težina $\omega(x) = \aleph_0$.

Ako je za prostor X lokalna težina u svakoj njegovoj točki najviše $\aleph_0$, kažemo da je taj prostor **prebrojivog karaktera** ili da zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti**.

Naprimjer, svi metrički prostori zadovoljavaju I aksiom prebrojivosti. Naravno, II aksiom prebrojivosti implicira I aksiom prebrojivosti, ali obrat općenito ne vrijedi.

2.3.7. Propozicija. *Skup $U \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje točke.*

Dokaz: Ako je U otvoren, tada za svaki $x \in U$ vrijedi $x \in \text{int } U = U$, pa je U okolina od x .

Obratno, ako je za svaki $x \in U$ skup U okolina te točke, onda je $x \in \text{int } U$, pa je $U \subseteq \text{int } U$, što zajedno sa $\text{int } U \subseteq U$ daje $\text{int } U = U$, a to znači, da je U otvoren. $\square$

Dualni pojam otvorenog skupa je pojam zatvorenog skupa.

2.3.8. Definicija. Kažemo, da je skup $F \subseteq X$ **zatvoren** u prostoru X , ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren u X .

Neka je sa $\mathcal{F}(X)$ označena familija svih zatvorenih skupova u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

2.3.9. Teorem. *Familija $\mathcal{F}(X)$ ima ova svojstva:*

- (1) *Prazan skup i cijeli prostor X su zatvoreni skupovi, $\emptyset, X \in \mathcal{F}(X)$.*

- (2) Presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup, tj. $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}(X), \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}(X)$.
- (3) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup, tj. $F_i \in \mathcal{F}(X), i = 1, \dots, k \Rightarrow F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{F}(X)$.

Dokaz: Sve tvrdnje slijede iz aksioma topološke strukture i de Morganovih formula. Vrijedi $\emptyset, X \in \mathcal{T} \Rightarrow X = X \setminus \emptyset, \emptyset = X \setminus X \in \mathcal{F}(X)$ pa imamo (1).

Neka su $\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T}$ i $F_\lambda = X \setminus U_\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Sada $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda =$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda) = X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{F}(X) \text{ povlači (2).}$$

Za dokaz tvrdnje (3) imamo $F_1 \cup \dots \cup F_k = (X \setminus U_1) \cup \dots \cup (X \setminus U_k) = X \setminus (U_1 \cap \dots \cap U_k)$, gdje su $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$. $\square$

2.3.10. Napomena. Alternativno, topologija se na skupu X može aksiomatski definirati tako da se odabere bilo koja familija $\mathcal{F}$ podskupova od X koja zadovoljava zahtjeve (1) – (3) iz teorema 2.3.9. Te skupove onda nazivamo zatvorenim, a njihove komplemente otvorenim skupovima u X . Tako zadani otvoreni skupovi čine topološku strukturu u smislu ranije definicije.

2.3.11. Napomena. Primijetimo, da podskup $A \subseteq X$ može biti istodobno i otvoren i zatvoren. Naprimjer, $\emptyset$ i X su takvi skupovi, a može biti i drugih. U drugu ruku često najviše ima skupova koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni.

2.3.12. Napomena. Presjek beskonačno mnogo otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup, a niti unija beskonačno mnogo zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup.

U topološkom prostoru $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom su $\forall x \in \mathbb{R}$ skupovi $\langle -\infty, x \rangle, \langle x, \infty \rangle$ očigledno otvoreni, pa je $\{x\}$ zatvoren skup. Vrijedi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \rangle = \{x\}$. Isto tako $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, je segment $[a, b] = \mathbb{R} \setminus (\langle -\infty, a \rangle \cup \langle b, \infty \rangle)$ zatvoren i vrijedi $[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \rangle$.

Analogno pojmu nutrina definira se pojam zatvorenja ili zatvarača skupa.

2.3.13. Definicija. Neka je $A \subseteq X$ podskup prostora X . **Zatvorenje** ili **zatvarač** $\mathcal{Cl} A$ skupa A je presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže skup A .

Kako je presjek zatvorenih skupova zatvoren skup, to iz svojstava presjeka slijedi da je $\mathcal{Cl} A$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A , tj. $\forall C \in \mathcal{F}(X), (A \subseteq C) \Rightarrow (\mathcal{Cl} A \subseteq C)$.

Za zatvorenje je još uobičajena oznaka $\overline{A}$. Iz teorema 2.3.1. odmah slijedi dualni teorem:

2.3.14. Teorem. *Zatvorenje podskupa iz prostora X ima ova svojstva:*

- (1) $A \subseteq \mathcal{Cl} A$,
- (2) $\mathcal{Cl}(\mathcal{Cl} A) = \mathcal{Cl} A$,
- (3) $\mathcal{Cl}(A \cup B) = \mathcal{Cl} A \cup \mathcal{Cl} B$
- (4) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{Cl} A \subseteq \mathcal{Cl} B$,
- (5) $\mathcal{Cl} \emptyset = \emptyset$,
- (6) $A \in \mathcal{F}(X) \Leftrightarrow \mathcal{Cl} A = A$.

Dokaz: Sve tvrdnje osim (3) slijede direktno iz definicije 2.3.13. Za dokaz jednakosti (3) primijenimo (4) pa dobijemo $(A \subseteq A \cup B) \Rightarrow (\mathcal{Cl} A \subseteq \mathcal{Cl}(A \cup B))$ i $(B \subseteq A \cup B) \Rightarrow (\mathcal{Cl} B \subseteq \mathcal{Cl}(A \cup B))$. Odatle imamo $\mathcal{Cl} A \cup \mathcal{Cl} B \subseteq \mathcal{Cl}(A \cup B)$.

Nadalje, zbog (1) je $A \cup B \subseteq \mathcal{Cl} A \cup \mathcal{Cl} B$, a $\mathcal{Cl} A \cup \mathcal{Cl} B$ je zatvoren skup koji sadrži $A \cup B$. Kako je $\mathcal{Cl}(A \cup B)$ najmanji takav skup vrijedi $\mathcal{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathcal{Cl} A \cup \mathcal{Cl} B$ i tvrdnja (3) je dokazana. $\square$

2.3.15. Napomena. Tvrdnje (1)–(5) iz teorema 2.3.14. nazivaju se aksiomi Kuratovskog. Njima je implicitno definirana operacija zatvaranja $A \mapsto \mathcal{Cl} A$. Radi se o preslikavanju $\mathcal{Cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ i njim je također definirana topološka struktura na X . Naime, skup je zatvoren ako i samo ako je $\mathcal{Cl} A = A$, i otvoren ako je komplement zatvorenog. Tako dolazimo do topološke strukture u smislu polazne definicije.

2.3.16. Propozicija. *Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup, a $F \subseteq X$ zatvoren. Onda je*

- (1) $U \setminus F$ otvoren skup,
- (2) $F \setminus U$ zatvoren skup.

Dokaz: Zbog jednakosti $U \setminus F = (X \setminus F) \cap U$ vrijedi (1), a zbog $F \setminus U = (X \setminus U) \cap F$ vrijedi (2). $\square$

2.3.17. Propozicija. *U metričkom prostoru je svaka točka zatvoren skup.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$ bilo koja točka metričkog prostora (X, d) . Neka je $U = X \setminus \{x_0\}$ i pokažimo da je U otvoren skup. Zaista, neka je $x \in U$ bilo koja točka. Onda je $x \neq x_0$, pa je $r = d(x, x_0) > 0$. Neka je $U_x = U(x, \frac{r}{2})$ i vrijedi $x_0 \notin U_x$, pa je $U_x \subseteq U$. Kako to vrijedi za svaki $x \in U$, to je U otvoren. $\square$

Općenito u bilo kojem topološkom prostoru točka ne mora biti zatvoren skup. Naprimjer, u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$, gdje je $X = \{a, b\}$ i $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, skupovi $\{a\}$ i $\{b\}$ nisu niti zatvoreni niti otvoreni.

2.3.18. Definicija. Prostori u kojima je svaka točka zatvoren skup zovu se T_1 -prostori.

2.3.19. Korolar. *Metrički prostori su T_1 -prostori.*

Obrat u korolaru 2.3.19. nije općenito točan. Dajemo kriterij da neka točka leži u zatvaraču danog skupa.

2.3.20. Teorem. *Neka je $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in \mathcal{C}l A$ ako i samo ako svaka okolina O od x_0 siječe A , tj. $\forall O \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow O \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in \mathcal{C}l A$ i O bilo koja okolina od x_0 . Neka je U otvorena okolina sadržana u O , $U \subset O$. Pokažimo da je $U \cap A \neq \emptyset$. Pretpostavimo, da je $U \cap A = \emptyset$. Onda je $A \subseteq X \setminus U$ i $X \setminus U$ je zatvoren skup. Zato je $\mathcal{C}l A \subseteq \mathcal{C}l (X \setminus U) = X \setminus U$, tj. $\mathcal{C}l A \cap U = \emptyset$ što je kontradikcija, jer smo uzeli $x_0 \in \mathcal{C}l A$, a vrijedi $x_0 \in U$, jer je U okolina od x_0 .

Obratno, neka vrijedi $\forall O \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow O \cap A \neq \emptyset$. Specijalno, prethodna implikacija vrijedi za svaku otvorenu okolinu od x_0 . Ako bi vrijedilo $x_0 \notin \mathcal{C}l A$ imali bi bilo $x_0 \in X \setminus \mathcal{C}l A$. No, $X \setminus \mathcal{C}l A$ je otvorena okolina od x_0 pa mora biti $X \setminus \mathcal{C}l A \cap A \neq \emptyset$. Tada $A \subseteq \mathcal{C}l A$ povlači $X \setminus \mathcal{C}l A \subseteq X \setminus A$ odakle slijedi $X \setminus A \cap A \neq \emptyset$, što je kontradikcija. $\square$

Na osnovi teorema 2.3.20. imamo ovu definiciju.

2.3.21. Definicija. Kažemo, da je $x_0 \in X$ točka gomilanja ili gomilište skupa $A \subseteq X$, ako svaka okolina od x_0 siječe $A \setminus \{x_0\}$. Naprotiv, $x_0 \in A$ je izolirana točka skupa A , ako nije točka gomilanja, tj. ako postoji okolina U od x_0 takva, da je $U \cap A = \{x_0\}$.

Skup svih gomilišta skupa A označavamo sa A' i zovemo derivat (ili derivacija) skupa A .

Iz prethodnog teorema odmah slijedi:

2.3.22. Korolar. *Za svaki $A \subseteq X$ je $\mathcal{C}l A = A \cup A'$.*

2.3.23. Teorem. *Neka je X prostor klase T_1 i neka je x_0 točka gomilanja skupa A . Svaka okolina O točke x_0 siječe A u beskonačno mnogo točaka.*

Dokaz: Pretpostavimo obratno, neka je U otvorena okolina od x_0 , tako da je $U \cap A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $x_i \neq x_0$. Kako je prostor X T_1 -prostor, to je konačan skup $\{x_1, \dots, x_k\}$ zatvoren, pa je prema propoziciji 2.3.16. $V = U \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ otvoren skup. Dakle, V je otvorena okolina od x_0 , koja ne siječe $A \setminus \{x_0\}$, suprotno pretpostavci da je x_0 točka gomilanja od A . $\square$

Specijalno, tvrdnja teorema 2.3.23. vrijedi za sve metričke prostore, jer su oni T_1 -prostori.

Konačno, za skup $A \subseteq X$ definiramo njegovu granicu $\text{Fr } A$ kao skup $\text{Fr } A = \mathcal{C}l A \cap \mathcal{C}l (X \setminus A)$.

2.3.24. Teorem. *Za granicu imamo*

- (1) $\mathcal{C}l A = A \cup \text{Fr } A$, za svaki $A \subseteq X$,
- (2) $\text{Fr } U = \mathcal{C}l U \setminus U$, za svaki otvoreni $U \subseteq X$,
- (3) $\text{Fr } F = F \setminus \text{int } F$, za svaki zatvoreni $F \subseteq X$.

Dokaz: Slijedi direktno iz definicije granice. $\square$

2.4 Separabilnost

2.4.1. Definicija. Neka je X topološki prostor i $D \subseteq X$. Kažemo da je D **gust** u X , ako je $\mathcal{C}l D = X$.

2.4.2. Propozicija. $D \subseteq X$ je **gust** u X ako i samo ako je $U \cap D \neq \emptyset$ za svaki neprazan otvoreni skup $U \subseteq X$.

Dokaz: To je neposredna posljedica teorema 2.3.20. $\square$

Naprimjer, skup $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ racionalnih brojeva je **gust** u $\mathbb{R}$, jer u svakom otvorenom intervalu ima racionalnih brojeva.

2.4.3. Definicija. Kažemo, da je prostor X **separabilan** ako sadrži prebrojiv **gust** podskup, tj. ako postoji $D \subseteq X$ takav, da je $\text{card } D \leq \aleph_0$ i $\mathcal{C}l D = X$.

Naprimjer $\mathbb{R}$ je separabilan jer je $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv i **gust** u $\mathbb{R}$, a također je i $\mathbb{R}^n$ separabilan.

2.4.4. Teorem. *Metrički prostor X je separabilan ako i samo ako ima prebrojivu bazu.*

Dokaz: Neka je X separabilan, a $D \subseteq X$ prebrojiv gust dio, $\mathcal{C}l D = X$. Promatrajmo familiju

$$\mathcal{B} = \{U(y, \frac{1}{n}); y \in D, n \in \mathbb{N}\}$$

kugala iz X . Očito je $\mathcal{B}$ prebrojiv, tj. $\text{card } \mathcal{B} = \aleph_0$. Tvrdimo, da je $\mathcal{B}$ baza za X .

