JOŠ ŠEST ZADATAKA RIJEŠENIH PROGRAMOM MAPLE V

ZVONKO ČERIN, ZAGREB

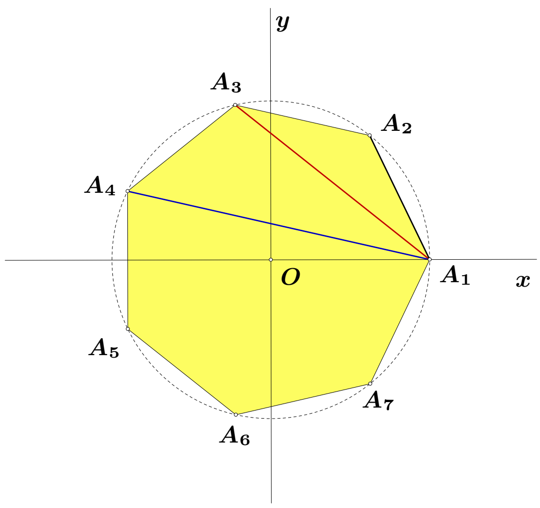
SAŽETAK. U ovom drugom nastavku članka *Analitička geometrija ravnine računalom* od M. Bator, Z. Čerina i M. Ćulav u MFL-u iz jeseni 2003. godine detaljno se opisuju rješenja još šest zadataka iz zbirke za prvi razred gimnazije u programu Maple V.

U članku [1] opisano je kako se na računalu u programu Maple V uvodi analitička geometrija ravnine. Kao ilustraciju primjene tog načina rješavanja zadataka tamo smo dali samo tri primjera iz zbirke [5]. U prvom nastavku tog članka u prošlom broju MFL-a [2] opisao sam još šest primjera a sada dodajem još šest koje ponovo biram iz spomenute zbirke za prvi razred gimnazije. Nadamo se da će vas svi ovi primjeri potaknuti da i sami započnete rješavati zadatke na računalu.

Nastavljamo s rješavanjem zadatka 1026 opet iz zbirke [5].

Zadatak 1. Dokaži da u pravilnom sedmerokutu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ vrijedi:

$$\frac{1}{|A_1A_2|} = \frac{1}{|A_1A_3|} + \frac{1}{|A_1A_4|}.$$



SLIKA 1. U pravilnom sedmerokutu vrijedi: $\frac{1}{|A_1A_2|} = \frac{1}{|A_1A_3|} + \frac{1}{|A_1A_4|}$.

Rješenje. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da kružnica k sa središtem u ishodištu i radijusom R bude opisana promatranom pravilnom sedmerokutu. Možemo pretpostaviti da vrh A_1 ima koordinate $(R, 0)$. Preostali, za nas značajni, vrhovi imaju koordinate $A_2\left(R\cos\frac{2\pi}{7},\, R\sin\frac{2\pi}{7}\right)$, $A_3\left(R\cos\frac{4\pi}{7},\, R\sin\frac{4\pi}{7}\right)$, $A_4\left(R\cos\frac{6\pi}{7},\, R\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

Zadajmo u programu Maple V te točke:

```
tA1:=[R,0]; T:=2*Pi/7:  tA2:=[R*cos(T), R*sin(T)]; tA3:=
[R*cos(2*T), R*sin(2*T)]; tA4:=[R*cos(3*T), R*sin(3*T)];
```

Da bismo provjerili relaciju među recipročnim vrijednostima utipkamo u program Maple V sljedeće:

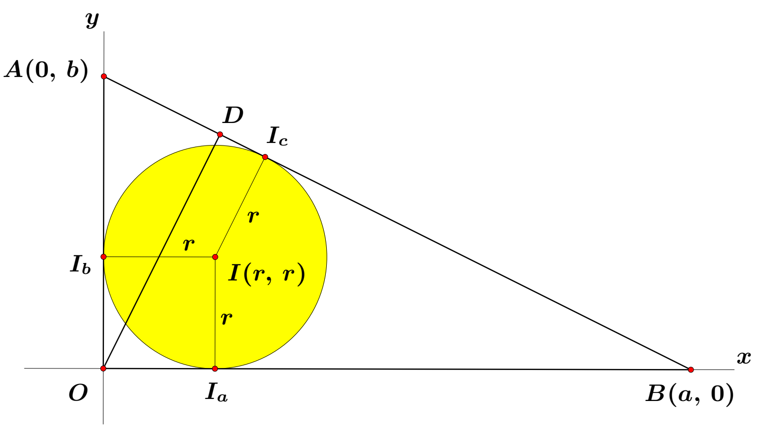
```
assume(R>0):  FS(numer(1/udaljenost2t(tA1,tA2)
-1/udaljenost2t(tA1,tA3)-1/udaljenost2t(tA1,tA4)));
```

