ŠKOLSKA ZADAĆA

ZVONKO ČERIN

SAŽETAK. Na primjeru jedne tipične školske zadaće na zagrebačkoj gimnaziji pokazati ćemo kako je ona pretjerano teška ako se riješava tradicionalnim načinom a postaje primjerenom ako se riješava uz pomoć računala.

U trećem razredu jedne od najboljih zagrebačkih gimnazija nedavno je dana slijedeća:

ŠKOLSKA ZADAĆA

Zadatak 1. Odredi koordinate vrhova paralelograma $ABCD$, ako je točka $S(2,\ 1)$ njegovo središte, a pravci na kojima leže stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ redom prolaze točkama $P(-6,\ -4)$, $Q(3,\ -9)$, $R(10,\ 6)$, $T(-2,\ -10)$.

Zadatak 2. Jedan vrh trokuta je u točki $A(2,\ -4)$, a na pravcima $x + y - 2 = 0$ i $x - 3\,y - 6 = 0$ leže simetrale unutrašnjih kuteva tog trokuta. Odredi jednadžbe pravaca na kojima leže stranice trokuta.

Zadatak 3. Zadani su pravci $x - 2\,y + 4 = 0$ i $3\,x - y - 3 = 0$ i točka $T(5,\ 6)$. Kako glasi jednadžba pravca p, koji prolazi točkom T, tako da je T polovište odsječka kojeg od p odsjecaju zadani pravci.

Zadatak 4. Odredi jednadžbe tangenata iz točke $T(7,\ -3)$ na kružnicu kojoj je središte u ishodištu, a radijus $r = \sqrt{29}$.

Mi ćemo sada prvo opisati rješenja tih zadataka tradicionalnim načinom i pri tome ćemo se truditi opisati sve korake i koračiće i teorijsko znanje i predznanje potrebno za uspješno rješavanje ta četiri zadatka.

RJEŠENJA TRADICIONALNIM NAČINOM

1. Rješenje Zadatka 1

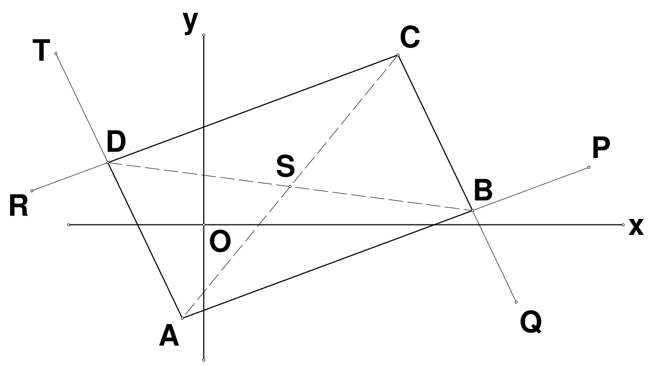
Rješenje Zadatka 1. Prije samog rješavanja primijetimo da degenerirani paralelogram gdje je $A = B = C = D = S$ zadovoljava sve zahtjeve pa u tekstu Zadatka 1 treba ubaciti riječ nedegeneriranog ispred riječi paralelograma.

Kao prvo moramo se prisjetiti da je paralelogram četverokut u ravnini koji ima paralelne i jednake nasuprotne stranice i da je njegovo središte presjek njegovih dijagonala i da to središte obje dijagonale raspolavlja.

Zatim bi trebalo dosadnim i upornim inzistiranjem i ponavljanjem usaditi kod učenika da za svaki (pogotovo geometrijski) zadatak nacrta grubu skicu situacije koja bi mu trebala pomoći da lakše prepozna i dovoljno dugo pamti što je zadano i što se uopće traži od njega.

Ovdje se sada pojavljuje i mala (?) opasnost da učenik prvo točno nacrta pet zadanih točaka (s mnogo opasnih minusa!) i onda pokuša namjestiti tražene vrhove tako da su ispunjeni uvjeti opisani u tekstu zadatka (da pravci na kojima leže stranice traženog paralelograma redom prolaze danim točkama). To sve je relativno teško i može oduzeti mnogo vremena a sigurno je dio automatizma koji učenici pokupe kada se susretnu s analitičkom geometrijom.

Dakle, treba samo načiniti jako grubu skicu situacije gdje se prvo nacrta paralelogram pa mu se produže stranice i na tim produžetcima naznače dane točke P, Q, R, i T i još se presjek dijagonala označi sa S. Primjetimo da je ovdje načinjen neprirodan odabir slova jer nakom P, Q, i R dolazi S a ne T što može stvoriti zbrku i otežava razumijevanje zadatka.