Neka je $x \in X$ i U otvoren skup koji sadrži x . Treba vidjeti da postoji $V \in \mathcal{B}$, takav da je $x \in V \subseteq U$. Jer je U otvoren to postoji $r > 0$ takav da je $U(x, r) \subseteq U$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$, takav da je $nr > 2$. Kako je D gust u X , prema propoziciji 2.4.2. postoji točka $y \in D$, takva da je $y \in U(x, \frac{1}{n})$, tj. vrijedi $d(x, y) < \frac{1}{n}$. Kako je $\frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} < \frac{2}{n} - d(x, y) < r - d(x, y)$, to je $x \in U(y, \frac{1}{n}) \subset U(y, r - d(x, y))$. Nadalje, za $t \in U(y, r - d(x, y))$ je $d(t, y) < r - d(x, y)$ pa $d(t, x) < d(t, y) + d(y, x) < r$, što povlači $t \in U(x, r)$, tj. $U(y, r - d(x, y)) \subseteq U(x, r) \subseteq U$. Konačno, uzmemo li $V = U(y, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$, tvrdnja je dokazana.

Obratno, neka je $\mathcal{B} = \{U_i; i \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza za X . Za svaki $i \in \mathbb{N}$ izaberemo točku $x_i \in U_i$. Onda je $D = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq X$ prebrojiv skup koji je gust u X . Naime, za svaki otvoreni $U \subseteq X$ postoji neki U_i takav da je $x_i \in U_i \subseteq U$, dakle $U \cap D \neq \emptyset$, pa je D gust po propoziciji 2.4.2. $\square$

2.5 Produkt i kvocijent prostora

2.5.1. Definicija. Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori. **Direktni produkt** tih prostora je skup $X \times Y$ snabdjeven topologijom za koju je baza topologije $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U \times V; U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

Lako se provjeri, da je $\mathcal{B}$ baza topologije, tj. da je definicija dobra. Naime, $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = U \times V \in \mathcal{B}$, pa je $\mathcal{B}$ zaista baza.

Definicija se lako generalizira na konačno mnogo faktora $X_1 \times \dots \times X_k$.

Naprimjer, ako su X_1 i X_2 metrički prostori, onda je i $X_1 \times X_2$ metrički prostor. Ta metrika inducira topologiju koja je u skladu s našom općom definicijom.

2.5.2. Definicija. Neka je X topološki prostor, a R neka relacija ekvivalencije na X , te neka je X/R kvocijenti skup, tj. skup svih klasa ekvivalencije. Taj skup prirodno snabdijevamo topologijom na ovaj način:

Neka je $p : X \rightarrow X/R$ kvocijento preslikavanje, tj. $\forall x \in X$, $p(x)$ klasa ekvivalencije kojoj pripada x . Onda kažemo da je $V \subseteq X/R$ otvoren ako i samo ako je $p^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren u X .

Kvocijenti skup X/R snabdjeven tom topologijom, tzv. kvocijentnom topologijom, naziva se **kvocijentni prostor**.

Lako se provjeri da se radi o topologiji, jer vrijedi

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} V_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} p^{-1}(V_{\lambda}) \text{ i } p^{-1}\left(\bigcap_{\lambda} V_{\lambda}\right) = \bigcap_{\lambda} p^{-1}(V_{\lambda}).$$

2.6 Aksiomi separacije

U topološkim prostorima kvalitetnije topološke strukture ispunjavaju još neke dodatne uvjete, razne aksiome separacije.

Aksiom T_0 : Za svaki $x, y \in X$, $x \neq y$, bar jedna od tih točaka ima okolinu koja ne sadrži drugu točku.

Aksiom T_1 : Za svaki $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji okolina U_x od x , koja ne sadrži y i okolina U_y od y , koja ne sadrži x .

Aksiom T_2 : Za svaki $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje okoline U_x od x i U_y od y tako da je $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Aksiom T_3 : Za svaki $x \in X$ i svaki zatvoreni i neprazan $F \subset X$, $x \notin F$, postoje otvorene okoline U od x i V , $F \subset V$, takve da je $U \cap V = \emptyset$, tj. točke se mogu separirati od zatvorenih skupova disjunktним okolinama.

Aksiom T_4 : Za svaki $A, B \subset X$, A, B zatvoreni, neprazni i disjunktни podskupovi, postoje okoline U , $A \subset U$, i V , $B \subset V$, tako da je $U \cap V = \emptyset$, tj. zatvoreni skupovi se mogu separirati disjunktним okolinama.

Kažemo da je topološki prostor T_i -prostor i ako zadovoljava aksiom separacije T_i .

T_2 -prostor još nazivamo **Hausdorffov prostor**.

Regularni prostor je T_1 -prostor, koji ispunjava i T_3 .

Normalni prostor je T_1 -prostor, koji ispunjava i T_4 .

Neka je sa T_i označena klasa svih T_i -prostora, sa $\mathcal{H}$ klasa Hausdorffovih prostora, sa $\mathcal{R}$ regularnih, sa $\mathcal{N}$ normalnih, a sa $\mathcal{M}$ klasa svih metričkih prostora, onda vrijedi:

U točki 2.3 definirali smo T_1 -prostor, kao onaj, u kojem je svaka točka zatvoren skup. Pokažimo da je ta definicija ekvivalentna sa aksiomom T_1 .

2.6.1. Teorem. *Prostor X je T_1 -prostor ako i samo ako je svaka točka zatvoren skup.*

Dokaz: Neka je X T_1 prostor i $x \in X$ bilo koja točka. Za svaku točku $y \in X \setminus \{x\}$ postoji, po aksiomu T_1 otvorena okolina U_y od y , koja ne sadrži x . Kako je $y \in U_y \subset X \setminus \{x\}$, to je $X \setminus \{x\}$ otvoren u X , pa je $\{x\}$ zatvoren po definiciji.

Obratno, neka je $\{x\}$ zatvoren skup u X i $y \in X$, $y \neq x$. Tada je skup $X \setminus \{x\}$ otvoren i $y \in X \setminus \{x\}$, pa je to okolina od y koja ne sadrži x . $\square$

2.6.2. Teorem. *Svaki metrički prostor je normalan.*

Dokaz: Neka je X metrički prostor s metrikom d . Kako smo vidjeli u propoziciji 2.3.17., svaka točka je zatvoren skup, pa je to T_1 -prostor. Da bi dokazali tvrdnju dovoljno je još provjeriti aksiom T_4 .

Neka su $F_1, F_2 \subset X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Za svaku točku $x \in F_1$ definiramo broj $d_x = d(x, F_2)$. Tvrdimo da je $d_x > 0$. Kad bi bilo $d_x = d(x, F_2) = 0$, bilo bi $x \in \text{Cl } F_2 = F_2$, a zbog $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ to je protivno pretpostavci.

Slično, za svaku točku $y \in F_2$ definiramo $d_y = d(y, F_1) > 0$. Neka su $U_x = U(x, \frac{d_x}{2})$ i $U_y = U(y, \frac{d_y}{2})$, te $U_1 = \bigcup_{x \in F_1} U_x$ i $U_2 = \bigcup_{y \in F_2} U_y$. Onda su U_1 i U_2 otvoreni skupovi i $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$. Tvrdimo da je $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $z \in U_1 \cap U_2$. Kako je $z \in U_1$, to je $z \in U(x, \frac{d_x}{2})$ za neki $x \in F_1$, dakle $d(x, z) < \frac{d_x}{2}$. Analogno je $z \in U(y, \frac{d_y}{2})$ za neki $y \in F_2$ tako da je $d(y, z) < \frac{d_y}{2}$. Pretpostavimo da je $d_x \geq d_y$ pa imamo $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{d_x}{2} + \frac{d_y}{2} \leq d_x = d(x, F_2) = \inf\{d(x, y); y \in F_2\}$ što je kontradikcija. $\square$

2.6.3. Teorem. *Za navedene klase vrijede inkluzije*

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset T_1 \subset T_0 \subset T.$$

Dokaz: Inkluzija je očita, ali stroga inkluzija nije očigledna. $\square$

Poglavlje 3

KONVERGENCIJA

3.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je X topološki prostor. Niz u prostoru X je preslikavanje $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Obično označavamo $x(n) = x_n$ i niz pišemo $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tradicionalno ili kraće $(x_n; n \in \mathbb{N})$ ili $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1.1. Definicija. Kažemo da niz $(x_n)_n$ **konvergira** prema točki $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu O točke x_0 postoji takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da je $x_n \in O$ za svaki indeks $n \geq n_0$. Simbolički to pišemo kao $x_n \rightarrow x_0$ ili $\lim_n x_n = x_0$ i kažemo da je x_0 limes ili granična vrijednost niza $(x_n)_n$.

Kako svaka okolina O od x_0 sadrži neki element iz baze okolina $\beta(x_0)$, očito je dovoljno uvjet iz definicije provjeriti samo za elemente baze.

U metričkom prostoru bazu okolina čine kugle sa središtem u x_0 . Zato vrijedi:

3.1.2. Teorem. *Niz u metričkom prostoru (X, d) konvergira k točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, čim je $n \geq n_\varepsilon$ slijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, tj. $\lim_n d(x_n, x_0) = 0$.*

Posebno u slučaju $X = \mathbb{R}$ niz realnih brojeva $(x_n)_n$ konvergira k x_0 ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Primijetimo, da je u metričkom prostoru svaki konvergentan niz omeđen, kao konačna unije omeđenih skupova. Naime, za $\varepsilon = 1$ imamo $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_0, x_n) < 1$, $\forall n \geq n_1$. Tada, $\forall n \geq \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_n, x_0) \leq M = \max\{d(x_1, x_0), \dots, d(x_{n_1-1}, x_0), 1\}$.

3.1.3. Napomena. Ako je $(x_n)_n$ niz realnih brojeva i ako svaki $E > 0$ postoji $n_E \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_E$ vrijedi $x_n > E$, onda kažemo da

taj niz konvergira prema beskonačnom i pišemo $\lim_n x_n = \infty$. Analogno se definira $\lim_n x_n = -\infty$. Taj pojam se može uklopiti u opću definiciju konvergencije ako proširimo prostor realnih brojeva, tj. promatramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Tada je $\beta(\infty) = \{\langle a, \infty \rangle; a \in \mathbb{R}\}$ baza okolina od ∞ i $\beta(-\infty) = \{\langle \infty, a \rangle; a \in \mathbb{R}\}$ baza okolina od $-\infty$.

Na primjer, za svaki $k \in \mathbb{N}$, nizovi $(n^k)_n$ konvergiraju u $\overline{\mathbb{R}}$ k ∞ .

3.1.4. Teorem. *Neka je X Hausdorffov prostor, a $(x_n)_n$ niz u tom prostoru. Ako je $x_n \rightarrow x_0$ i $x_n \rightarrow x'_0$ onda je nužno $x_0 = x'_0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $x_0 \neq x'_0$. Kako je prostor Hausdorffov, postoje okoline U oko x_0 i V oko x'_0 takve da je $U \cap V = \emptyset$. Iz pretpostavke da $x_n \rightarrow x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$, a zbog $x_n \rightarrow x'_0$ postoji $n'_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n'_0$ vrijedi $x_n \in V$. Sada za $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ imamo $x_n \in U \cap V$, što je kontradikcija. $\square$

Teorem vrijedi za sve metričke prostore, jer su oni Hausdorffovi prostori.

3.2 Zatvorenje i konvergencija

U metričkom prostoru se zatvoren skup može karakterizirati pomoću konvergencije nizova.

3.2.1. Teorem. *Neka je X topološki prostor i $A \subset X$ njegov podskup. Neka je $(x_n)_n$ niz iz A koji konvergira prema točki $x_0 \in X$. Onda je $x_0 \in \mathcal{Cl} A$.*

Dokaz: Neka je O bilo koja okolina od x_0 . Onda ta okolina sadrži gotovo sve članove niza $(x_n)_n$, tj. $O \cap A \neq \emptyset$, pa je prema teoremu 2.3.20. $x_0 \in \mathcal{Cl} A$. $\square$

Obrat teorema 3.2.1. ne vrijedi općenito, ali vrijedi u slučaju metričkog prostora.

3.2.2. Teorem. *Neka je X metrički prostor i $A \subset X$. Ako je $x_0 \in \mathcal{Cl} A$ onda postoji niz $(x_n)_n$ u A takav da je $\lim_n x_n = x_0$.*

Dokaz: Nije teško pokazati da je $x_0 \in \mathcal{Cl} A$ ako i samo ako je $d(x_0, A) = 0$. Odatle slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A$ takav da je $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$. Vrijedi $\lim_n d(x_n, x_0) = 0$, a to znači da je $\lim_n x_n = x_0$. $\square$

3.2.3. Korolar. *Podskup $A \subset X$ metričkog prostora je zatvoren ako i samo ako je za svaki niz $(x_n)_n$ iz A i njegov limes sadržan u A , tj. ako iz $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$, i $\lim_n x_n = x_0$ slijedi $x_0 \in A$.*

3.2.4. Korolar. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka su $A, B \subset X$ omeđeni i zatvoreni neprazni podskupovi. Tada za Hausdorffovu metriku d_H definiranu s (1.9) vrijedi aksiom strogosti 2), tj. skup svih nepraznih omeđenih i zatvorenih podskupova od X je metrički prostor s metrikom d_H .*

Dokaz: Za $x \in X$, $A \subset X$ i funkciju $d(x, A)$ definiranu s (1.6) vrijedi $d(x, A) = 0$ ako i samo ako je $x \in \mathcal{Cl} A$. Naime, ako je $0 = d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$, onda postoji niz $(a_n)_n$ u A takav da je $x = \lim_n a_n$. Tada je po teoremu 3.2.1. $x \in \mathcal{Cl} A$. Obratno, ako je $x \in \mathcal{Cl} A$, onda po teoremu 3.2.2. postoji niz $(a_n)_n$ u A takav da je $\lim_n d(x, a_n) = 0$, a tada je $d(x, A) = 0$. Sada je jasno da za funkciju $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B); a \in A\}$ vrijedi $\rho(A, B) = 0$ ako i samo ako je $A \subseteq \mathcal{Cl} B$. Tada je $d_H(A, B) = 0$ ako i samo ako je $A \subseteq \mathcal{Cl} B$ i $B \subseteq \mathcal{Cl} A$. Zbog $A = \mathcal{Cl} A$ i $B = \mathcal{Cl} B$ imamo $A = B$. $\square$

3.3 Podnizovi i konvergencija

Neka je $(x_n)_n$ niz u prostoru X , a $(p_n)_n$ **strogo** rastući niz prirodnih brojeva. Onda kažemo da je $(x_{p_n})_n$ podniz niza $(x_n)_n$.