Za nekoliko sekundi računalo će nas izvijestiti da je vrijednost jednaka nuli što dokazuje da tvrdnja zadatka vrijedi. □

Napomena 1. Neka druga interesantna svojstva pravilnih sedmerokuta dokazana u programu Maple V mogu se naći u autorovom članku [4] (vidi također [3]).

Sljedeći je zadatak 1084 iz zbirke [5].

Zadatak 2. Projekcije kateta pravokutnog trokuta na hipotenuzu imaju duljine $\frac{18}{5}$, $\frac{32}{5}$. Koliki je radijus kružnice upisane u taj trokut?



SLIKA 2. Projekcije $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ kateta su zadane, a traži se radijus r upisane kružnice.

Rješenje. Smjestimo pravokutni koordinatni sustav tako da je njegovo ishodište vrh promatranog pravokutnog trokuta, a katete mu leže na koordinatnim osima. Možemo pretpostaviti da preostali vrhovi A i B ima koordinate $(0, b)$ i $(a, 0)$, za neke pozitivne realne brojeve a i b.

U programu Maple V te točke zadajemo ovako:

```
tO:=[0, 0]; tA:=[0, b]; tB:=[a, 0];
```

Sada nađemo projekciju D vrha O na hipotenuzu AB.

```
tD:=projekcija(tO, pravac2t(tA, tB));
```

Vrijednosti parametara a i b možemo odrediti iz informacije da je $|AD| = \frac{18}{5}$ i $|BD| = \frac{32}{5}$.

```
solve({udaljenost2t(tA,tD)=18/5,
       udaljenost2t(tB,tD)=32/5},{a, b});
```

Ima čak osam rješenja (četiri realna i četiri kompleksna) ali samo jedno $a = 8$ i $b = 6$ nam odgovara. Dakle, promatrani pravokutni trokut ima stranice 8, 6, 10 (koje su dvostruko dulje od standardnog pravokutnog trokuta 4, 3, 5) pa mu upisana kružnica ima radijus $r = 2$.

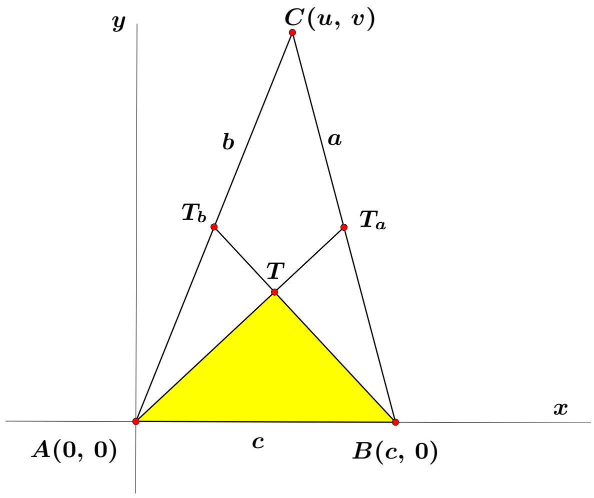
To možemo vidjeti i tako da tražimo da središte I upisane kružnice s koordinatama (r, r) bude za r udaljeno od pravca AB.

```
a:=8:  b:=6:  tI:=[r, r]:  solve(udaljenost2t(tI,
  projekcija(tI, pravac2t(tA, tB)))=r, r);
```

Od dva rješenja $r = 2$ i $r = 12$ jedino prvo zadovoljava uvjete zadatka. □

Sada razmatramo zadatak 1103 iz zbirke [5].

Zadatak 3. Dvije stranice trokuta imaju duljinu 6 cm i 8 cm. Težišnice tih stranica sijeku se pod pravim kutem. Odredi treću stranicu trokuta.



SLIKA 3. Poznate su stranice a i b i težišnice $\overline{AT_a}$ i $\overline{BT_b}$ su okomite, a traži se stranica c.

Rješenje. Neka trokut ABC bude smješten u pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ i $C(u, v)$ za neke pozitivne realne brojeve c i v i za neki realni broj u.

