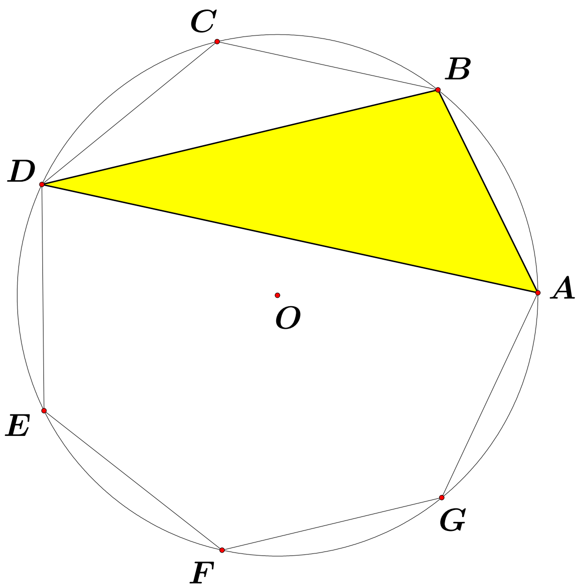
GEOMETRIJA PRAVILNOG SEDMEROKUTA

ZVONKO ČERIN

SAŽETAK. Ovaj članak opisuje neka geometrijska svojstva pravilnog sedmerokuta. Dokazi koriste kompleksne brojeve i izvode se na računalu u programu MAPLE V.



Slika 1: Pravilni sedmerokut $ABCDEFG$ i jedan od njegovih sedamkutnih trokuta DAB.

Pravilni sedmerokuti (tj., pravilni konveksni poliedri u ravnini sa sedam vrhova i isto toliko stranica) nisu bili proučavani niti blizu tako intenzivno kao njihovi rođaci istostranični trokuti, kvadrati, pravilni peterokuti, i pravilni šesterokuti. U svim matematičkim časopisima i knjigama mogu se pronaći vrlo rijetko poneki rezultati o pravilnim sedmerokutima i o njima pridruženim tzv. sedamkutnim trokutima (vidi Sliku 1). Dobar pregledni članak o takvim rezultatima napisali su

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 51N20, 51M04, Secondary 14A25, 14Q05.

Key words and phrases. pravilni sedmerokut, sedamkutni trokut, kvadrat, polovište, dužina, duljina.

prije 30 godina amerikanci Leon Bankoff i Jack Garfunkel u [1]. U ovom članku moj cilj je opisati neke od tih rezultata s manjim poboljšanjima i objasniti kako se oni mogu dokazati uz pomoć složenog računalnog programa Maple V s kojim su čitatelji Poučka već upoznati.

Sve teoreme koje ćemo opisati povezuje ista tema. Radi se o vrlo iznenađujuće čestom pojavljivanju drugog korijena iz broja dva (tj. $\sqrt{2}$) u izrazima za udaljenost nekih točaka koje su pridružene pravilnom sedmerokutu jednostavnim geometrijskim konstrukcijama.

Započinjemo sa tehničkom lemom koja će se koristiti u prvom dokazu prvog teorema. Ta lema tvrdi da kosinus kuta $\frac{\pi}{7}$ poništava jednostavan polinom trećeg stupnja.

Lema 1. *Neka je* $\vartheta = \frac{\pi}{7}$. *Onda je* $4\cos^2\vartheta + 4\cos\vartheta - 8\cos^3\vartheta = 1$.

Dokaz. Iz relacije $\sin x = \sin(\pi - x)$ koja vrijedi za bilo koji x kada je $x = 3\vartheta$ dobivamo $\sin 3\vartheta = \sin 4\vartheta$. Razvijemo li lijevu stranu koristeći relacije

$$\sin 3\vartheta = \sin(\vartheta + 2\vartheta) = \sin\vartheta\,\cos 2\vartheta + \cos\vartheta \sin 2\vartheta$$

i $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$ dobiti ćemo jednakost

$$\sin 3\vartheta = (\cos 2\vartheta + 2\cos^2\vartheta)\sin\vartheta,$$

dok je desna strana jednaka

$$\sin 4\vartheta = 2\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta = 4\sin\vartheta\cos\vartheta\cos 2\vartheta.$$