3.3.1. Propozicija. *Ako niz $(x_n)_n$ konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i svaki njegov podniz konvergira prema x_0 .*

Dokaz: Neka je U bilo koja okolina od x_0 . Onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da su za $n \geq n_0$ svi $x_n \in U$. No, za svaki $n \geq n_0$ je $p_n \geq n \geq n_0$, pa je $x_{p_n} \in U$, dakle $\lim_n x_{p_n} = x_0$. $\square$

3.3.2. Definicija. Neka je $(x_n)_n$ niz u prostoru X i $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 točka **gomilanja** ili **gomilište** niza $(x_n)_n$ ako za svaku okolinu U od x_0 i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $n' \in \mathbb{N}$, $n' > n$, takav da je $x_{n'} \in U$.

Naprimjer, niz $((-1)^n)_n$ ima dvije točke gomilanja, 1 i -1 . Ako je u Hausdorffovom prostoru x_0 granična točka niza $(x_n)_n$, onda je to i jedina točka gomilanja tog niza.

Očito, točka gomilanja podniza nekog niza je i točka gomilanja toga niza.

U metričkim prostorima imamo ovu karakterizaciju:

3.3.3. Teorem. *Točka $x_0 \in X$ metričkog prostora je točka gomilanja niza $(x_n)_n$ iz X ako i samo ako postoji podniz $(x_{p_n})_n$ tog niza koji konvergira prema x_0 .*

Dokaz: Neka je x_0 točka gomilanja za niz $(x_n)_n$. Induktivno ćemo konstruirati podniz $(x_{p_n})_n$ od $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0 . Točnije, konstruirati ćemo niz $(p_n)_n$ prirodnih brojeva takav da je $x_{p_n} \in U(x_0, \frac{1}{n})$. Za p_1 uzmemo bilo koji broj takav da je $x_{p_1} \in U(x_0, 1)$. Pretpostavimo da smo našli $p_1 < \dots < p_n$ takve da je $x_{p_k} \in U(x_0, \frac{1}{k})$ za $k = 1, \dots, n$. Kako je x_0 točka gomilanja za okolinu $U = U(x_0, \frac{1}{n+1})$, postoji $n' = p_{n+1} > p_n$ takav da je $x_{p_{n+1}} \in U(x_0, \frac{1}{n+1})$. Tako induktivno dolazimo do podniza $(x_{p_n})_n$ sa svojstvom $d(x_{p_{n+1}}, x_0) < \frac{1}{n+1}$, što povlači da je $\lim_n x_{p_n} = x_0$.

Dokaz obrat slijedi direktno iz definicije konvergenције podniza $(x_{p_n})_n$ k x_0 . □

3.3.4. Teorem. *Neka je $(x_n)_n$ niz u prostoru X i neka je A skup svih točaka gomilanja toga niza. Onda je A zatvoren u X .*

Dokaz: Treba vidjeti da je $\mathcal{Cl} A = A$, tj. da iz $y_0 \in \mathcal{Cl} A$ slijedi $y_0 \in A$. Neka je U bilo koja otvorena okolina od $y_0 \in \mathcal{Cl} A$ i $n \in \mathbb{N}$. To znači da je $U \cap A \neq \emptyset$. Neka je $x_0 \in U \cap A \subset A$, tj. x_0 je točka gomilanja niza $(x_n)_n$. Nadalje, $x_0 \in U$ i U otvoren povlači da je to okolina i od x_0 . Zato po definiciji postoji takav $n' > n$ da je $x_{n'} \in U$. To upravo znači da je y_0 (za koju je U također okolina) točka gomilanja za niz $(x_n)_n$ pa je $y_0 \in A$ i tvrdnja je dokazana. □

Navedimo na kraju ove točke poznati teorem iz analize.

3.3.5. Teorem. *Neka je $(x_n)_n$ omeđeni niz iz $\mathbb{R}^n$. Onda $(x_n)_x$ ima bar jednu točku gomilanja, dakle i konvergentan podniz.*

Za dokaz vidjeti S. Mardešić, teorem 9, str. 115.

3.4 Nizovi funkcija

3.4.1. Definicija. Neka je T bilo koji skup, i $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$, realne funkcije definirane na T i neka je $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ dana funkcija.

Kažemo, da niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira k funkciji f u točki $t \in T$ ako vrijedi $\lim_n f_n(t) = f(t)$, tj. ako niz $(f_n(t))_n$ realnih brojeva konvergira prema broju $f(t)$.

Kažemo, da niz funkcija $(f_n)_n$ **konvergira po točkama** ili **obično** prema funkciji f i pišemo $\lim_n f_n = f$ ako $(f_n)_n$ konvergira prema f u svakoj točki $t \in T$.

3.4.2. Napomena. Neka je $\mathbb{R}^T = \{f; f: T \rightarrow \mathbb{R}\}$ skup svih realnih funkcija na T . Taj se skup prirodno topologizira: za $t \in T$ i $V \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup definiramo $U(t, V) = \{f \in \mathbb{R}^T; f(t) \in V\}$ i onda za $t_k \in T$ i otvorene skupove $V_k \subseteq \mathbb{R}$ ($k = 1 \dots, n$) stavimo $U(t_1, \dots, t_n; V_1, \dots, V_n) = U(t_1, V_1) \cap \dots \cap U(t_n, V_n) = \{f \in \mathbb{R}^T; f(t_k) \in V_k (k = 1 \dots, n)\}$.

Lako se vidi da ti skupovi čine bazu jedinstvene topologije $\mathcal{T}$ na $\mathbb{R}^T$ s kojom je $\mathbb{R}^T$ Hausdorffov prostor.

3.4.3. Teorem. Niz funkcija $(f_n)_n$ u $\mathbb{R}^T$ konvergira obično prema funkciji $f \in \mathbb{R}^T$ ako i samo ako niz $(f_n)_n$ iz topološkog prostora $(\mathbb{R}^T, \mathcal{T})$ konvergira prema f .

Teorem pokazuje da je obična konvergencija nizova funkcija specijalan slučaj pojma konvergencije u topološkom prostoru.

Međutim, ako je T neprebrojiv, ne može se naći metrika na $\mathbb{R}^T$ takva da bi se konvergencija u toj matrici podudarala sa običnom konvergencijom nizova funkcija, tj. topološki prostor $(\mathbb{R}^T, \mathcal{T})$ tada nije metrizabilan.

3.4.4. Definicija. Neka je $(f_n)_n$ niz u $\mathbb{R}^T$ i $f \in \mathbb{R}^T$. Kažemo, da niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira **uniformno** ili **jednoliko** prema funkciji f , ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall t \in T)(\forall n \in \mathbb{N}) ((n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon)). \quad (3.1)$$

Kod obične konvergencije broj n_ε ovisi o t i o ε , a kod uniformne samo o ε .

Uniformna konvergencija povlači običnu, dok obrat općenito ne vrijedi. Naprimjer, promatrajmo niz funkcija $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dan sa $f_n(t) = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Taj niz konvergira prema funkciji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \neq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$

Međutim, ta konvergencija nije uniformna. Naime, za bilo koji $0 < \varepsilon < 1$ moramo uzeti $n_\varepsilon \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(t)}$ i vrijedi $\lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(t)} = \infty$.

Neka je $\mathbf{B}(T) \subset \mathbb{R}^T$ skup svih **omeđenih** funkcija na skupu T . Na $\mathbf{B}(T)$ se uvodi metrika $d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)|; t \in T\}$.

3.4.5. Teorem. Niz funkcija $(f_n)_n$ iz $\mathbf{B}(T)$ konvergira uniformno prema funkciji f ako i samo ako niz $(f_n)_n$ konvergira k f u metričkom prostoru $(\mathbf{B}(T), d)$.

Dokaz: Neka $(f_n)_n$ konvergira uniformno prema f na skupu T . To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ i za svaki $t \in T$ vrijedi $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. Dakle, za $n \geq n_\varepsilon$ je $d(f_n, f) = \sup\{|f_n(t) - f(t)|; t \in T\} \leq \varepsilon$, što znači da $(f_n)_n$ konvergira prema f u smislu metrike d .

Obratno, neka $(f_n)_n$ konvergira prema f u smislu metrike d . To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $d(f_n, f) = \sup\{|f_n(t) - f(t)|; t \in T\} < \varepsilon$, tj. $\forall t \in T, |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, što znači da niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno prema f . $\square$

Kažemo da je metrika d na $\mathbf{B}(T)$ **metrika uniformne konvergenције**.

3.5 Cauchyjev niz

3.5.1. Definicija. Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru (X, d) . Kažemo da je taj niz **Cauchyjev** ili **fundamentaln**, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ i za svaki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$. Koristi se i slijedeća varijanta

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) ((m, n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (d(x_m, x_n) < \varepsilon)).$$

3.5.2. Teorem. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je Cauchyjev.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ konvergentan niz i $\lim_n x_n = x_0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. No za svaki $p \in \mathbb{N}$ je tada i $n + p \geq n_\varepsilon$ pa je i $d(x_{n+p}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Odatle dobijemo $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_0) + d(x_n, x_0) < \varepsilon$, tj. $(x_n)_n$ je Cauchyjev po definiciji. $\square$

Obrat ne vrijedi općenito, tj. Svaki Cauchyjev niz u svakom metričkom prostoru ne mora biti konvergentan.

Kod Cauchyjevog niza nema gomilišta koja nisu granične točke.

3.5.3. Teorem. *Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz iz X . Ako neki podniz $(x_{p_n})_n$ konvergira prema $x_0 \in X$, onda i $(x_n)_n$ konvergira prema x_0 .*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ odabran po volji. Po pretpostavci postoji $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $m, n \geq n'_\varepsilon$ povlači $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $\lim_n x_{p_n} = x_0$ to postoji $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n''_\varepsilon$ vrijedi $d(x_{p_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Odatle, za $n \geq n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, zbog $p_n \geq n$, imamo $d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{p_n}) + d(x_{p_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tj. $\lim_n x_n = x_0$ i tvrdnja je dokazana. $\square$

3.5.4. Teorem. *Svaki Cauchyjev niz je omeđen.*

Dokaz: Promatrajmo niz $(x_n)_n$ iz X . Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_1$ vrijedi $d(x_n, x_{n_1}) < 1$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$d(x_n, x_{n_1}) \leq M = \max\{d(x_1, x_{n_1}), \dots, d(x_{n_1-1}, x_{n_1}), 1\}$, tj. niz je sadržan u kugli $U(x_{n_1}, M)$ pa je omeđen. $\square$

Sada možemo dokazati osnovno svojstvo prostora $\mathbb{R}^n$.

3.5.5. Teorem. *U prostoru $\mathbb{R}^n$ svaki Cauchyjev niz konvergira.*

Dokaz: Za $\mathbb{R}^n$ pretpostavljamo metričku strukturu, i to bilo koju od metrika d_1 , d_2 ili d_∞ . Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 3.5.4. taj je niz omeđen, pa prema Bolzano – Weierstrasseovom teoremu 3.3.5. sadrži podniz koji konvergira prema točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sada, prema teoremu 3.5.3. i $(x_n)_n$ konvergira prema x_0 i tvrdnja je dokazana. $\square$

3.6 Potpuni prostor

3.6.1. Definicija. Kažemo, da je metrički prostor **potpun**, ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira.

Hilbertov prostor je potpun unitaran prostor.

Banachov prostor je potpun normirani prostor.

3.6.2. Teorem. *Prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ je Hilbertov prostor. Prostori $(\mathbb{R}^n, d_1)$ i $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ su Banachovi prostori.*

3.6.3. Teorem. *Neka je X potpun metrički prostor, a $Y \subset X$ njegov zatvoreni podskup. Onda je i Y potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y . Tada je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz i u X , pa zbog potpunosti postoji točka $x_0 \in X$ takva da je $x_0 = \lim_n x_n$. Kako je Y zatvoren, to je prema teoremu 3.2.1. slijedi da je $x_0 \in Y$, što pokazuje da je Y potpun. $\square$

Naprimjer, svaki zatvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$ je potpun metrički prostor.

Neka vrsta obrata prethodnog teorema dana je ovim teoremom.

3.6.4. Teorem. *Neka je $Y \subseteq X$ potprostor metričkog prostora X . Ako je Y potpun metrički prostor, onda je Y zatvoren u X .*

Dokaz: Neka je $y_0 \in \mathcal{C}Y$. Tada prema teoremu 3.2.2. postoji niz $(y_n)_n$ u Y takav da je $y_0 = \lim_n y_n$. No svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je Cauchyjev, tj. $(y_n)_n$ je Cauchyjev niz u Z . Zbog potpunosti je onda $y_0 \in Y$. Dakle, $\mathcal{C}Y \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren u X . $\square$

Naprimjer, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nije potpun.

3.6.5. Definicija. Neka je (X, d) metrički prostor. **Upotpunjenje** tog prostora je par koji se sastoji iz metričkog prostora (Y, δ) i preslikavanja $\varphi : X \rightarrow Y$, takav da su ispunjeni uvjeti:

- (1) φ je injekcija koja čuva udaljenost, tj.

$$\forall x, y \in X, \delta(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y).$$

- (2) Skup $\varphi(X) \subseteq Y$ je gust u Y .

- (3) Prostor (Y, δ) je potpun.

Naprimjer, upotpunjenje prostora $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{R}$.

Svaki metrički prostor je izometričan potprostoru nekog potpunog metričkog prostora. Pritom se može postići da je gust na tom prostoru.

3.6.6. Teorem. Za svaki metrički prostor (X, d) vrijedi:

- (1) Postoji njegovo upotpunjenje (Y, δ) .
- (2) Svaka dva upotpunjenja (Y, δ) i (Y', δ') su izomorfna, tj. postoji izometrija $\psi : Y \rightarrow Y'$ takva da dijagram komutira, $\psi \circ \varphi = \varphi'$.

Dokaz: (1) Neka je Z skup svih Cauchyjevih nizova u X . Definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ na Z :

Nizovi $x = (x_n)_n$ i $y = (y_n)_n$ u Z su ekvivalentni i pišemo $x \sim y$ ako je $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Na kvocijentu skupu $Y = Z/\sim$ definiramo funkciju $\delta : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ sa $\delta([x], [y]) = \lim_n d(x_n, y_n)$, gdje su $[x], [y] \in Y$ klase čiji reprezentanti su $x, y \in Z$.