U programu Maple V te točke i težište T zadajemo ovako:

```
tA:=[0,0]; tB:=[c,0]; tC:=[u,v]; tT:=teziste(tA,tB,tC);
```

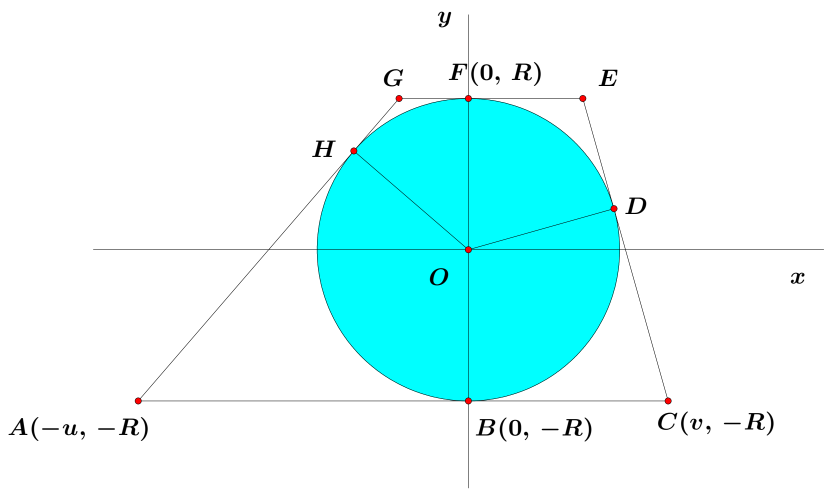
Budući da su težišnice iz vrhova A i B okomite, trokut ABT je pravokutan pa vrijedi $c^2 = |AB|^2 = |AT|^2 + |BT|^2$. S druge strane imamo $|BC| = 6$ i $|AC| = 8$. Zatražimo li od programa Maple V da riješi taj sustav od tri jednadžbe u nepoznanicama c, u, i v unosom

```
solve({udaljenost2t(tB,tC)=6, udaljenost2t(tA,tC)=8,
c^2=udaljenost2t(tA,tT)^2+udaljenost2t(tB,tT)^2},{c, u, v});
```

on će ponuditi dva rješenja od kojih samo $c = 2\sqrt{5}$ cm odgovara. □

Naš sljedeći primjer je zadatak 1112 iz [5].

Zadatak 4. U trapez je upisan krug. Dokaži da je omjer površina trapeza i kruga jednak omjeru njihovih opsega.



SLIKA 4. Omjeri površina i opsega kruga i njemu opisanog trapeza su isti.

Rješenje. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da kružnica k radijusa R koja je upisana promatranom trapezu $ACEG$ ima središte u ishodištu a njegove paralelne stranice $\overline{AC}$ i $\overline{EG}$ dodiruju k u točkama $B(0, -R)$ i $F(0, R)$. Neka vrhovi A i C imaju koordinate $(-u, -R)$ i $(v, -R)$ za pozitivne realne brojeve u i v. Neka krakovi $\overline{CE}$ i $\overline{AG}$ dodiruju k u točkama D i H. Naš prvi cilj je odrediti koordinate tih dodirišta, a zatim koordinate vrhova E i G.

Zadajmo u programu Maple V prvo točke O, B, F, A, C i pravce AC, EG.

```
tO:=[0, 0]:  tB:=[0, -R]: tF:=[0, R]: tA:=[-u, -R]:
tC:=[v, -R]: pAC:=[0, 1, R]: pEG:=[0, 1, -R]:
```

Pretpostavimo da dodirište H ima koordinate (p, q). One moraju zadovoljavati dva uvjeta. Prvi je $p^2 + q^2 = R^2$ tj. da H leži na kružnici k.

Drugi uvjet je da je udaljenost od A do H jednaka u jer su pravci AB i AH dvije tangente iz točke A na kružnicu k.

```
H:=solve({p^2+q^2=R^2, udaljenost2t([p, q],tA)=u}, {p, q}):
tH:=subs(H, [p, q]):
```

Slično se dobivaju i koordinate dodirišta D.

```
K:=solve({p^2+q^2=R^2, udaljenost2t([p, q],tB)=v}, {p, q}):
tD:=subs(K, [p, q]):
```

Vrhovi E i G su presjeci pravca EG s pravcima CD i AH.

```
pAH:=pravac2t(tA, tH): pCD:=pravac2t(tC, tD):
tE:=presjek2p(pEG, pCD); tG:=presjek2p(pEG, pAH);
```