Slika 1. Gruba skica Zadatka 1.

Naša prva slika prikazuje jednu takvu skicu. Kada sam je nacrtao uhvatio me strah da bi nakom svega profesor ili profesorica ipak mogli zaključiti da ona nije dobra jer sve točke na njoj nemaju ispravne koordinate. Takav strah sigurno posječuje i učenike.

Sada smo spremni prijeći na rješavanje Zadatka 1. Ideja nam se zasniva na činjenici da paralelni pravci imaju iste naklone (prema x-osi) i da znamo napisati jednadžbu $y - y_1 = k\,(x - x_1)$ pravca kroz danu točku $K(x_1,\, y_1)$ ako poznamo naklon k tog pravca. Prema tome, napisati ćemo primijenom toga jednadžbe pravaca AB, BC, CD, i DA koristeći dva za sada nepoznata koeficijenta smjera (naklona) v i w (prvi v za pravce AB i CD a drugi w za pravce BC i DA). Nakon toga ćemo odrediti presjeke tih pravaca da odredimo koordinate vrhova traženog paralelograma koje će biti izražene uz pomoć nepoznatih veličina v

i w. Njihove vrijednosti ćemo dobiti iz uvjeta da točka S (središte paralelograma) raspolavlja dužine AC i BD (dijagonale). I na kraju, tako određene vrijednosti za parametre v i w treba uvrstiti natrag u izraze za koordinate vrhova da bi se konačno odredile te koordinate kao konkretni brojevi i time riješio zadatak. A bilo bi dobro kada bi smo poslije svega još i provjerili da li smo dobro radili.

Pred nama je mnogo posla pa odmah krenimo.

$$AB \ldots\ldots y+4 = v\,(x+6) \quad \text{ili} \quad y = v\,x + 6\,v - 4.$$

Koliko učenika će ovdje pogriješiti u pravilu $y-(-4) = y+4$ i $x-(-6)$ $= x+6$ i koliko njih neće ostaviti oblik $y = \ldots$ koji je pogodan za kasnije određivanje presjeka već će misliti da treba napisati standardni oblik $v\,x - y + 6\,v - 4 = 0$?

$$BC \ldots\ldots y+9 = w\,(x-3) \quad \text{ili} \quad y = w\,x - 3\,w - 9.$$

$$CD \ldots\ldots y-6 = v\,(x-10) \quad \text{ili} \quad y = v\,x - 10\,v + 6.$$

$$DA \ldots\ldots y+10 = w\,(x+2) \quad \text{ili} \quad y = w\,x + 2\,w - 10.$$

Sada je na redu određivanje presjeka tih pravaca to jest koordinata vrhova traženog paralelograma. Ovdje moramo znati da u tom presjeku pravaca pripadne vrijednosti od y su iste pa se apcise presjeka dobiju izjednačavanjem desnih strana odgovarajućih parova gornjih jednadžbi.

$$A = AB \cap DA \ldots\ldots v\,x + 6\,v - 4 = w\,x + 2\,w - 10 \quad \text{ili}$$
$$(v-w)\,x = 2\,w - 6\,v - 6 \quad \text{tj.} \quad x_A = \frac{2\,w - 6\,v - 6}{v-w} \quad \text{za} \quad v - w \neq 0.$$

$$B = AB \cap BC \ldots\ldots v\,x + 6\,v - 4 = w\,x - 3\,w - 9 \quad \text{ili}$$
$$(v-w)\,x = -3\,w - 6\,v - 5 \quad \text{tj.} \quad x_B = \frac{-3\,w - 6\,v - 5}{v-w}.$$

$$C = CD \cap BC \ldots\ldots v\,x - 10\,v + 6 = w\,x - 3\,w - 9 \quad \text{ili}$$
$$(v-w)\,x = -3\,w + 10\,v - 15 \quad \text{tj.} \quad x_C = \frac{-3\,w + 10\,v - 15}{v-w}.$$

$$D = CD \cap DA \ldots\ldots v\,x - 10\,v + 6 = w\,x + 2\,w - 10 \quad \text{ili}$$
$$(v-w)\,x = 2\,w + 10\,v - 16 \quad \text{tj.} \quad x_D = \frac{2\,w + 10\,v - 16}{v-w}.$$