Pokažimo da je funkcija δ dobro definirana na $Y \times Y$. Prvo provjeravamo da je niz $(d(x_n, y_n))_n$ konvergentan u $\mathbb{R}$. Iz propozicije 1.1.5. vrijedi $|d(x_{n+k}, y_{n+k}) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_{n+k}, x_n) + d(y_n, y_{n+k})$, pa zbog toga što su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X i niz $(d(x_n, y_n))_n$ je Cauchyjev u $\mathbb{R}$, dakle i konvergentan.

Još moramo provjeriti da njena vrijednost ne ovisi o izboru reprezentanata klase. Neka su $x' = (x'_n)_n \in [x]$ i $y' = (y'_n)_n \in [y]$ drugi reprezentanti klase $[x]$ i $[y]$. Vrijedi $d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$, a odatle imamo $\lim_n d(x'_n, y'_n) \leq \lim_n d(x_n, y_n)$. Analogno dobijemo $\lim_n d(x_n, y_n) \leq \lim_n d(x'_n, y'_n)$, pa vrijedi $\lim_n d(x'_n, y'_n) = \lim_n d(x_n, y_n)$.

Preslikavanje δ je metrika na Y . Svojstva 1) i 3) iz definicije 1.1.1. su očita. Za provjeru strogosti neka su $[x], [y] \in Y$, $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$, takve klase za koje je $\delta([x], [y]) = 0$, tj. $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Tada je $x \sim y$, odnosno $[x] = [y]$. Obrat je trivijalan, pa vrijedi 3). Za dokaz 4) uzmimo

$x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ i $z = (z_n)_n$ iz Z i imamo $\delta([x], [y]) = \lim_n d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n) = \delta([x], [z]) + \delta([z], [y])$. Dakle, (Y, δ) je metrički prostor.

Neka je $\varphi : X \rightarrow Y$ definirana sa $\varphi(x) = [(x_n)_n]$, $\forall x \in X$, gdje je $(x_n)_n$ stacionarni niz u Z , $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\varphi : X \rightarrow Y$ je izometrija. Doista, za $x, y \in X$ je $\delta(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta([(x_n)_n], [(y_n)_n]) = \lim_n d(x_n, y_n) = d(x, y)$. Također je slika $\varphi(X)$ gusta u Y . Neka je $\xi = [(x_n)_n] \in Y$ po volji i $\varepsilon > 0$. $(x_n)_n$ je Cauchyjev niz u X pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi: $(p, q \geq m) \Rightarrow (d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2})$. Sada je $\delta(\varphi(x_m), \xi) = \lim_n d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dakle, $\varphi(x_m) \in U(\xi, \varepsilon) \cap \varphi(X)$, tj. $U(\xi, \varepsilon) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$.

Pokažimo da je (Y, δ) potpun metrički prostor. U tu svrhu uzmimo Cauchyjev niz $(\xi^{(n)})_n$ u Y . Zbog gustoće $\varphi(X)$ u Y , $\forall n \in \mathbb{N}$ je $U(\xi^{(n)}, \frac{1}{n}) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$, tj. postoji $x_n \in X$ takav da je $\varphi(x_n) \in U(\xi^{(n)}, \frac{1}{n})$. Sada je $d(x_p, x_q) = \delta(\varphi(x_p), \varphi(x_q)) \leq \delta(\varphi(x_p), \xi^{(p)}) + \delta(\xi^{(p)}, \xi^{(q)}) + \delta(\xi^{(q)}, \varphi(x_q)) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \delta(\xi^{(p)}, \xi^{(q)})$, što kazuje da je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz, tj. $(x_n)_n \in Z$. Označimo sa $\xi = [(x_n)_n] \in Y$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Neka je $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $n_\varepsilon \varepsilon > 2$ i da vrijedi $(p, q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2})$. Za $p \geq n_\varepsilon$ imamo $\delta(\xi^{(p)}, \xi) \leq \delta(\xi^{(p)}, \varphi(x_p)) + \delta(\varphi(x_p), \xi) < \frac{1}{p} + \lim_n d(x_p, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tj. $\xi = \lim_n \xi^{(n)}$.

(2) Neka je $\psi : \varphi(X) \rightarrow Y'$ definirana sa $\psi(\varphi(x)) = \varphi'(x)$, $\forall x \in X$. ψ je dobro definirana izometrija, tj. $\delta'(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) = \delta'(\varphi'(x), \varphi'(y)) = d(x, y) = \delta(\varphi(x), \varphi(y))$.

ψ proširimo (ali ostavljamo istu oznaku) do izometrije $\psi : Y \rightarrow Y'$ na ovaj način:

Za $\xi \in Y$ postoji niz $(x_n)_n$ u X takav da je $\xi = \lim_n \varphi(x_n)$. Tada je $(\psi(\varphi(x_n)))_n$ Cauchyjev niz u Y' , jer su φ i ψ izometrije. Zbog potpunosti od Y' , taj niz je konvergentan, pa postoji $\psi(\xi) = \lim_n \psi(\varphi(x_n))$. Definicija $\psi(\xi)$ je dobra jer ne ovisi o izboru niza, tj. ako je $(y_n)_n$ niz u X tako da je $\xi = \lim_n \varphi(y_n)$, onda je $0 = \lim_n \delta(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n \delta(\varphi'(x_n), \varphi'(y_n)) = \lim_n \delta'(\psi(\varphi(x_n)), \psi(\varphi(y_n)))$. Tada je

$$0 \leq \delta'(\psi(\varphi(y_n)), \psi(\xi)) \leq \delta'(\psi(\varphi(x_n)), \psi(\varphi(y_n))) + \delta'(\psi(\varphi(x_n)), \psi(\xi)),$$

što povlači $\psi(\xi) = \lim_n \psi(\varphi(y_n))$.

ψ je izometrija, jer za $\xi = \lim_n \varphi(x_n)$, $\xi' = \lim_n \varphi(x'_n)$ iz Y , pomoću propozicije 1.1.5. dobijemo $\delta'(\psi(\xi), \psi(\xi')) = \lim_n \delta'(\psi(\varphi(x_n)), \psi(\varphi(x'_n))) = \lim_n \delta(\varphi(x_n), \varphi(x'_n)) = \delta(\xi, \xi')$.

Analogno, postoji izometrija $\psi' : Y' \rightarrow Y$ takva da vrijedi $\psi' \circ \varphi' = \varphi$. Sada imamo $\psi \circ \psi' \circ \varphi' = \psi \circ \varphi = \varphi'$, tj. $\psi \circ \psi'|_{\varphi'(X)} = 1_{\varphi'(X)}$. Zbog gustoće od $\varphi'(X)$ u Y' je $\psi \circ \psi' = 1_{Y'}$. Isto tako se dobije da je $\psi' \circ \psi = 1_Y$, pa je ψ bijekcija. $\square$

3.7 Banachov teorem o fiksnoj točki

Neka je X bilo koji skup, a $f : X \rightarrow X$ preslikavanje. Kažemo da je $x^* \in X$ **fiksna točka** za f ako vrijedi $f(x^*) = x^*$.

Neka je (X, d) metrički prostor. Za preslikavanje $f : X \rightarrow X$ kažemo da je **kontrakcija** s koeficijentom $\alpha \in [0, 1)$, ako

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

3.7.1. Teorem (Banach). *Neka je (X, d) potpun metrički prostor, a $f : X \rightarrow X$ kontrakcija. Onda za f postoji jedna i samo jedna fiksna točka x^* u X . Štoviše, za bilo koju točku $x_1 \in X$, niz $(x_n)_n$ definiran rekurzijom $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergira k x^* i $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1). \quad (3.2)$$

Dokaz: Neka je $x_1 \in X$ bilo koja točka. Definiramo $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Tako dolazimo do niza $(x_n)_n$ u prostoru X , za koji tvrdimo da je Cauchyjev.

Pokažimo najprije da vrijedi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1). \quad (3.3)$$

Dokaz ide indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja je očigledna. Pretpostavimo da je nejednakost u (3.3) ispunjena za $n \in \mathbb{N}$ i računamo za $n+1$:

$$d(x_{n+3}, x_{n+2}) \leq \alpha d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1).$$

Nadalje, za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, x_{n+k-i-1}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i-2} d(x_2, x_1) = \\ &= \alpha^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-i-1} \right) d(x_2, x_1) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Primijetimo da zbog $0 \leq \alpha < 1$ imamo $\lim_n \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) = 0$, pa za lijevu stranu nejednakosti vrijedi $\lim_n d(x_{n+k}, x_n) = 0$ uniformno po $k \in \mathbb{N}$, što govori da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Zbog potpunosti prostora X , taj niz konvergira k nekoj točki $x^* \in X$. Tvrđimo da je x^* fiksna točka za f . Zaista, za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &\leq d(f(x^*), x_n) + d(x_n, x^*) = d(f(x^*), f(x_{n-1})) + d(x_n, x^*) \leq \\ &\leq \alpha d(x^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

Sada, za $n \rightarrow \infty$ dobijemo $d(f(x^*), x^*) \leq 0$, što povlači $d(f(x^*), x^*) = 0$, odnosno $f(x^*) = x^*$. Dakle x^* je fiksna točka preslikavanja f .

Pokažimo jedinstvenost fiksne točke. Neka je y^* druga fiksna točka za f , tj. $f(y^*) = y^*$. Onda imamo $d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha d(x^*, y^*)$, tj. $(1 - \alpha)d(x^*, y^*) \leq 0$. Kako je $1 - \alpha > 0$ mora biti $d(x^*, y^*) \leq 0$, što daje $d(x^*, y^*) = 0$, odnosno $x^* = y^*$.

Ocjena (3.2) za udaljenost fiksne točke x^* od x_n slijedi iz (3.4) za $k \rightarrow \infty$. $\square$

Neka je $f : X \rightarrow X$ kontrakcija na potpunom metričkom prostoru X , i x^* njena fiksna točka. Niz iz X definiran sa $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, za bilo koju polaznu točku x_1 , zovemo **iterativni niz**, a način aproksimativnog računanja fiksne točke pomoću tog niza **metoda iteracija**.

Poglavlje 4

NEPREKIDNA PRESLIKAVANJA

4.1 Definicija neprekidnosti

Slikovito govoreći, preslikavanje je neprekidno, ako bliske točke preslikava u bliske. Ta bliskost se u metričkim prostorima mjeri pomoću metrike, a u općim topološkim prostorima, gdje nema metrike, (po volji malim) otvorenim skupovima. Imamo ovu definiciju:

4.1.1. Definicija. Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \rightarrow Y$ preslikavanje. Kažemo, da je preslikavanje f **neprekidno** ili **kontinuirano** u točki $x_0 \in X$, ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 tako da je $f(U) \subseteq V$.

U suprotnom kažemo da je f **prekidno** ili **diskontinuirano** u x_0 .

Kažemo da je preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ neprekidno, ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Odmah se vidi da je uvjet iz definicije moguće zamijeniti sa bilo kojim od sljedeća dva uvjeta:

- (1) f je neprekidno u $x_0 \in X$, ako i samo ako za svaku okolinu V od $f(x_0)$ je $f^{-1}(V) \subseteq X$ okolina od x_0 .
- (2) f je neprekidno u $x_0 \in X$, ako i samo ako za svaki element $V \in \beta(f(x_0))$, baze okolina u točki $f(x_0)$, postoji $U(x_0) \in \beta(x_0)$ takav da je $f(U) \subseteq V$.

U slučaju kada su X i Y metrički prostori, za bazu okolina možemo uzeti skup svih kugala sa središtem u toj točki: $\beta(x_0) = \{U(x_0, \delta); \delta > 0\}$,

$\beta(f(x_0)) = \{U(f(x_0), \varepsilon); \varepsilon > 0\}$, pa definicija neprekidnosti glasi:

$$\forall U(f(x_0), \varepsilon) \in \beta(f(x_0)) \exists U(x_0, \delta) \in \beta(x_0), f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0), \varepsilon).$$

Standardni uvjet neprekidnosti funkcije u točki za metričke prostore glasi:

4.1.2. Teorem. *Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ između metričkih prostora je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)((d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)).$$

Posebno, ako su $X = Y = \mathbb{R}$ imamo iz analize na 1. godini dobro poznatu Cauchyjevu definiciju neprekidnosti.

4.1.3. Korolar. *Realna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $t_0 \in \mathbb{R}$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathbb{R})(|t - t_0| < \delta \Rightarrow (|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon)).$$

U vezi produktne topologije imamo slijedeći rezultat.

4.1.4. Propozicija. *Neka je $X \times Y$ direktni produkt prostora X i Y , a $p : X \times Y \rightarrow X$, $p(x, y) = x$, i $q : X \times Y \rightarrow Y$, $q(x, y) = y$ projekcije na faktore. Projekcije p i q su neprekidna preslikavanja.*

Dokaz: Neka je $(x, y) \in X \times Y$ bilo koja točka, a U element baze u X koji sadrži $p(x, y) = x \in X$. Onda je očito da je $U \times Y \subseteq X \times Y$ upravo okolina točke (x, y) za koju vrijedi $p(U \times Y) = U$, pa je p neprekidna funkcija. Dokaz za q je analogan. $\square$

4.1.5. Propozicija. *Neka je X normirani prostor nad poljem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

(a) *Zbrajanje vektora $s : X \times X \rightarrow X$, $s(x, y) = x + y$, je neprekidno na $X \times X$.*

(b) *Množenje vektora skalarom $m : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, $m(\lambda, x) = \lambda x$, je neprekidno na $\mathbb{K} \times X$.*

Dokaz: Na $X \times X$ uzmimo normu $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, a na $\mathbb{K} \times X$ uzmimo normu $\|(\lambda, x)\|_\infty = \max\{|\lambda|, \|x\|\}$ (sve tri su ekvivalentne).

(a) Uzmimo bilo koji par $(x_0, y_0) \in X \times X$ i bilo koji $\varepsilon > 0$. Za $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ imamo

$$(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty < \delta) \Rightarrow (\|x - x_0\| < \delta \wedge \|y - y_0\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\|s(x, y) - s(x_0, y_0)\| = \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < 2\delta = \varepsilon,$$

tj. zbrajanje je neprekidno.