Prve koordinate točaka E i G su $\frac{R^2}{v}$ i $-\frac{R^2}{u}$. Zato je opseg O_{ACEG} trapeza $ACEG$ jednak $2(u+v+\frac{R^2}{u}+\frac{R^2}{v})$. Njegova površina P_{ACEG} je

```
povrsina3t(tA, tC, tE)+povrsina3t(tA, tE, tG);
```

jednaka $\frac{R(u+v)(u\,v+R^2)}{u\,v}$. Sada se lagano provjeri da je

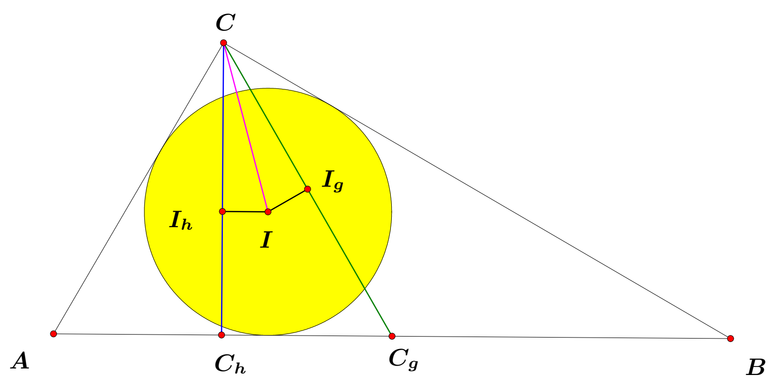
$$\frac{O_{ACEG}}{2\,R\,\pi} = \frac{P_{ACEG}}{R^2\,\pi}.$$

□

Napomena 2. U zbirci [5] nema rješenja za zadatak 1112.

Naš idući primjer je zadatak 1139 iz [5].

Zadatak 5. Dokaži, ako je pravac na kojemu leži simetrala kuta trokuta ujedno i simetrala kuta pravaca na kojima leže visina i težišnica povučene iz vrha tog kuta, onda je trokut pravokutan.



SLIKA 5. Trokut je ili jednakokračan ili pravokutan ako simetrala kuta raspolavlja kut između visine i težišnice.

Rješenje. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da su vrhovi točke $A(0,\,0)$, $B((f+g)r,\,0)$, $C\left(\frac{rg\left(f^2-1\right)}{fg-1},\,\frac{2fgr}{fg-1}\right)$, a središte upisane kružnice je točka $I(fr,\,r)$, gdje su f i g kotangensi od $\frac{A}{2}$ i $\frac{B}{2}$, a r je radijus upisane kružnice.

Zadajmo u programu Maple V prvo točke A, B, polovište C_g dužine $\overline{AB}$, točke C, I i nožište C_h visine iz vrha C na pravac AB.

```
tA:=[0, 0]:  tB:=[r*(f+g), 0]:  tCg:=poloviste(tA,tB):
tC:=[r*g*(f^2-1)/(f*g-1), 2*f*g*r/(f*g-1)]:
tI:=[f*r, r]:  tCh:=projekcija(tC,pravac2t(tA,tB)):
```

Da bi simetrala kuta C (tj. pravac CI) bio simetrala kuta određenog visinom (tj. pravcem CC_h) i težišnicom (tj. pravcem CC_g) nužno je i dovoljno da dužine $\overline{II_h}$ i $\overline{II_g}$ imaju istu duljinu, gdje su I_h i I_g projekcije točke I na pravce CC_h i CC_g.

```
tIh:=projekcija(tC,pravac2t(tC,tCh)):
tIg:=projekcija(tC,pravac2t(tC,tCg)):
IZ:=FS(udaljenost2t(tI,tIg)^2-udaljenost2t(tI,tIh)^2);
```

Program Maple V izvještava da je izraz IZ jednak

$$\frac{r^2\,(f-g)^2\,(fg+g+f-1)\,(fg-g-f-1)\,(fg+1)^2\,(fg-1)^{-2}}{(12\,f^2g^2+g^2f^4-2\,f^3g^3+g^4f^2+2\,f^3g+2\,fg^3+f^2-2\,fg+g^2)}.$$

Dakle, on će biti nula onda i samo onda ako je $f=g$ (tj. $|BC|=|CA|$ pa je trokut ABC jednakokračan) ili je

$$(fg+g+f-1)(fg-g-f-1)=0$$

što je upravo uvjet da pravci BC i CA budu okomiti (tj. da je kut C pravi, pa je trokut ABC pravokutan).

```
okomitiQ(pravac2t(tB, tC),pravac2t(tC, tA));
```

□

Napomena 3. U [5] ne spominje se mogućnost da trokut ABC bude jednakokračan.