Sada je stigao trenutak da iskoristimo činjenicu da je točka S središte paralelograma $ABCD$ pa ta točka raspolavlja dužine AC i BD (dijagonale). Moramo znati da su koordinate $(x_0,\, y_0)$ polovišta K segmenta MN kome su krajevi točke $M(x_1,\, y_1)$ i $N(x_2,\, y_2)$ dane sa $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ i $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$. Primjenimo li to u našem zadatku dobivamo

$$2 = x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(\frac{2\,w - 6\,v - 6}{v - w} + \frac{-3\,w + 10\,v - 15}{v - w})$$

odnosno $4\,v - 4\,w = -w + 4\,v - 21$ ili $-3\,w = -21$ tj. $w = 7$. Ovdje se po prvi puta desilo nešto ugodno pa je v nestao iz uvjeta. S druge strane,

$$2 = x_S = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(\frac{-3\,w - 6\,v - 5}{v - w} + \frac{2\,w + 10\,v - 16}{v - w})$$

odnosno $4\,v - 4\,w = -w + 4\,v - 21$ ili $-3\,w = -21$ tj. $w = 7$ ponovo. Što je sad ovo? Dobili smo isti uvjet pa se čini da na ovaj način nemožemo odrediti koliki je v. Učenik je sada dobrano uzdrman i u panici iz koje može izači jedino ako vidi da zbog toga jer su nasuprotne strane paralelograma paralelne ako S raspolavlja AC ona će automatski raspolavljati BD pa se zahtjevima da S raspolavlja AC i BD ne dobivaju dva uvjeta već samo jedan.

Zbog toga je sada možda neophodno u igru ubaciti ordinate točaka. U desnu stranu jednadžbe pravca AB uvrstim x_A za x i stavim $w = 7$ što mi daje

$$y_A = v\,x_A + 6\,v - 4 = v\,\frac{14 - 6\,v - 6}{v - 7} + 6\,v - 4 = \frac{8\,v - 6\,v^2 + 6\,v^2 - 4\,v - 42\,v + 28}{v - 7} = \frac{-38\,v + 28}{v - 7}.$$

Slično je

$$y_C = w\,x_C - 3\,w - 9 = 7\,\frac{-21 + 10\,v - 15}{v - 7} - 30 = \frac{-7 \cdot 36 + 70\,v - 30\,v + 7 \cdot 30}{v - 7} = \frac{40\,v - 42}{v - 7}.$$

Sada imam analogno kao ranije

$$1 = y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(\frac{-38\,v + 28}{v - 7} + \frac{40\,v - 42}{v - 7})$$

odnosno $2\,v - 14 = 2\,v - 14$ što ne ovisi od v pa i na ovaj način nije moguće odrediti njegovu vrijednost. Kao još jedan pokušaj spasa bio bi pokušati iskoristiti relaciju $1 = y_S = \frac{1}{2}(y_B + y_D)$ no ponovo se dobiva $2\,v - 14 = 2\,v - 14$.

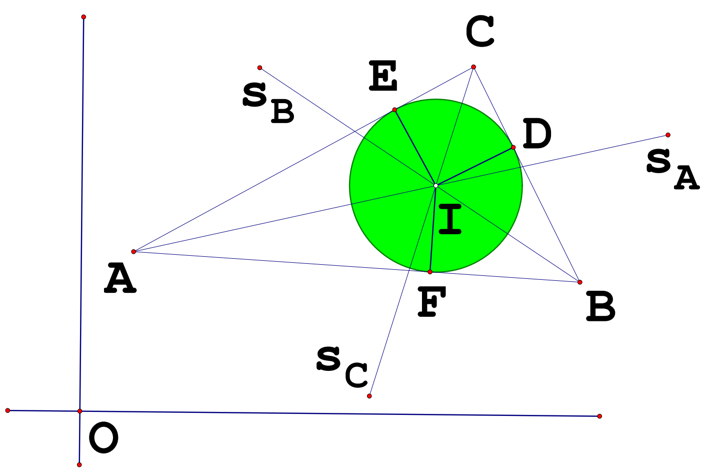
Što da se sada radi? Razmislimo li bolje nije se ni moglo postići da na taj način dobijemo još neki novi uvjet na v i w jer svaka od relacija

$x_S = \frac{x_A+x_C}{2}$, $x_S = \frac{x_B+x_D}{2}$, $y_S = \frac{y_A+y_C}{2}$, i $y_S = \frac{y_B+y_D}{2}$ povlači preostale. Tako konačno uviđamo da je naša intuicija kako bi morao postojati samo jedan paralelogram koji zadovoljava uvjete zadatka pogrešna i da u stvari postoji cijela familija takvih paralelograma. Njihovi vrhovi su dani izrazima $A(\frac{8-6\,v}{v-7}, \frac{28-38\,v}{v-7})$, $B(\frac{26+6\,v}{7-v}, \frac{28-72\,v}{v-7})$, $C(\frac{10\,v-36}{v-7}, \frac{40\,v-42}{v-7})$, i $D(\frac{10\,v-2}{v-7}, \frac{74\,v-42}{v-7})$ za bilo koji realan broj v različit od 7. Za $v = \frac{1}{5}$ (!?) dobije se četvorka $A(-1, -3)$, $B(4, -2)$, $C(5, 5)$, i $D(0, 4)$ koju autorica zadaće navodi kao rješenje.