(b)Uzmimo bilo koji par $(\lambda_0, y_0) \in \mathbb{K} \times X$ i bilo koji $\varepsilon > 0$. Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{1+|\lambda_0|+\|x_0\|}$, pa imamo

$$(\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|_\infty < \delta) \Rightarrow (\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \wedge \|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\|m(\lambda, x) - m(\lambda_0, x_0)\| = \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq$$

$$|\lambda_0|\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\|x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\|x - x_0\| < \delta(|\lambda_0| + \|x_0\|) + \delta^2 < \varepsilon,$$

tj. množenje vektora sa skalarom je neprekidno. $\square$

Linearni topološki prostor je skup, koji je snabdjeven strukturom linearnog prostora i topološkom strukturom i to tako da su te dvije strukture konzistentne, tj. zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom su neprekidna preslikavanja.

Iz prethodne propozicije slijedi da je normirani prostor primjer linearnog topološkog prostora.

Algebra je linearni prostor X nad poljem $\mathbb{K}$, u kojem je još definirano množenje vektora $X \times X \rightarrow X$ za koje vrijedi:

$$(1) \text{ kvaziasocijativnost: } (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X.$$

$$(2) \text{ distributivnost: } (x + y)z = xz + yz \text{ i } x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in X.$$

Uz dodatne uvjete govorimo o asocijativnoj algebri, algebri s jedinicom i komutativnoj algebri.

Normirana algebra je asocijativna algebra definirana na normiranom prostoru, s time da norma poštuje uvjet $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ za svaki $x, y \in X$.

Banachova algebra je normirana algebra definirana na Banachovom prostoru.

4.1.6. Zadatak. Dokaži da je množenje vektora u normiranoj algebri neprekidno preslikavanje.

4.2 Osnovna svojstva. Kategorijalnost

4.2.1. Teorem. Kompozicija neprekidnih preslikavanja je neprekidno preslikavanje. Identiteta je neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Neka je $x \in X$ bilo koja točka, neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija neprekidna u x i $g : Y \rightarrow Z$ neprekidna u $f(x) \in Y$, te neka je W okolina od $g \circ f(x)$. Kako je g neprekidno u $f(x)$, postoji okolina $V \subseteq Y$ od $f(x)$ tako da je $g(V) \subseteq W$. No i f je neprekidno, pa za okolinu V od $f(x)$ postoji okolina $U \subseteq X$ od x , takva da je $f(U) \subseteq V$. Dakle, $g \circ f(U) = g[f(U)] \subseteq g(V) \subseteq W$ pa je neprekidnost za kompoziciju dokazana. Neprekidnost identitete je očita.

□

4.2.2. Napomena. Topološki prostori kao objekti i neprekidna preslikavanja kao morfizmi čine jednu kategoriju, koja se naziva topološka kategorija i označava sa $\mathbf{T}$.

Neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju.

4.2.3. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje. Ako niz $(x_n)_n$ u X konvergira prema $x_0 \in X$ onda niz $(f(x_n))_n$ konvergira prema $f(x_0)$, tj. iz $\lim_n x_n = x_0$ slijedi $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.*

Dokaz: Neka je V bilo koja okolina od $f(x_0)$. Po definiciji neprekidnosti postoji okolina U od x_0 tako da je $f(U) \subseteq V$. Kako je x_0 granična točka od $(x_n)_n$, to postoji n_0 , takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Onda je $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ za svaki $n \geq n_0$ i tvrdnja je dokazana. □

Obrat teorema ne vrijedi općenito, ali je istinit u metričkim prostorima.

4.2.4. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ preslikavanje između metričkih prostora. Ako za svaki niz $(x_n)_n$ iz X , koji konvergira prema nekoj točki $x_0 \in X$, niz slika $(f(x_n))_n$ konvergira prema $f(x_0) \in Y$, onda je preslikavanje f neprekidno.*

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije istinita, tj. da f čuva konvergenciju nizova koji konvergiraju k x_0 , ali f nije neprekidno. To bi značilo, da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$ i $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Odatle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\delta = \frac{1}{n}$ dobivamo točku $x_n \in X$ takvu da je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon > 0$. Odatle slijedi da je $\lim_n x_n = x_0$ i $(f(x_n))_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. Po pretpostavci bi onda moralo biti $\lim f(x_n) = f(x_0)$, pa smo dobili kontradikciju. □

4.2.5. Korolar. *Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ između metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako čuva konvergenciju nizova, tj. ako i samo ako iz $\lim_i x_i = x_0$ slijedi $\lim_i f(x_i) = f(x_0)$.*

Korolar 4.2.5. je tzv. Heinova definicija neprekidnosti u metričkim prostorima.

4.2.6. Korolar. *Neka je X metrički, Y Hausdorffov prostor i $f, g : X \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja koja se podudaraju na gustom dijelu $D \subseteq X$. Tada je $f = g$.*

4.3 Karakterizacija neprekidnosti

Navedimo nekoliko kriterija, pomoću kojih se može provjeriti neprekidnost preslikavanja.

4.3.1. Teorem. *$f : X \rightarrow Y$ je neprekidno preslikavanje, ako i samo ako za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ u Y , $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren u X .*

Dokaz: Neka je f neprekidno preslikavanje i $V \subseteq Y$ otvoren skup. Neka je $x \in f^{-1}(V)$ bilo koja točka. Onda je V okolina točke $f(x)$, pa radi neprekidnosti postoji okolina U od x takva, da je $f(U) \subseteq V$, tj. $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Prema tome je x iz nutrine od $f^{-1}(V)$, tj. $x \in \text{int } f^{-1}(V)$. Odatle zaključujemo da je $f^{-1}(V) \subseteq \text{int } f^{-1}(V)$, dakle $f^{-1}(V) = \text{int } f^{-1}(V)$ što dokazuje, da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup. Obratno, neka je $x_0 \in X$ bilo koja točka i V otvorena okolina od x_0 . Onda je po pretpostavci $U = f^{-1}(V)$ otvorena okolina od x_0 i vrijedi $f(U) = V$, pa je f neprekidna u x_0 po definiciji. $\square$

4.3.2. Teorem. *$f : X \rightarrow Y$ je neprekidno preslikavanje ako i samo ako je za svaki zatvoreni skup $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ zatvoreni skup u X .*

Dokaz: Analogno dokazu prethodnog teorema. $\square$

4.3.3. Teorem. *$f : X \rightarrow Y$ je neprekidno preslikavanje ako i samo ako je za svaki podskup $A \subseteq X$, $f(\text{Cl } A) \subseteq \text{Cl } f(A)$.*

Dokaz: Neka je f neprekidno preslikavanje i $A \subseteq X$ bilo koji skup. Kako je $\text{Cl } f(A) \subseteq Y$ zatvoren skup iz teorema 4.3.2. slijedi da je $f^{-1}(\text{Cl } f(A)) \subseteq X$ zatvoren u X . Pri tome vrijedi $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\text{Cl } f(A))$. Dakle, $f^{-1}(\text{Cl } f(A))$ je zatvoren skup koji sadrži A . Kako je po definiciji $\text{Cl } A$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A , to vrijedi $\text{Cl } A \subseteq f^{-1}(\text{Cl } f(A))$ ili $f(\text{Cl } A) \subseteq \text{Cl } (f(A))$, što se i tvrdilo.

Obrat se dokazuje analogno. $\square$

4.3.4. Korolar. *Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje i $A \subset \mathbb{R}$. Ako postoji $\inf A$, tada postoji i $\inf f(A)$ te vrijedi $f(\inf A) = \inf f(A)$. Analogna tvrdnja vrijedi za supremum.*

4.4 Homeomorfizam

Iz definicije 2.1.6. znamo da je homeomorfizam bijekcija $f : X \rightarrow Y$ koja čuva topološke strukture, tj. takva da je

- (1) $f(U)$ otvoren u Y , za svaki otvoreni $U \subseteq X$,
- (2) $f^{-1}(V)$ otvoren u X , za svaki otvoreni $V \subseteq Y$.

Sada ćemo homeomorfizam karakterizirati pomoću neprekidnih preslikavanja.

4.4.1. Teorem. *Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je homeomorfizam ako i samo ako je neprekidno i postoji neprekidno preslikavanje $g : Y \rightarrow X$, tako da je $g \circ f = 1|_X$ i $f \circ g = 1|_Y$.*

Dokaz: Ako je f homeomorfizam, onda je f bijekcija, pa postoji $g = f^{-1}$ takav da je $f^{-1} \circ f = 1|_X$ i $f \circ f^{-1} = 1|_Y$. Nadalje, kako je za svaki otvoreni $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ otvoren u X , to je f neprekidno po teoremu 4.3.1. Ostaje vidjeti, da je i $f^{-1} : Y \rightarrow X$ neprekidno. Neka je $U \subseteq X$ otvoren. Onda je po definiciji homeomorfizma $f(U)$ otvoren u Y . No, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ otvoren u Y , pa je f^{-1} neprekidno po teoremu 4.3.1. $\square$

Prema tome imamo ovu ekvivalentnu karakterizaciju homeomorfizma.

4.4.2. Korolar. *Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je homeomorfizam, ako i samo ako*

- (1) *f je bijekcija,*
- (2) *f i f^{-1} su neprekidna preslikavanja.*

Kako smo rekli, prostori X i Y su homeomorfni, $X \cong Y$, ako postoji homeomorfizam $f : X \rightarrow Y$. To je jedna relacija ekvivalencije koja vrši klasifikaciju topoloških prostora.

4.4.3. Primjer. Neka je $X = [0, 1)$ poluotvoreni interval, $Y = S_1$ kružnica i $f : X \rightarrow Y$ "namatanje", onda je f bijekcija i f je neprekidna, ali f^{-1} nije neprekidna, pa $X \not\cong Y$.

4.5 Uniformna neprekidnost

Pojam je vezan uz metričke prostore.

4.5.1. Definicija. Neka je $f : X \rightarrow Y$ preslikavanje između metričkih prostora. Kažemo da je f **uniformno ili jednoliko neprekidno** na prostoru X , ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $x, y \in X$ i $d(x, y) < \delta$ slijedi $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Usporedimo li prethodnu definiciju s definicijom neprekidnosti, zaključujemo da je svako uniformno neprekidno preslikavanje i neprekidno, ali obrat nije istinit općenito. Naime, u općoj definiciji uz dani $\varepsilon > 0$ je $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ dok je kod uniformne neprekidnosti $\delta = \delta(\varepsilon)$ tj. ne ovisi o promatranoj točki. Realna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je primjer funkcije, koja je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ali nije uniformno neprekidna.

U normiranom prostoru X su norma i zbrajanje uniformno neprekidne funkcije na čitavom prostoru $X \times X$, a množenje skalarom je uniformno neprekidno na omeđenim skupovima u $X \times X$. (Dokažite!)

4.5.2. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ uniformno neprekidno preslikavanje metričkih prostora. Ako je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u X , onda je $(f(x_n))_n$ također Cauchyjev niz u Y .*

Dokaz: Kako je f uniformno neprekidno, za dani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da $d(x, y) < \delta$ povlači $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Jer je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz, za dani $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da $m, n \geq n_0$ povlači $d(x_m, x_n) < \delta$, pa onda zbog uniformne neprekidnosti od f vrijedi $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, dakle niz $(f(x_n))_n$ je također Cauchyjev niz. $\square$

4.5.3. Teorem. *Neka su X, Y metrički prostori, Y potpun. Ako je $A \subseteq X$ podskup gust na X , tj. $\overline{\text{Cl}} A = X$, i ako je $f : A \rightarrow Y$ uniformno neprekidno preslikavanje na A , tada postoji i jedinstveno je neprekidno preslikavanje $g : X \rightarrow Y$, koje proširuje f , tj. $g|_A = f$. Nadalje, g je također uniformno neprekidno na X .*

Dokaz: Dokaz. Zato što je podskup A gust u metričkom prostoru X , to za svaku točku $x \in X$ postoji niz $(x_n)_n$ u A takav da $x = \lim_n x_n$. Očigledno je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u prostoru X . Kako je funkcija f uniformno neprekidna, prema prethodnom teoremu 4.5.2. slijedi da je $(f(x_n))_n$ Cauchyjev niz u prostoru Y . Budući da je Y potpun metrički prostor to postoji točka $g(x) \in Y$ takva da $g(x) = \lim_n f(x_n)$. Sada imamo funkciju $g : X \rightarrow Y$ koja je korektno definirana tj. $g(x)$ ne ovisi od izbora Cauchyjevog niza $(x_n)_n$.

Naime, ako je $(x'_n)_n$ neki drugi niz u A koji konvergira prema istoj točki x , onda su ti nizovi ekvivalentni u smislu da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε takav da je $d(x_n, x'_n) < \varepsilon$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_\varepsilon$. Lagano se dokazuje da uniformno neprekidna funkcija preslikava ekvivalentne nizove u ekvivalentne nizove. Također, dva ekvivalentna niza konvergiraju k istoj točki, pa slijedi da je $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x'_n)$. Ovaj argument također povlači da se na potprostoru A funkcija g podudara sa funkcijom f jer za niz $(x_n)_n$ možemo uzeti konstantan niz u A , ako je točka x iz A . Također je funkcija g jednoznačno određena.

Preostaje provjeriti da je g uniformno neprekidna funkcija. Neka je realan broj $\varepsilon > 0$ zadan po volji. Jer je f uniformno neprekidna funkcija, postoji realan broj $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in A$ iz relacije $d(x, y) < \delta$ slijedi $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Promatrajmo sada točke $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$. Odaberimo nizove $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ takve da $x = \lim_n x_n$ i $y = \lim_n y_n$. Znamo da vrijedi $\lim_n f(x_n) = g(x)$ i $\lim_n f(y_n) = g(y)$. Zato postoji prirodan broj n_ε sa svojstvom da je $d'(f(x_n), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d'(f(y_n), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki prirodan broj $n \geq n_\varepsilon$. Sada zbog konvergencije $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ možemo odabrati prirodan broj $n \geq n_\varepsilon$ takav da je $d(x_n, y_n) < \delta$. Upotrebom nejednakosti trokuta i naših odabira imamo $d'(g(x), g(y)) \leq d'(g(x), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $\square$

4.5.4. Korolar. *Svaki normirani (unitarni) prostor je gust potprostor nekog Banachovog (Hilbertovog) prostora. Taj prostor je upotpunjenje polaznog i jedinstven je (do na izomorfizam).*

4.6 Povezanost prostora

Radi se o još jednom topološkom pojmu. Intuitivno je jasno, da ćemo prostor, koji se sastoji od samo dvije različite točke smatrati nepovezanim. Na toj predodžbi baziramo definiciju povezanosti, odnosno nepovezanosti.