Podijelimo li obje strane sa $\sin\vartheta$ i koristimo li

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$$

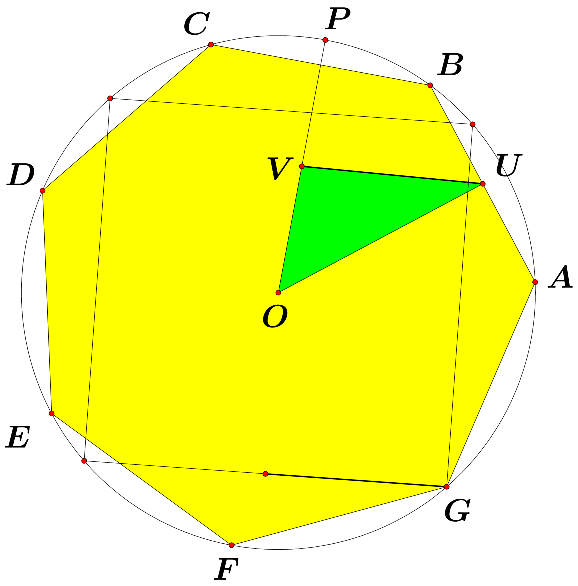
dobiti ćemo željenu relaciju $4\cos^2\vartheta - 1 = 4\cos\vartheta(2\cos^2\vartheta - 1)$. □

Teorem 1. *Neka je $ABCDEFG$ pravilni sedmerokut upisan u kružnicu k polumjera R sa središtem u točki O. Ako je P polovište kraćeg luka BC a U i V su polovišta dužina AB i OP onda je $|UV| = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Drugim riječima, $|UV|$ je polovica duljine stranice kvadrata upisanog u kružnicu k.*

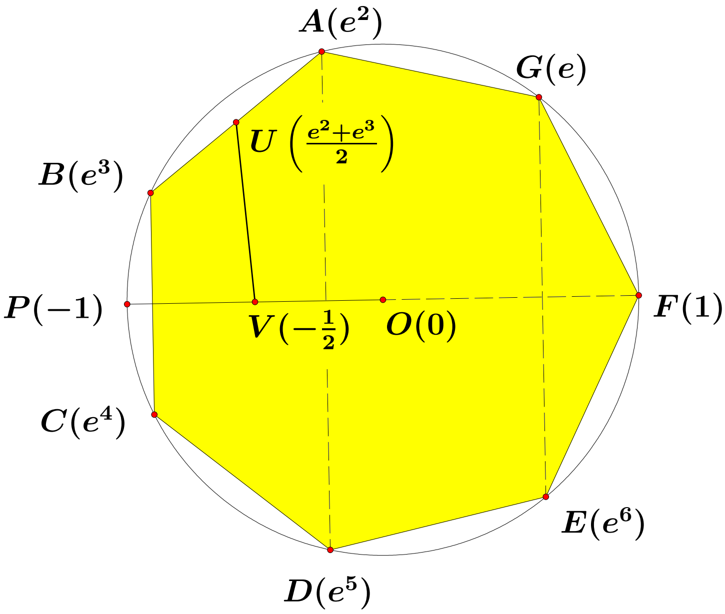
Prvi dokaz. U trokutu $\triangle OUV$ je $\sphericalangle UOV = 2\vartheta$, $|OU| = R\cos\vartheta$, i $|OV| = \frac{R}{2}$, pa po kosinusovom teoremu vrijedi

$$|UV|^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R\cos\vartheta)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)(R\cos\vartheta)\cos 2\vartheta =$$
$$\frac{R^2}{4}(1 + 4\cos^2\vartheta - 4\cos\vartheta(2\cos^2\vartheta - 1)) = \frac{R^2}{2}.$$

Ovdje smo iskoristili Lemu 1 da zaključimo da je zagrada u drugom redu jednaka 2. □



Slika 2: Dužina UV koja spaja polovišta dužina OP i AB jednaka je polovici stranice upisanog kvadrata.