Naš posljednji primjer je zadatak 1152 iz [5].

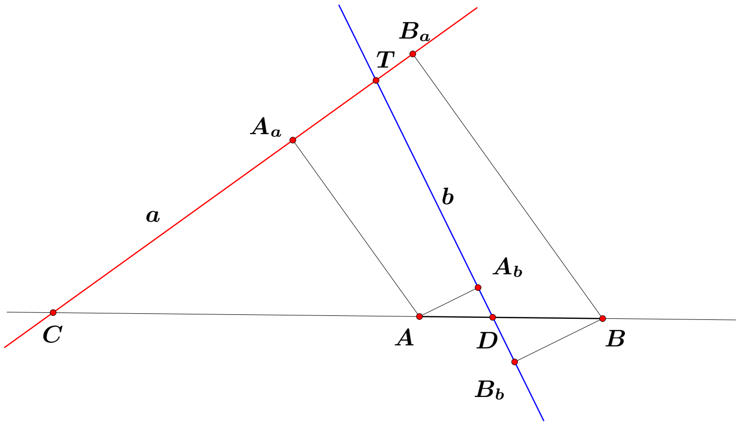
Zadatak 6. Zadane su točke A i B i točka T koja ne leži na pravcu AB. Točkom T povuci pravac m tako da je omjer udaljenosti točaka A i B od m jednak $2:3$.

Rješenje. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0,\,0)$, $B(c,\,0)$ i $T(p,\,q)$. Neka pravac m ima jednadžbu $u\,x+v\,y+w=0$. Da bi on prolazio točkom T mora biti $w=-u\,p-v\,q$.

Zadajmo u programu Maple V točke A, B, T i pravac m.

```
tA:=[0,0]:  tB:=[c,0]:  tT:=[p,q]:  pm:=[u,v,-u*p-v*q]:
```

Neka su A_m i B_m projekcije točaka A i B na pravac m.



Slika 6. Postoje dva pravca a i b točkom T za koje su omjeri udaljenosti točaka A i B do njih jednaki $\frac{2}{3}$.

```
tAm:=projekcija(tA, pm):  tBm:=projekcija(tB, pm):
```

Prema uvjetu zadatka mora biti $\frac{|AA_m|}{|BB_m|} = \frac{2}{3}$. Primijetimo da izraz

```
IZ:=FS(udaljenost2t(tA,tAm)^2/udaljenost2t(tB,tBm)^2-4/9);
```

ima za brojnik produkt $(5\,up + 5\,vq - 2\,uc)\,(up + vq + 2\,uc)$. Dakle, imamo dvije mogućnosti $q = \frac{-u(2c+p)}{q}$ i $q = \frac{u(2c-5p)}{q}$. Tako dobivamo dva rješenja, pravce $q\,x - (2c+p)y + 2qc = 0$ i $5q\,x + (2c-5p)y - 2qc = 0$. Iako znamo rješenja preostaje pitanje kako te pravce lakše odrediti. Ali, vidimo da oni sijeku pravac AB u točkama s koordinatama $C(-2c,\,0)$ i $D(\frac{2}{5}c,\,0)$ koje je lagano konstruirati. □

Napomena 4. U zbirci [5] nema rješenja za zadatak 1152. U izradi nekih rješenja zadataka u ovom članku i u [2] sudjelovale su Maja Bator i Milena Ćulav, studentice Matematičkog odjela PMF-a.

Reference

[1] M. Bator, Z. Čerin i M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list, (prijavljeno).
[2] Zvonko Čerin, *Šest zadataka riješenih programom Maple V*, Matematičko-fizički list, (prijavljeno).
[3] Zvonko Čerin, *Geometrija pravilnog sedmerokuta*, PlayMath, časopis učenika III F razreda V. gimnazije u Zagrebu, (prijavljeno).
[4] Zvonko Čerin, *Geometrija pravilnog sedmerokuta*, Poučak, (prijavljeno).
[5] Boris Pavković i Darko Veljan, *Matematika 1 – Zbirka zadataka s uputama i rješenjima za prvi razred srednjih škola (14. dopunjenjo izdanje)*, Školska knjiga, Zagreb, 1999.

Kopernikova 7, 10020 Zagreb, Hrvatska, Europa
E-mail address: cerin@math.hr