4.6.1. Definicija. Kažemo, da je topološki prostor X **povezan**, ako je svako neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ konstantno. U suprotnom, prostor je nepovezan.

4.6.2. Primjer. Pravac, segment, kružnica su povezani skupovi. $\mathbb{R}^n$ je povezan prostor.

Evo nekoliko karakterizacija povezanosti, od kojih svaka može poslužiti kao definicija pojma.

4.6.3. Teorem. *X je povezan ako i samo ako ne postoje zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$, takvi da je $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = X$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X povezan. Kada bi postojali $F_1, F_2 \subseteq X$, kao u teoremu, definiramo surjekciju $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ sa $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_1, \\ 0, & x \in F_2, \end{cases}$ za koju se lako vidi da je neprekidna, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je X povezan.

Obratno, pretpostavimo da ne postoje $F_1, F_2 \subseteq X$ sa svojstvima iz teorema. Tvrdimo da je tada X povezan. Kada bi bio nepovezan, postojala bi neprekidna surjekcija $f : X \rightarrow \{0, 1\}$. Iz karakterizacije neprekidnosti zaključujemo da su $f^{-1}(0) = F_1$ i $f^{-1}(1) = F_2$ zatvoreni skupovi, $F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$ i takvi da je $F_1 \cup F_2 = X$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, što je kontradikcija sa pretpostavkom. $\square$

4.6.4. Teorem. *X je povezan ako i samo ako **ne** postoje otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = X$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Dokaz: Analogno dokazu prethodnog teorema. $\square$

Postoje po jedan otvoren i jedan zatvoren skup s svojstvom iz teorema $F, U \neq \emptyset$, $F \cup U = \mathbb{R}$, $F \cap U = \emptyset$.

4.6.5. Teorem. *X je povezan ako i samo ako iz činjenice, da je $A \subseteq X$ istodobno otvoren i zatvoren slijedi da je $A = \emptyset$ ili $A = X$.*

Dokaz: Neka je X povezan, a $A \subseteq X$ otvoren i zatvoren i $A \neq \emptyset, X$. Definirajmo $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ sa $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in X \setminus A, \end{cases}$. No $\{0\}, \{1\} \subset \{0, 1\}$ su zatvoreni skupovi, a $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = X \setminus A$ su također zatvoreni skupovi, pa je f neprekidno. Prema tome, postojala bi neprekidna surjekcija $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, suprotno pretpostavci da je X povezan. Slično se dokazuje i obrat. $\square$

4.6.6. Teorem. *Povezanost je invarijanta neprekidnog preslikavanja. Točnije, ako je $f : X \rightarrow Y$ neprekidna surjekcija i X je povezan, onda je i Y povezan.*

Dokaz: Kada Y ne bi bio povezan, postojala bi neprekidna surjekcija $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$. Onda bi kompozicija $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$ bila također neprekidna surjekcija, pa bi X bio nepovezan, suprotno pretpostavci. $\square$

4.6.7. Napomena. Nepovezanost nije invarijanta neprekidnog preslikavanja.

4.6.8. Korolar. *Neka je $X \cong Y$. Ako je jedan od njih povezan i drugi je povezan. Isto vrijedi za nepovezanost. Drugim riječima, povezanost i nepovezanost su topološka svojstva.*

4.6.9. Teorem. *Neka su $X_1, X_2 \subset X$, tako da je $X_1 \cup X_2 = X$ i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Ako je svaki od potprostora X_1 i X_2 povezan i X je povezan.*

Dokaz: Neka je $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ bilo koje neprekidno preslikavanje. Treba vidjeti, da je ono konstantno. Neka je $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Kako su X_1 i X_2 povezani, to je $f|_{X_i} : X_i \rightarrow \{0, 1\}$ konstantno, $f|_{X_i}(x) = f(x_0)$, za $i = 1, 2$. Tako je $f = f|_{X_1} \cup f|_{X_2} = f(x_0)$ konstantno preslikavanje. $\square$

Teorem se lako generalizira na po volji mnogo dijelova od X .

Poglavlje 5

KOMPAKTNOST

5.1 Definicija kompaktnosti

5.1.1. Definicija. Neka je X topološki prostor, a $\mathcal{U} = \{U_\lambda; U_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ familija podskupova takva da je $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$. Onda kažemo, da je $\mathcal{U}$ **pokrivač** za prostor X . Ako je svaki od članova pokrivača U_λ otvoren u X govorimo o **otvorenom pokrivaču**.

Pokrivač $\mathcal{U}$ je konačan ili prebrojiv, ako je skup indeksa Λ konačan ili prebrojiv skup.

Podfamilija $\mathcal{U}' = \{U_\lambda; U_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda', \Lambda' \subset \Lambda\}$ je **potpokrivač** od $\mathcal{U}$, ako je $\mathcal{U}'$ i sama pokrivač za prostor X .

Kažemo, da je pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ upisan u pokrivač $\mathcal{U}$ ako za svaki $\gamma \in \Gamma$ postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je $V_\gamma \subseteq U_\lambda$. Kaže se još da $\mathcal{V}$ **profinjuje** $\mathcal{U}$ ili da je $\mathcal{V}$ **profinjenje pokrivača** $\mathcal{U}$.

5.1.2. Napomena. Jasno, svaki potpokrivač $\mathcal{U}'$ od $\mathcal{U}$ je profinjenje $\mathcal{U}$. Nadalje, ako je $\mathcal{U}$ bilo koji otvoreni pokrivač prostora X , a $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ za taj prostor, dakle i sama otvoreni pokrivač, onda postoji potpokrivač $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$, koji profinjuje $\mathcal{U}$.

5.1.3. Teorem. *Svaki otvoreni pokrivač separabilnog metričkog prostora može se profiniti otvorenim pokrivačem koji je prebrojiv. Posebno, svaki pokrivač separabilnog metričkog prostora ima prebrojiv potpokrivač.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{U} = \{U_\lambda; U_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ bilo koji pokrivač od X . Prema teoremu 2.4.4. postoji prebrojiva baza $\mathcal{B} = \{U(y, \frac{1}{n}); y \in D, n \in \mathbb{N}\}$, gdje je $D \subseteq X$ prebrojiv gust dio od X . Za svaku točku $x \in X$ postoji $U_\lambda \subseteq X$ i $U(y, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in U(y, \frac{1}{n}) \subseteq U_\lambda$. Neka je $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ familija svih tako dobivenih kugala. Za svaku kuglu iz $\mathcal{B}'$ izaberimo po jedan $U \in \mathcal{U}$

za koji je $B \subseteq U$ i skup svih takvih označimo s $\mathcal{U}'$. Sada je jasno da je $\mathcal{U}'$ prebrojiv potpokrivač od $\mathcal{U}$. $\square$

5.1.4. Definicija. Topološki prostor X je **kompaktan**, ako se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X može upisati pokrivač $\mathcal{V}$ od X koji je konačan.

Podskup $Y \subset X$ je kompaktan, ako je Y kompaktan kao potprostor od X .

5.1.5. Primjer. Svaki prostor koji se sastoji od konačno točaka je kompaktan. Segment, kružnica i krug su kompaktni skupovi, dok pravac i nutrina kruga to nisu. To je lako vidjeti i neposredno, a proizlazi iz karakteristike kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$, koju ćemo dokazati kasnije.

Dajemo jednu karakterizaciju kompaktnosti, koja se često uzima za definiciju.

5.1.6. Teorem. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji potpokrivač $\mathcal{U}'$, koji je konačan.*

Dokaz: Neka je X kompaktan, a $\mathcal{U} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ bilo koji njegov otvoreni pokrivač. Iz kompaktnosti slijedi da postoji konačni otvoreni pokrivač $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ koji ga profinjuje, tj. takav da za svaki $i = 1, 2, \dots, k$ postoji $\lambda_i \in \Lambda$, $V_i \subseteq U_{\lambda_i}$. Onda je $X = \bigcup_{i=1}^k V_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i}$, tj. $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_k}\}$ je otvoreni konačni pokrivač za X , koji je potpokrivač od $\mathcal{U}$. Obrat je trivijalan. $\square$

5.1.7. Korolar. *Pravac nije kompaktan prostor.*

Dokaz: Promatrajmo pokrivač $\mathcal{U} = \{\langle a, b \rangle; a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ za $\mathbb{R}$. Kad bi $\mathbb{R}$ bio kompaktan, postojao bi konačni potpokrivač $\mathcal{U}' = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\}$. Neka je $r = \max\{a_i, b_i; i = 1, \dots, k\}$. Onda je $r \in \mathbb{R}$ i $r \notin (a_i, b_i)$ za svaki $i = 1, \dots, k$ što pokazuje da $\mathcal{U}'$ nije pokrivač za $\mathbb{R}$, protivno pretpostavci. Prema tome $\mathbb{R}$ nije kompaktan. $\square$

5.1.8. Definicija. Kažemo da familija $\{S_\lambda; \lambda \in A\}$ podskupova skupa S ima **svojstvo konačnih presjeka** ako je za svaki konačan podskup B indeksnog skupa A presjek $\bigcap_{\lambda \in B} S_\lambda$ neprazan.

Primijetimo da svaki silazni niz nepraznih podskupova ima svojstvo konačnih presjeka.

5.1.9. Teorem. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako u njemu svaka familija $\{F_\lambda; \lambda \in A\}$ zatvorenih podskupova sa svojstvom konačnih presjeka ima neprazan presjek svih članova $\bigcap_{\lambda \in A} F_\lambda$.*

Dokaz: Slijedi iz činjenice da familija $\{F_\lambda; \lambda \in A\}$ zatvorenih podskupova topološkog prostora X sa svojstvom konačnih presjeka ima presjek svih svojih članova $\bigcap_{\lambda \in A} F_\lambda$ prazan onda i samo onda ako je $\{X \setminus F_\lambda; \lambda \in A\}$ otvoreni pokrivač od X bez konačnog potpokrivača. $\square$

Kompaktnost je topološko svojstvo prostora, tj. ostaje očuvano kod homeomorfizma.

5.1.10. Teorem. *Neka je $X \cong Y$. X je kompaktan ako i samo ako je Y kompaktan.*

Dokaz: Po pretpostavci postoji homeomorfizam $h : X \rightarrow Y$. Neka je $\mathcal{V} = \{V_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ bilo koji otvoreni pokrivač za Y , onda je $\mathcal{U} = \{U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ otvoreni pokrivač za X . Kako je X kompaktan po pretpostavci, po teoremu 5.1.6. postoji konačni potpokrivač $\mathcal{U}_0 = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_k}\}$. No onda je $\mathcal{V}_0 = \{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}\}$ konačni pokrivač od Y , što pokazuje da je Y kompaktan. $\square$

5.2 Osnovna svojstva kompaktnosti

5.2.1. Teorem. *Svaki zatvoreni podskup kompaktnog prostora je kompaktan.*

Dokaz: Neka je $F \subseteq X$ zatvoreni podskup od X . Neka je $\mathcal{V} = \{V_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ bilo koji otvoreni pokrivač za prostor F . Onda je $V_\lambda = U_\lambda \cap F$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, gdje je $U_\lambda \subseteq X$ otvoren u X . Očito da je $\mathcal{U} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \cup \{X \setminus F\}$ otvoren pokrivač za X . Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{U}_0 = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_k}, X \setminus F\}$ prostora X . Onda je $\mathcal{V}_0 = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_k}\}$ konačni potpokrivač od $\mathcal{V}$ za F , pa je F kompaktan. $\square$

5.2.2. Teorem. *Neka je X Hausdorffov prostor, $F \subseteq X$ kompaktan skup i $x_0 \in X \setminus F$. Tada se F i x_0 mogu separirati otvorenim skupovima.*

Dokaz: Treba dokazati da postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ tako da je $F \subseteq U$, $x_0 \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Kako je X Hausdorffov, za svaki $x \in F$ postoje otvorene okoline U_x od x i V_x od x_0 koje separiraju te točke $U_x \cap V_x = \emptyset$. Familija $\{U_x \cap F; x \in F\}$ je otvoreni pokrivač za F , pa

zbog kompaktnosti postoji konačni potpokrivač $\{U_{x_1} \cap F, \dots, U_{x_k} \cap F\}$ za F . Tako je $F = \bigcup_{i=1}^k (U_{x_i} \cap F) \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{x_i} = U$ otvoren u X . Nadalje, skup $V = \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$, kao presjek od konačno mnogo otvorenih skupova, je otvoren u X . Očito je $F \subseteq U$, $x_0 \in V$. Konačno $U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^k U_{x_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^k V_{x_j} \right) = \bigcup_{i=1}^k \left[U_{x_i} \cap \left(\bigcap_{j=1}^k V_{x_j} \right) \right] \subseteq \bigcup_{i=1}^k (U_{x_i} \cap V_{x_i}) = \emptyset$, jer je za svaki $i = 1, \dots, k$ vrijedi $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$. $\square$

5.2.3. Teorem. *Kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.*

Dokaz: Neka je $F \subseteq X$ kompaktan podskup od X . Za svaki $x \in X \setminus F$ postoji otvorena okolina U_x , takva da je $U_x \cap F = \emptyset$, dakle $U_x \subseteq X \setminus F$. Prema tome je $X \setminus F$ otvoren, pa je F zatvoren, što je i trebalo dokazati. $\square$

5.2.4. Teorem. *Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz: . Neka su F i G dva disjunktne zatvorene podskupa kompaktnog metričkog prostora X . Moramo naći disjunktne otvorene skupove U i V takve da je $F \subset U$ i $G \subset V$. Pomoću teorema 5.2.2. za svaku točku x skupa F možemo naći otvorenu okolinu U_x od x i otvorenu okolinu V_x zatvorenog skupa G takve da je $U_x \cap V_x = \emptyset$. Familija $\{U_x; x \in F\}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog skupa F (koji je zatvoreni podskup kompaktnog prostora). Zato postoji konačan potpokrivač $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ od F . Onda su $U = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$ i $V = \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$ traženi otvoreni skupovi. $\square$

5.3 Karakterizacija kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$

5.3.1. Propozicija. *Svaki kompaktan metrički prostor je omeđen.*

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$ bilo koja točka kompaktnog metričkog prostora. Onda je familija kugala $\mathcal{U} = \{U(x_0, r); r > 0\}$ otvoreni pokrivač za X . Kako je X kompaktan, taj pokrivač se može reducirati na konačni potpokrivač $\{U(x_0, r_1), \dots, U(x_0, r_k)\}$, pa je $X = \bigcup_{i=1}^k U(x_0, r_i) \subseteq U(x_0, r)$, $r > \max\{r_1, \dots, r_k\}$. $\square$

5.3.2. Korolar. *Kompaktan podskup metričkog prostora je omeđen i zatvoren.*

Dokaz: Kako je svaki metrički prostor Hausdorffov, tvrdnja slijedi iz teorema 5.2.3. i propozicije 5.3.1. $\square$

Obrat ne vrijedi općenito, nego samo za podskupove od $\mathbb{R}^n$. Dokažimo najprije ovu lemu.