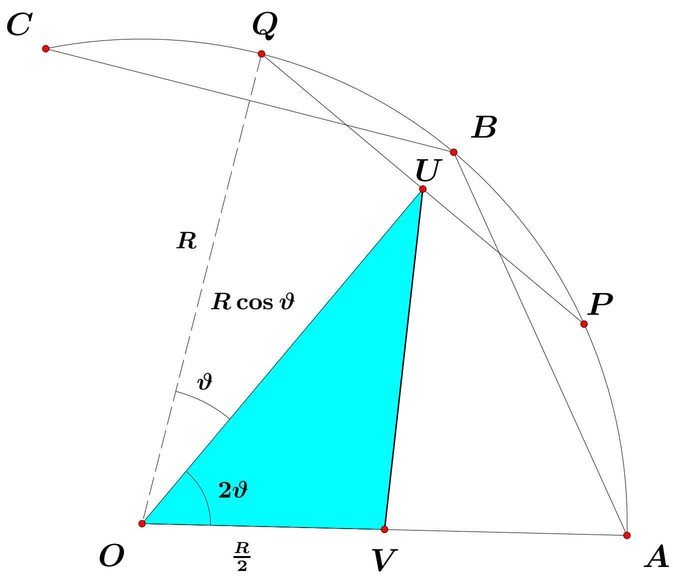


Slika 3: Odabir kompleksnih koordinata točaka u drugom dokazu Teorema 1.

Drugi dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $R = 1$ i da vrhovi F, G, A, B, C, D, i E odgovaraju sedmim korijenima 1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, i e^6 jedinice. Tada će točke O, P, U, i V biti u kompleksnim brojevima 0, -1, $\frac{e^2+e^3}{2}$, i $-\frac{1}{2}$. Zato je

$$|UV|^2 = (U-V)\overline{(U-V)} = (U-V)(\overline{U}-\overline{V}) =$$
$$\left(\frac{e^2+e^3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^5+e^4}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2+1+e+e^2+\cdots+e^6}{4} = \frac{1}{2}$$

budući da je $1+e+e^2+\cdots+e^6 = 0$. $\square$

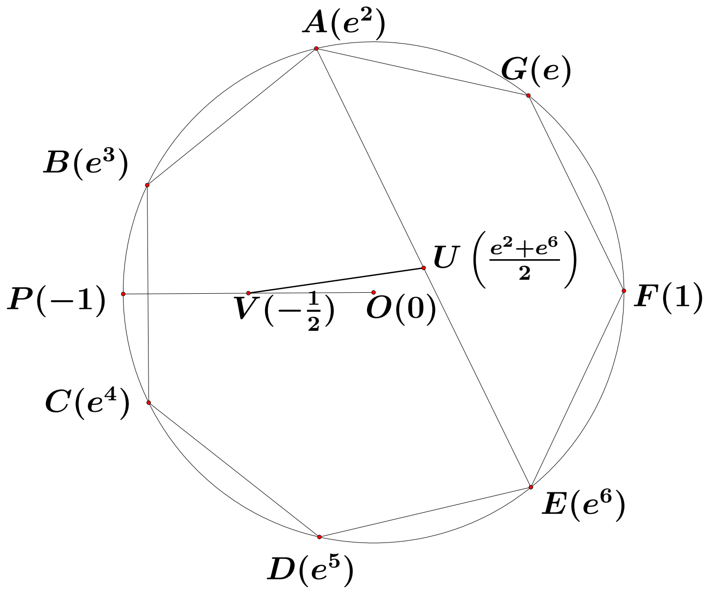


Slika 4: Trokut OUV u Teoremu 2 je kongruentan istom trokutu u Teoremu 1.