Na kraju možemo rezimirati što nas je sve naučio ovaj zadatak. Prije svega da je on izuzetno težak pogotovo u uvjetima kada izgleda da ni sama profesorica nije svjesna kakav je pravi odgovor na postavljeno pitanje. Težinu i složenost ovaj zadatak crpi i iz toga što previše toga provjerava i što zahtjeva mnogo pisanja i ponavljanja sličnih izračuna. □

2. Rješenje Zadatka 2

Rješenje Zadatka 2. Prirodno je označiti traženi trokut sa ABC. Moramo znati da se simetrale unutrašnjih kuteva trokuta ABC sjeku u središtu I njemu upisane kružnice i da je točka I na istoj udaljenosti od stranica tog trokuta.



Slika 2. Skica Zadatka 2 u SKETCHPAD-u.

Nacrtajmo opet prvo jako grubu skicu našeg Zadatka 2 i to tako da najprije nacrtamo bilo kakav trokut ABC, približno mu odredim simetrale unutrašnjih kuteva, prozovem ih s_A, s_B, i s_C, točku u kojoj se sjeku označim sa I (to je središte upisane kružnice). Zatim iz I treba povući okomicu na stranicu BC dok ne dođemo do njezine projekcije D i slično nacrtam projekcije E od I na CA i F od I na AB. Na kraju, ucrtam negdje sa strane koordinatne osi i upišem kružnicu (središte joj je I a polumjer ID). Jednu takvu skicu prikazuje naša Slika 2.

Iz teksta Zadatka 2 vidimo da znamo koordinate točke A (one su $(2,\,-4)$) i jednadžbe pravaca s_B i s_C (one su redom $x+y-2=0$ i $x-3\,y-6=0$), a traži se da odredimo jednadžbe pravaca BC, CA, i AB.

Naša ideja dokaza je da prvo prikažemo pravce AB i CA pomoću njihovih (za sada nepoznatih) naklona v i w koristeći jednadžbu pravca koji prolazi danom točkom (to je za oba pravca točka A koju znamo) i ima zadan naklon (to će biti spomenuti v i w). Zatim ćemo odrediti koordinate od I, B, i C kao presjeke parova pravaca redom s_B i s_C, s_B i AB, i s_C i CA.

U slijedećem koraku ćemo moći napisati tražene jednadžbe stranica trokuta ABC ali će se u njima pojavljivati parametri - nakloni v i w. Da njih odredimo i tako riješimo zadatak, iskoristiti ćemo svojstvo točke I da je ona jednako udaljena od sva tri pravca BC, CA, i AB. Dakle, ako su d_A, d_B, i d_C udaljenosti od I do pravaca što ih određuju stranice od ABC (tj. duljine dužina DI, EI, i FI) onda ćemo imati dvije jednadžbe $d_B = d_C$ i $d_B = d_A$ iz kojih očekujemo da ćemo moći odrediti koliki moraju biti v i w. Tako dobivene vrijednosti ćemo uvrstiti u ranije dobivene jednadžbe stranica trokuta ABC da bi smo konačno došli do traženih jednadžbi i tako riješili Zadatak 2.

Vidimo da ćemo mnogo raditi pa je najbolje odmah krenuti. Primjenom formule $y-y_1 = k\,(x-x_1)$ za pravac s naklonom k kroz točku $(x_1,\,y_1)$ imamo:

$$AB \quad \dots \quad y+4 = v\,(x-2) \qquad \text{ili} \qquad v\,x-y-2\,v-4=0,$$

$$CA \quad \dots \quad y+4 = w\,(x-2) \qquad \text{ili} \qquad w\,x-y-2\,w-4=0.$$

Da dobijemo koordinate točke središta I upisane kružnice treba riješiti linearni sistem $\{x+y-2=0,\ x-3\,y-6=0\}$. Oduzimanjem druge od prve imam $4\,y+4=0$ pa je $y=-1$ što uvršteno u prvu jednadžbu daje $x = 2-y = 2-(-1) = 3$. Dakle, središte I upisane kružnice trokuta ABC ima koordinate $(3,\,-1)$.