5.3.3. Lema. *Neka je X metrički prostor sa svojstvom da svaki niz $(x_n)_n$ iz X ima barem jednu točku gomilanja. Tada se svaki prebrojivi otvoreni pokrivač od X može reducirati na konačan potpokrivač.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{U} = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv pokrivač za X . Tvrdimo da je $X = \bigcup_{i=1}^k U_i$ za neki $k \in \mathbb{N}$. U suprotnom bi za svaki k mogli odabrati točku $x_k \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$. Po pretpostavci niz $(x_n)_n$ ima točku gomilanja $x_0 \in X$. Kako je $\mathcal{U}$ pokrivač za X , postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $x_0 \in U_n$. Skup U_n je okolina točke x_0 , pa postoji $k \in \mathbb{N}$, takav da je $k > n$ i $x_k \in U_n$, što je u kontradikciji sa izborom točke x_k . $\square$

5.3.4. Teorem. *(Borel – Lebesgue) Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan, ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Dokaz: Kako je $\mathbb{R}^n$ metrički prostor, kompaktan podskup $K \subset \mathbb{R}^n$ je omeđen i zatvoren po korolaru 5.3.2.

Obratno, neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ omeđen i zatvoren. Želimo dokazati da je kompaktan. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ otvoreni pokrivač za K . Kako je $\mathbb{R}^n$ separabilan, to je i K separabilan, pa možemo u $\mathcal{U}$ upisati prebrojivi pokrivač $\mathcal{V}$ (koji se sastoji od članova baze). Nadalje, kako je K omeđen svaki je niz $(x_n)_n$ iz K omeđen u $\mathbb{R}^n$, pa po Bolzano–Weierstrasseovom teoremu 3.3.5. ima bar jednu točku gomilanja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. No K je i zatvoren, pa je $x_0 \in K$ (vidi teorem 3.3.3. i teorem 3.2.1.). Po lemi 5.3.3. tada zaključujemo, da se $\mathcal{V}$ može reducirati na konačni potpokrivač $\mathcal{V}'$. Kako je $\mathcal{V}'$ očito profinjenje $\mathcal{U}$, tvrdnja je dokazana. $\square$

5.4 Kompaktnost metričkih prostora

5.4.1. Teorem (Cantor). *Metrički prostor (X, d) je potpun ako i samo ako svaki silazni niz $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ nepraznih zatvorenih podskupova od X čiji dijametri teže k nuli ima neprazan presjek, tj. $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$.*

Dokaz: Neka je $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ niz nepraznih zatvorenih podskupova nekog potpunog metričkog prostora (X, d) i pretpostavimo da je $\lim_i \text{diam}(F_i) = 0$. U svakom skupu F_i odaberimo točku x_i . Budući da sve točke s indeksom većim od prirodnog broja i leže u skupu F_i , pretpostavka povlači da je $(x_i)_i$ Cauchyjev niz u prostoru X . Zato on konvergira prema nekoj točki $x \in X$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$, jer je skup F_i zatvoren i x je limes niza $(x_j)_{j \geq i}$, zaključujemo da je točka x u skupu F_i . Dakle, presjek $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \{x\}$ je neprazan skup budući da sadrži točku x .

Obratno, neka je (X, d) metrički prostor koji zadovoljava uvjet iz iskaza teorema i neka je $(x_i)_i$ Cauchyjev niz u X . Za svaki prirodan broj i neka je F_i zatvarač u X skupa $\{x_i, x_{i+1}, \dots\}$. Jasno je da je $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova kojima dijometri teže k nuli. Po pretpostavci je presjek $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. Neka je x točka iz tog presjeka. Tvrdimo da niz $(x_i)_i$ konvergira prema x . Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Sada odaberimo prirodan broj i tako da vrijedi $\text{diam}(F_i) < \varepsilon$. Kako su za svaki $j \geq i$ točke x i x_j obje u skupu F_i , vidimo da je $d(x, x_j) < \varepsilon$ za svaki $j \geq i$. Dakle, $x = \lim_i x_i$ i metrički prostor (X, d) je potpun. $\square$

5.4.2. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ neprekidna surjekcija. Ako je X kompaktan onda je i Y kompaktan.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{V} = \{V_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ otvoreni pokrivač za Y . Kako je f neprekidno $U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda)$ je otvoren skup u prostoru X , za svaki $\lambda \in \Lambda$, pa je $\mathcal{U} = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ otvoreni pokrivač za X . Zbog kompaktnosti od X , može se reducirati na konačni potpokrivač $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_k}\}$. Kako je f surjekcija, to je $f(U_\lambda) = V_\lambda$, pa je

$$\bigcup_{i=1}^k V_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^k f(U_{\lambda_i}) = f\left(\bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i}\right) = f(X) = Y,$$

tj. $\mathcal{V}' = \{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}\}$ je konačni potpokrivač od $\mathcal{V}$ za Y , pa je Y kompaktan. $\square$

5.4.3. Teorem. *Svaka metrika na kompaktnom prostoru je potpuno omeđena.*

Dokaz: Neka je X kompaktan prostor i pretpostavimo da metrika d na prostoru X nije potpuno omeđena. Onda sigurno postoji $\varepsilon > 0$ takav da za niti jedan konačan podskup K od X familija $\{U(x, \varepsilon); x \in K\}$ ne pokriva čitav prostor X . Dakle, za svaki konačan niz $x_1, \dots, x_n$ točaka prostora X možemo naći točku x_{n+1} takvu da je $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$ za svaki $i \leq n$. Sada

indukcijom možemo izgraditi niz $(x_n)_n$ točaka u prostoru X takvih da je $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ za svaki par različitih prirodnih brojeva i i j . Promatrajmo sada skup $F = \{x_1, x_2, \dots\}$. Za svaku točku x prostora X izvan skupa F postoji njena okolina koja ne siječe F jer bi u protivnom postojale u F dvije različite točke na udaljenosti manjoj od ε . Dakle, skup F je zatvoren u X pa je zato kompaktan. Ali, to je nemoguće jer je F očigledno homeomorfan diskretnom metričkom prostoru sa prebrojivo beskonačno mnogo točaka koji nije kompaktan. $\square$

5.4.4. Teorem. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

- 1) *Ako je X kompaktan metrički prostor onda je separabilan.*
- 2) *Ako je X potpuno omeđen metrički prostor onda je separabilan.*

Dokaz: 1) Za svaki prirodan broj i pokrivač $U_i = \{U(x, \frac{1}{i}); x \in X\}$ od X otvorenim kuglama radijusa $\frac{1}{i}$ ima konačan potpokrivač. Dakle, postoji konačan podskup K_i od X takav da familija $\{U(x, \frac{1}{i}); x \in K_i\}$ prekriva X . Onda je $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ prebrojiv podskup od X . Tvrdimo da je on gust u X .

Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ po volji. Dovoljno je pokazati da postoji $s \in S$ takav da je $d(x, s) < \varepsilon$. Odaberimo prirodan broj i takav da je $\frac{1}{i} < \varepsilon$. Zatim odaberimo $s \in K_i$ takav da x leži u skupu $U(s, \frac{1}{i})$. Sada je jasno da vrijedi $d(x, s) < \varepsilon$.

2) Za svaki prirodan broj i postoji konačan podskup K_i od X takav da familija $\{U(x, \frac{1}{i}); x \in K_i\}$ prekriva X . Slijedi zaključak kao u 1). $\square$

5.4.5. Teorem. *Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.*

Dokaz: Nužnost slijedi iz teorema 5.4.3. i Cantorovog teorema 5.4.1. jer iz teoremu 5.1.9. slijedi da svaka padajuća familija zatvorenih nepraznih skupova ima neprazan presjek.

Obratno, neka je (X, d) metrički prostor koji je istovremeno potpun i potpuno omeđen.

Za svaki prirodan broj i odaberimo konačan skup $F_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k(i)}^i\}$ takav da familija $\{U_d(x, \frac{1}{2^i}); x \in F_i\}$ prekriva prostor X . Dakle, za svaki prirodan broj i vrijedi

$$X = \bigcup_{x \in F_i} U_d(x, \frac{1}{2^i}) \text{ i } \text{diam}(U_d(x, \frac{1}{2^i})) \leq \frac{1}{i} \text{ za svaki } x \in F_i. \quad (5.1)$$

Za dokaz kompaktnosti prostora X , prvo ćemo pokazati da svaki niz $(a_n)_n$ u X ima konvergentan podniz.

Ako je slika niza $B = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ konačan skup, tvrdnja je očita jer postoji barem jedan konstantan podniz. U slučaju kada je B beskonačan skup, prvi od uvjeta (5.1) povlači da postoji $x_1 \in F_1$ takav da je presjek $B \cap U_d(x_1, \frac{1}{2}) = B_1$ beskonačan. Dakle, imamo $B \supset B_1$, $\text{diam}(B_1) \leq 1$ i B_1 je beskonačan.

Na sličan način nađemo beskonačan skup B_2 koji je presjek skupa B_1 s nekim od skupova $U_d(x_2, \frac{1}{4})$ za $x_2 \in F_2$ tako da vrijedi $B \supset B_1 \supset B_2$ i $\text{diam}(B_2) \leq \frac{1}{2}$. Nastavljajući tako, indukcijom, možemo definirati niz beskonačnih skupova takvih da vrijedi

$$B \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \text{ i } \text{diam}(B_i) \leq \frac{1}{i} \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Iz Cantorovog teorema 5.4.1. slijedi da u presjeku zatvarača skupova B_i postoji najmanje jedna točka $a \in X$. Zbog (5.2), očigledno je da svaka okolina točke a sadrži neki od skupova B_i , tj. sadrži beskonačno mnogo točaka skupa B , što ima za posljedicu da je a točka gomilanja niza $(a_n)_n$.

Nadalje, po teoremu 5.4.4. prostor X je separabilan. Po teoremu 5.1.3. svaki otvoreni pokrivač sadrži prebrojiv potpokrivač. Dakle, dovoljno je pokazati da svaki prebrojivi pokrivač posjeduje konačan potpokrivač.

U suprotnom slučaju bi postojao prebrojiv pokrivač $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ od X čiji niti jedan konačan podskup nije pokrivač. Definirajmo niz $(a_n)_n$ sa svojom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $a_n \notin \bigcup_{1 \leq k \leq n} U_k$. Prema ranije dokazanom,

niz $(a_n)_n$ ima točku gomilanja $a \in X$. Zato što je $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ pokrivač od X , mora postojati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a \in U_{n_0}$. Po konstrukciji niza, za sve $n > n_0$ vrijedi $a_n \notin U_{n_0}$, što je kontradikcija s činjenicom da je a točka gomilanja niza. Dakle, svaki prebrojivi pokrivač posjeduje konačan potpokrivač. $\square$

5.4.6. Teorem. *Za metrički prostor X slijedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

- (1) X je kompaktan.
- (2) svaki beskonačan podskup u X ima bar jednu točku gomilanja.
- (3) svaki niz u X ima bar jednu točku gomilanja.
- (4) svaki niz u X ima konvergentan podniz.
- (5) svaki padajući niz $(F_n)_n$ nepraznih zatvorenih podskupova u X ima neprazan presjek.

Dokaz: $((1) \Rightarrow (2))$. Neka je A beskonačan podskup kompaktnog metričkog prostora X . Kada skup A ne bi imao točaka gomilanja, svaka točka $x \in X$ imala bi okolinu U_x koja je disjunktna sa skupom A ili siječe skup A jedino u točki x . Familija $\{U_x; x \in X\}$ je otvoreni pokrivač od X . Jer je prostor X kompaktan, postoji njegov konačan potpokrivač $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$. Iz načina kako smo odabrali skupove U_x slijedilo bi da je skup A konačan što se protivi našoj pretpostavci.

U ovom dokazu nismo koristili pretpostavku da je X metrički prostor.

$((2) \Rightarrow (3))$. Neka je $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow X$ niz u metričkom prostoru X . Ako je skup $\sigma(\mathbb{N})$ vrijednosti niza σ konačan, očigledno postoji kofinalan podskup F od $\mathbb{N}$ i točka $x \in X$ takva da je $\sigma(i) = x$ za svaki $i \in F$. Ovdje kofinalnost znači da F ima svojstvo da za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji $i \in F$ takav da je $i > j$. Sada je jasno da je x točka gomilanja niza σ . S druge strane, ako je $\sigma(N)$ beskonačan skup, onda po pretpostavci postoji neka točka x u X takva da svaka okolina od x u X siječe skup $\sigma(N)$ u bar jednoj točki različitoj od točke x . Tvrdimo da je x točka gomilanja niza σ . I doista, neka su okolina U oko točke x i neki prirodan broj i zadani. Odaberimo okolinu V točke x unutar okoline U tako da $j < i$ i $\sigma(j) \neq x$ povlači $\sigma(j) \notin V$. Budući da okolina V mora sadržavati neki element skupa $\sigma(N)$ različit od točke x , sigurno postoji $k \geq i$ takav da $\sigma(k)$ pripada skupu V pa dakle i njegovom nadskupu U .