Teorem 2. *Neka je $ABCDEFG$ pravilni sedmerokut upisan kružnici radijusa R i središta O. Ako su P i Q polovišta kraćih lukova AB i BC a U i V su polovišta dužina PQ i OA, onda je $|UV| = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.*

Dokaz. Na Slici 4 se jasno vidi da možemo opet primjeniti metodu iz prvog dokaza Teorema 1. $\square$

Teorem 3. *Neka je $ABCDEFG$ pravilni sedmerokut upisan u kružnicu radijusa R i središtem O. Ako je P polovište kraćeg luka BC a U i V su polovišta dužina AE i OP, onda je $|UV| = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.*



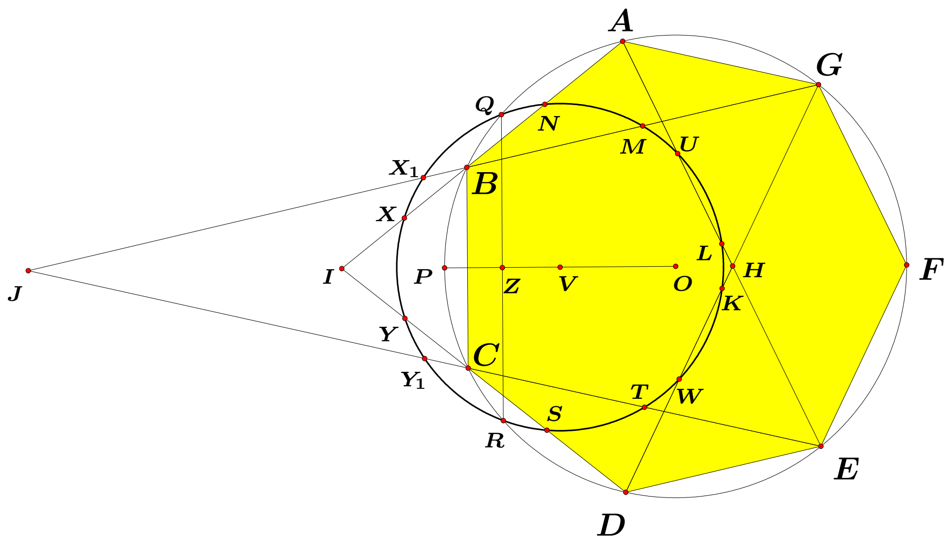
Slika 5: Odabir kompleksnih brojeva za točke iz dokaza Teorema 3.

Dokaz. Načinimo li iste pretpostavke kao i u drugom dokazu Teorema 1 dobiti ćemo $|UV|^2 = (U-V)\overline{(U-V)} = (U-V)(\overline{U}-\overline{V}) = \left(\frac{e^2+e^6}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^5+e}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2+1+e+e^2+\cdots+e^6}{4} = \frac{1}{2}$. (Vidi Sliku 5). □

Slijedeći rezultat sadrži Teoreme 1 i 3 kao specijalne slučajeve i otkriva kružnicu koja prolazi polovištima mnogih dužina pridruženih pravilnom sedmerokutu.

Teorem 4. *Neka je $ABCDEFG$ pravilni sedmerokut upisan kružnici k radijusa R i središtem O. Neka su $H = AE \cap DG$, $I = AB \cap CD$, and $J = BG \cap CE$. Ako je P polovište kraćeg luka BC a V je polovište dužine OP onda polovišta dužina AB, CD, BI, CI, BG, AE, DG, AH, DH, CE, EJ, i GJ sva leže na kružnici m sa središtem u točki V i radijusom $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. Spojnica presjeka kružnica k i m je okomita simetrala dužine PV.*

Dokaz. Neka ponovo vrijede pretpostavke drugog dokaza Teorema 1. Jednadžba kružnice m je $4\,z\,\bar{z} + 2\,z + 2\,\bar{z} - 1 = 0$. Metoda dokaza je da nađemo kompleksne koordinate svake točke i da se provjeri da one zadovoljavaju tu jednadžbu. Naprimjer, da bi smo provjerili da točka X (polovište dužine koja spaja vrh B sa presjekom I pravaca AB



Slika 6: Kružnica kroz mnoga polovišta.

i CD), prvo odredimo jednadžbe pravaca AB i CD pa onda rješavanjem tih dviju linearnih jednadžbi po z i $\bar{z}$ nađemo da je njihov presjek točka $I = \frac{(e+1)e^4}{e^2+1}$ dok je $X = \frac{e^3\left(2\,e^2+e+1\right)}{2(e^2+1)}$. Budući da se izraz $4\,X\,\bar{X} + 2\,X + 2\,\bar{X} - 1$ faktorira kao kvocijent

$$\frac{(2\,e^5 + e^4 + 3\,e^3 - 2\,e^2 + e - 1)\,(e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1)}{\left(e^2+1\right)^2},$$

zaključujemo da je točka X doista na kružnici m.

Zadnja tvrdnja je istinita zato jer se kružnice m i k (čija jednadžba je $z\,\bar{z} = 1$) sijeku u točkama $Q = -\frac{3}{4} + i\,\frac{\sqrt{7}}{4}$ i $R = -\frac{3}{4} - i\,\frac{\sqrt{7}}{4}$ i broj $-\frac{3}{4}$ je polovica od -1 i $-\frac{1}{2}$. $\square$

Sve slike u ovom članku nacrtane su u programu The Geometer's Sketchpad koji se može koristiti i za približnu provjeru tvrdnji ali i za otkrivanje novih spoznaja o svojstvima pravilnih sedmerokuta.

Gornji matematički korektni dokazi ostvareni su na računalu u programu MAPLE V (verzija 8). Za prva tri teorema to baš i nije potrebno jer se sve provjere mogu lagano izvesti i pješke. Za posljednji teorem se to može samo uvjetno tvrditi (tj. bez upotrebe računala prikazani dokaz ima nekoliko težih stepenica). Zato ću sada opisati kako se dokaz Teorema 4 izvodi na računalu.

Prvo zadamo točke kao uređeni par $[p,\, q]$ kompleksnog broja p i njegovog konjugiranog q. Broj e je sedmi korijen iz jedinice. Dakle, vrijedi

$$e^7 - 1 = 0$$

Budući da je

$$e^7 - 1 = (e-1)\,(e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1)$$

za

$$e \neq 1$$

(što je očito dio naših pretpostavki) vrijedi

$$e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1 = 0.$$

```
> hF:=[1,1]:hG:=[e,e^6]:hA:=[e^2,e^5]:
> hB:=[e^3,e^4]:hC:=[e^4,e^3]:hD:=[e^5,e^2]:
> hE:=[e^6,e]:hP:=[-1,-1]:hV:=[-1/2,-1/2]:
```

Skraćenicu FS koristimo kada želimo maksimalno pojednostaviti i faktorirati neki izraz. Zadana je kao funkcija.

```
> FS:=x->factor(simplify(x)):
```

Slijedeća procedura (ili funkcija) određuje kvadrat udaljenosti dvije točke. Oznake za te točke su a i x. Slova b, c, y, i z su lokalne varijable a zapravo su prva i druga koordinata zadanih točaka. Sama udaljenost je produkt razlike $b - y$ i njemu konjugiranog broja $c - z$.

```
> kud2t:=proc(a,x)
> local b,c,y,z;
> b:=a[1]:c:=a[2]:y:=x[1]:z:=x[2]:
> FS((b-y)*(c-z)):end:
```

Pravac određen sa dvije točke programiran je kao funkcija **pravac2t** a promatra se kao trojka $[u, v, w]$ kompleksnih brojeva koji su zapravo koeficijenti njegove linearne jednadžbe

$$u\,z + v\,\overline{z} + w = 0.$$

```
> pravac2t:=proc(m,n)
> local a,b,c,x,y,z;
> a:=m[1]:b:=m[2]:x:=n[1]:y:=n[2]:
> FS([b-y, x-a, a*y-b*x]):end:
```

Da su koeficijenti u, v, i w doista $b - y$, $x - a$, i $ay - bx$ lagano se otkriva tako da se uvrste koordinate točaka m i n i riješi po u i v.

```
> solve({u*a+v*b+w,u*x+v*y+w},{u,v});
```

$$\{u = -\frac{w\,(y-b)}{-x\,b + a\,y},\; v = -\frac{w\,(-x+a)}{-x\,b + a\,y}\}$$

Uvrstimo li to u gornju jednadžbu pravca, pomnožimo sa $ay - xb$ i podijelimo sa w dobijemo traženi oblik. Diskusiju o slučajevima kada su neki izrazi nula prepuštamo čitatelju.