U dokazu ove implikacije koristili smo samo to da X zadovoljava aksiom separacije T_1 .

$((3) \Rightarrow (4))$. Neka je $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow X$ niz u X . Moramo dokazati da postoji podniz τ od σ koji konvergira. Po našoj pretpostavci, niz σ ima točku gomilanja x u prostoru X . Stavimo $f(1) = 1$. Pretpostavimo da smo već definirali brojeve $f(1) < f(2) < \dots < f(n-1) < f(n)$. Želimo sada definirati broj $f(n+1)$. To ćemo učiniti tako da nađemo prirodan broj $k > f(n)$ takav da je točka $\sigma(k)$ sadržana u kugli $K(x, \frac{1}{n})$ i stavimo $f(n+1) = k$. Tako smo indukcijom definirali strogo uzlaznu funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Lagano se sada provjeri da podniz $\tau = \sigma \circ f$ od σ konvergira prema točki x .

Za dokaz ove implikacije koristili smo samo to da prostor X zadovoljava Prvi Aksiom prebrojivosti.

$((4) \Rightarrow (5))$. Neka je $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova u X . Odaberimo u svakom skupu F_n neku točku x_n . Time smo dobili niz $(x_n)_n$ u X . Po pretpostavci, postoji točka $x \in X$ i podniz $(x_{p_n})_n$ niza $(x_n)_n$ koji konvergira prema x . Tvrdimo da točka x pripada svakom od skupova F_n . I doista, kada bi postojao prirodan broj n takav da x leži izvan zatvorenog skupa F_n , onda (zbog toga što je komplement $X \setminus F_n$ okolina točke x i jer podniz $(x_{p_n})_n$ konvergira prema x) slijedi da možemo naći prirodan broj n_0 takav da je x_{p_n} izvan skupa F_n za svaki $n \geq n_0$. Odaberimo sada broj $n \geq n_0$ pa je i $p_n \geq k$. To je zato što je $(p_n)_n$ strogo uzlazni niz. Sada točka

x_{p_n} mora biti istovremeno u skupu F_{p_n} (koji je podskup od F_n) i izvan skupa F_n što je nemoguće. Primijetimo da ova implikacija vrijedi u bilo kakvim topološkim prostorima.

((5) $\Rightarrow$ (1)). Primijetimo da je svojstvo (5) očigledno jače od svojstva iz Cantorovog teorema (gdje se za neprazne zatvorene skupove F_n još traži da im dijometri teže k nuli), pa je metrički prostor (X, d) prema tom teoremu potpun. Prema teoremu 5.4.5., da bi smo pokazali da je prostor X kompaktan, preostaje dokazati da je on potpuno omeđen prostor (tj. da u njemu za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup K takav da familija $\{U_d(x, \varepsilon); x \in K\}$ prekriva X).

Pretpostavimo suprotno, to jest, da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki konačan podskup K od X familija $\{U_d(x, \varepsilon); x \in K\}$ ne prekriva čitav prostor X . Sada se lagano matematičkom indukcijom može izgraditi niz $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow X$ takav da za svaka dva različita broja $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(\sigma_i, \sigma_j) \geq \varepsilon$. Očito, niz σ nema niti jedno gomilište. Neka je $F_i = \sigma(\{i, i+1, \dots\})$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Skupovi F_i čine silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova prostora X sa praznim presjekom što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom da (5) vrijedi. $\square$

5.5 Produkt kompaktnih prostora

Kako se smatra, jedan od najvažnijih teorema opće topologije, je čuveni teorem **Tihonova**.

5.5.1. Teorem (Tihonov). *Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ topoloških prostora je kompaktan ako i samo ako je X_λ kompaktan za saki $\lambda \in \Lambda$.*

Dokaz teorema zahtijeva upotrebu tvrdnji ekvivalentnih aksiomu izbora i dosta je težak. Za konačan broj faktora dovoljno je dokazati slučaj produkta dva prostora.

5.5.2. Teorem. *Neka su X i Y kompaktni prostori. Njihov direktni produkt $X \times Y$ je kompaktan.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{W} = \{W_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ pokrivač za $X \times Y$. Bez narušavanja općenitosti možemo pretpostaviti da je svaki $W_\lambda = U_\lambda \times V_\lambda$, gdje su $U_\lambda \in X$ i $V_\lambda \in Y$ otvoreni skupovi, jer takvi W_λ čine bazu za $X \times Y$. Neka je $x \in X$ bilo koja točka. Onda je $\{x\} \times Y \cong Y$ pa je i on kompaktan. Zato je $\{x\} \times Y$ pokriven konačnim brojem elemenata iz $\mathcal{W}$, tj. $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{k(x)} (U_{\lambda_i(x)} \times V_{\lambda_i(x)})$.

$$\bigcup_{i=1} (U_{\lambda_i(x)} \times V_{\lambda_i(x)}).$$

Pritom je skup $U = \bigcup_{i=1}^{k(x)} U_{\lambda_i(x)}$ otvorena okolina točke $x \in X$, a familija

$\mathcal{V}_x = \{V_{\lambda_1(x)}, \dots, V_{\lambda_k(x)}\}$ je otvoreni pokrivač za Y , tj. $Y = \bigcup_{i=1}^{k(x)} V_{\lambda_i(x)}$.

Osim toga za svaki $V = V_{\lambda_i(x)}$ postoji element iz $\mathcal{W}$, primjerice W_λ takav, da je $U_x \times V \subseteq W_\lambda$. U drugu ruku, familija $\{U_x; x \in X\}$ predstavlja otvoreni pokrivač za kompaktni skup X , pa se može reducirati na konačan potpokrivač $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Konačno, $\mathcal{W}' = \{U_{x_i} \times V; i = 1, \dots, n, V \in \mathcal{V}_{x_i}\}$ je konačan pokrivač za $X \times Y$, koji je očito profinjenje $\mathcal{W}$ i dokaz je gotov. $\square$

5.6 Neprekidne funkcije na kompaktu

5.6.1. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X kompaktan, a Y Hausdorffov prostor, f je homeomorfizam.*

Dokaz: Treba vidjeti da je i $f^{-1} : Y \rightarrow X$ neprekidno preslikavanje, tj. da je za svaki zatvoreni $F \subseteq X$ i skup $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ zatvoren u Y . Međutim, F je kao zatvoreni podskup kompaktnog prostora i sam kompaktan, pa je po teoremu 5.2.1. i $f(F)$ kompaktan u Y . Onda je, kao kompaktni dio Hausdorffovog prostora, po teoremu 5.2.3. zatvoren. $\square$

5.6.2. Teorem. *Neka je X kompaktan, a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Onda postoje točke $x_1, x_2 \in X$ takve da je $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, za svaki $x \in X$. tj. $f(x_1) = \min_X f$ i $f(x_2) = \max_X f$.*

Dokaz: Po teoremu 5.4.2. $f(X) \subset \mathbb{R}$ je kompaktan skup, pa je zatvoren i omeđen. Zato postoje $\min f(X) = f(x_1)$ i $\max f(X) = f(x_2)$, za neke $x_1, x_2 \in X$. $\square$

Na kompaktnim prostorima neprekidnost i uniformna neprekidnost se podudaraju.

5.6.3. Teorem. *Neka je $f : X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje metričkih prostora (X, d) i (Y, d') . Ako je X kompaktan, onda je f uniformno neprekidna na X .*

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije istinita, tj. X je kompaktan, $f : X \rightarrow Y$ je neprekidna na X i nije uniformno neprekidna na X . Tada bi $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x'_\delta, x''_\delta \in X, d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ i $d'(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon$. Tako

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\delta = \frac{1}{n}$ dobijemo $x'_n, x''_n \in X$, takve da je $d(x'_n, x''_n) < \delta$ i $d'(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon > 0$. Zbog kompaktnosti metričkog prostora X i teorema 5.4.6., niz $(x'_n)_n$ ima konvergentan podniz. Pretpostavimo da je već sam niz konvergentan i $x_0 = \lim_n x'_n$. Tada vrijedi $d(x''_n, x_0) \leq d(x'_n, x''_n) + d(x'_n, x_0) \leq \frac{1}{n} + d(x'_n, x_0)$, što daje $\lim_n x''_n = x_0$. Zbog neprekidnosti funkcije f imamo $\lim_n f(x'_n) = \lim_n f(x''_n) = f(x_0)$, a odatle, pomoću propozicije 1.1.5., slijedi $\lim_n d'(f(x'_n), f(x''_n)) = 0$, što je kontradikcija s izborom nizova. $\square$

Na kompaktnom prostoru konvergencija neprekidnih funkcija po točkama povlači uniformnu konvergenciju (vidi [5]).

5.6.4. Teorem. (Dini) *Neka je X kompaktan metrički prostor i $C(X, \mathbb{R})$ skup svih neprekidnih funkcija sa X u $\mathbb{R}$. Ako je $(f_n)_n$ monoton niz u $C(X, \mathbb{R})$ koji konvergira po točkama k funkciji $g \in C(X, \mathbb{R})$, onda je ta konvergencija uniformna na X .*

Dokaz: Neka je $(f_n)_n$ rastući niz i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Za svaki $t \in X$ postoji $n_\varepsilon(t) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon(t)) \Rightarrow (g(t) - f_n(t) < \frac{\varepsilon}{3})$.

Zbog neprekidnosti funkcija g i $f_{n_\varepsilon(t)}$ postoji okolina $V(t)$ od t takva da vrijedi

$$\forall s \in X, (s \in V(t)) \Rightarrow (|g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ i } |f_{n_\varepsilon(t)}(t) - f_{n_\varepsilon(t)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

Odatle imamo

$$\begin{aligned} \forall s \in X, s \in V(t) \Rightarrow 0 \leq g(s) - f_{n_\varepsilon(t)}(s) &= |g(s) - f_{n_\varepsilon(t)}(s)| \leq \\ &\leq |g(s) - g(t)| + |g(t) - f_{n_\varepsilon(t)}(t)| + |f_{n_\varepsilon(t)}(t) - f_{n_\varepsilon(t)}(s)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zbog kompaktnosti prostora X postoji konačno točaka $t_i \in X$ ($i = 1, \dots, m$) takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^m V(t_i)$. Neka je $n_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon(t_i); i = 1, \dots, m\}$.

Neka je $t \in X$ bilo koji i $n \geq n_\varepsilon$ po volji. Tada postoji $i \in \{1, \dots, m\}$ takav da je $t \in V(t_i)$. Odatle slijedi

$$0 \leq g(t) - f_n(t) \leq g(t) - f_{n_\varepsilon}(t) \leq g(t) - f_{n_\varepsilon(t_i)}(t) < \varepsilon,$$

tj. $(f_n)_n$ konvergira k g uniformno na X . $\square$

Bibliografija

- [1] S.Mardešić : Matematička analiza u n -dimenzionalnom prostoru 1, Školska knjiga, Zagreb 1974.
- [2] Š.Ungar : Matematička analiza 3, Mat. odjel PMF, Zagreb 1992.
- [3] Kelly : General Topology, 1955., (ruski prijevod 1968.)
- [4] Najmarh : Normirovanie kolca, Moskva, 1956.
- [5] Diendonno : Foundations of Modern Analysis, N. Y. 1960.
- [6] Simmons : Introduction to Topology and Modern Analysis, N. Y. 1963.
- [7] Hu : Introduction to General Topology, San Francisco, 1966.
- [8] Rudin : Real and Complex Analysis, N. Y. 1966.
- [9] Copson : Metric Spaces, Cambridge, 1968.
- [10] Dugađin : Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [11] Lipschutz : General Topology, Schaum's outlines, 1965.

Indeks

A

aksiom prebrojivost
 drugi, 21
aksiom prebrojivosti
 prvi, 24
aksiomi separacije, 30

B

baza
 prebrojiva, 21
 topologije, 20

C

Cauchyjev niz, 37

D

direktni produkt, 14
 metričkih prostora, 14
 normitanih prostora, 15
 topoloških prostora, 29

F

fiksna točka, 41
funkcija
 kontrakcija, 41
 neprekidna, 43
 jednoliko, 49
 prekidna, 43

G

gomilište niza, 35

H

homeomorfizam, 20, 48

I

imfimum, 2
interior, 22
izometrija, 4

K

kompaktan skup, 54
konvergenција niza, 33
 funkcija
 obična, 36
 uniformna, 37
kugla
 otvorena, 11

M

maksimum, 3
metoda iteracija, 42
metrički prostor, 1
 potprostor, 16
metrika, 1
 diskretna, 7
 ekvivalencija
 topološka, 12
 uniformna, 13
 Hausdorffova, 10
 omeđena, 12
međa
 donja, 2
 gornja, 3
minimum, 2

N

nejednakost C-S-B, 7
norma, 5
normiran prostor, 5
nutrina skupa, 22

O

okolina točke, 23

P

podbaza, 22
pokrivač skupa, 9, 53
 otvoreni, 53
 profinjenje, 53
potpokrivač skupa, 53
potprostor
 metrički, 1
prostor
 Banachov, 39
 diskretni, 7
 Hausdorffov, 30
 Hilbertov, 39
 metrički, 1
 metrizabilan, 18
 normalan, 30
 normiran, 5
 omeđen, 8
 potpun metrički, 38
 potpuno omeđen, 9
 povezan, 50
 regularan, 30
 separabilan, 28
 topološki, 11, 17
pseudometrika, 2

S

skalarni produkt, 7
skup
 otvoren, 11
 zatvoren, 24
smještenje, 4
supremum, 3

T

težina top. prostora, 21
topološka invarijanta, 20
topološki prostor, 17
 kompaktan, 54
 kvocijentni, 30
 potprostor, 19
topološko svojstvo, 20
topologija, 11, 17
 direktnog produkta, 15
 jača, 18
 relativna, 19
 slabija, 18

U

upotpunjenje metričkog prostora, 39

Z

zatvarač skupa, 25