Na sličan način se izvodi i slijedeća važna funkcija koja traži presjek dva pravca. Ako primjenom te funkcije dobijemo grešku

```
Error, numeric exception: division by zero
```

to znači da je $ay - xb = 0$ pa su promatrani pravci paralelni (kada nemaju presjeka).

```
> presjek2p:=proc(m,n)
> local a,b,c,x,y,z;
> a:=m[1]:b:=m[2]:c:=m[3]:x:=n[1]:y:=n[2]:z:=n[3]:
> FS([(b*z-c*y)/(a*y-b*x),(c*x-a*z)/(a*y-b*x)]):end:
```

Ovaj pripremni dio završavamo jednostavnom funkcijom koja daje polovište dužine kojoj su krajevi dvije zadane točke.

```
> poloviste2t:=proc(m,n)
> local a,b,c,x,y,z;
> a:=m[1]:b:=m[2]:x:=n[1]:y:=n[2]:
> FS([1/2*a+1/2*x, 1/2*b+1/2*y]):end:
```

Točke I, H, i N sada dobivamo ovako:

```
> hI:=presjek2p(pravac2t(hA,hB),pravac2t(hC,hD));
> hX:=poloviste2t(hI,hB); hN:=poloviste2t(hB,hA);
```

$$hI := [\frac{(e+1)\,e^4}{e^2+1},\ \frac{(e+1)\,e^4}{e^2+1}]$$

$$hX := [\frac{e^3\,(2\,e^2+e+1)}{2\,(e^2+1)},\ \frac{e^4\,(e+2+e^2)}{2\,(e^2+1)}]$$

$$hN := [\frac{e^2\,(e+1)}{2},\ \frac{(e+1)\,e^4}{2}]$$

Kružnica m je zapravo geometrijsko mjesto točaka kojima je kvadrat udaljenosti do točke V jednak jednoj polovini. Slijedeća funkcija točki pridružuje razliku kvadrata njene udaljenosti od V i jedne polovine. Točka će ležati na kružnici m ako se ta funkcija u toj točki poništava (tj. u njoj ima vrijednost nula).

```
> hm:=x->FS(kud2t(x,hV)-1/2):
```

Provjeravamo kakva je funkcija hm u točkama X i N.

```
> hm(hX);hm(hN);
```

$$\frac{(2\,e^5+e^4+3\,e^3-2\,e^2+e-1)\,(e^6+e^5+e^4+e^3+e^2+e+1)}{4\,(e^2+1)^2}$$

$$\frac{(e^2+e-1)\,(e^6+e^5+e^4+e^3+e^2+e+1)}{4}$$

Budući da smo dobili izraze koji sadrže

$$e^6 + e^5 + e^4 + e^3 + e^2 + e + 1$$

kao faktor (a taj izraz je jednak nuli) slijedi traženi zaključak da točke X i N leže na kružnici m.

Napomena. Nekim čitateljima će se možda učiniti da smo za dokaz Teorema 4 na računalu trebali dvije stranice teksta i mnogo tipkanja. To je samo djelomično točno jer gotovo sve funkcije koje smo definirali (poput **FS**, **kud2t**, **pravac2t**, **presjek2p**) su dio standardnih funkcija analitičke geometrije ravnine pa ih (samo jednom u cijelom životu) vjerovatno već imamo ranije definirane. Zato dokaz traži jedino zadavanje točaka, određivanje točaka I, H, i N, definiciju funkcije hm, i izračunavanje vrijednosti $hm(X)$ i $hm(N)$.

Napomena. Ovaj članak već je objavljen u časopisu PlayMath učenika V. Gimnazije u Zagrebu za matematiku i informatiku (vidi [2]). Budući da je sadržaj članka interesantan svima koje zanima mogućnost korištenja računala u istraživanjima i nastavi matematike odlučio sam ga ponuditi i čitateljima Poučka.

Reference

[1] Leon Bankoff and Jack Garfunkel, *The heptagonal triangle*, Mathematics Magazine, **46** (1973), 163–187.

[2] Zvonko Čerin, *Geometrija pravilnog sedmerokuta*, PlayMath 2 (2003), 22–28.

Kopernikova 7, 10010 Zagreb, CROATIA, Europe
E-mail address: cerin@math.hr