Za točku B sada treba riješiti $\{x+y-2=0,\ v\,x-y-2\,v-4=0\}$. Oduzmemo li opet drugu od umnoška prve sa v imamo $(v+1)\,y+4=0$ pa je $y=\frac{-4}{v+1}$ što uvršteno u prvu daje $x = 2-y = 2+\frac{4}{v+1} = \frac{2\,v+6}{v+1}$. Zato su $(\frac{2\,v+6}{v+1},\,\frac{-4}{v+1})$ koordinate vrha B.

Slično, za točku C moramo riješiti sistem

$$\{x-3\,y-6=0,\ w\,x-y-2\,w-4=0\}.$$

Oduzmemo li ovaj puta drugu od umnoška prve sa w imamo

$$(-3\,w+1)\,y-4\,w+4=0$$

pa je $y = \frac{4w-4}{1-3w} = \frac{4-4w}{3w-1}$ što uvršteno u prvu daje

$$x = 3y + 6 = \frac{12 - 12w}{3w - 1} + 6 = \frac{6w + 6}{3w - 1}.$$

Zato su $(\frac{6w+6}{3w-1}, \frac{4-4w}{3w-1})$ koordinate vrha C.

Slijedeći korak je da se sjetimo kako napisati jednadžbu pravca BC. Za to koristimo formulu $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$ za jednadžbu pravca kroz točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Kad to primijenimo u našem slučaju na točke B i C s njihovim upravo nađenim koordinatama dobijemo

$$y - \frac{-4}{v+1} = \frac{\frac{4-4w}{3w-1} - \frac{-4}{v+1}}{\frac{6w+6}{3w-1} - \frac{2v+6}{v+1}}(x - \frac{2v+6}{v+1}).$$

Da bi smo se riješili dvostrukih razlomaka množim brojnik i nazivnik sa $(v+1)(3w-1)$. Za brojnik dobijem $(4-4w)(v+1) + 4(3w-1) = 4v - 4vw + 4 - 4w + 12w - 4 = 4(v - vw + 2w)$, a za nazivnik izraz $(6w+6)(v+1) - (2v+6)(3w-1) = 6vw + 6v + 6w + 6 - 6vw - 18w + 2v + 6 = 4(2v - 3w + 3)$. Zato je jednadžba od BC jednaka

$$y + \frac{4}{v+1} = \frac{v - vw + 2w}{2v - 3w + 3}(x - \frac{2v+6}{v+1}).$$

Sada obje strane pomnožim sa $(v+1)(2v - 3w + 3)$ pa imamo

$$(v+1)(2v - 3w + 3)\,y + 4(2v - 3w + 3) = \\ (v+1)(v - vw + 2w)\,x - (2v+6)(v - vw + 2w).$$

Kako je

$$(2v+6)(v - vw + 2w) + 4(2v - 3w + 3) = \\ 12 + 14v - 2vw - 2wv^2 + 2v^2,$$

sada nam treba pomoć čarobnjaka da gornji izraz prepoznamo kao $(v+1)(12 - 2vw + 2v)$ (što računalo napravi kao od šale). Prebacivanjem desne strane na lijevu i dijeljenjem sa $v+1$ konačno dobijem željeni oblik. (Sigurno je $v \neq -1$ jer pravci AB i BI nisu paralelni.)

$$(vw - v - 2w)\,x + (2v - 3w + 3)\,y + 12 - 2vw + 2v = 0.$$

Koliko učenika će ovdje prepoznati gornju faktorizaciju, koliko će ih nastaviti raditi sa faktorima $(v+1)$ (još možda i raspisati sve te produkte), a koliko će ih odustati?

Sada nam treba formula koja kaže da je udaljenost točke (x_0, y_0) od pravca s jednadžbom $f\,x + g\,y + h = 0$ dana izrazom

$$\frac{|f\,x_0 + g\,y_0 + h|}{\sqrt{f^2 + g^2}}.$$

Primjenimo li je na točku I i redom na pravce AB, CA, i BC izlazi

$$d_B = \frac{|3v - (-1) - 2v - 4|}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{|v - 3|}{\sqrt{v^2 + 1}}.$$

Jer su jednadžbe za AB i CA skoro identične (razlikuju se samo u v i w), slično je $d_C = \frac{|w-3|}{\sqrt{w^2+1}}$. Brojnik od d_A je apsolutna vrijednost od

$$3\,(v\,w - v - 2\,w) - (2\,v - 3\,w + 3) + 12 - 2\,v\,w + 2\,v = \\ v\,w - 3\,v - 3\,w + 9 = (v-3)(w-3).$$

a nazivnik od d_A je drugi korijen iz

$$M = (v\,w - v - 2\,w)^2 + (2\,v - 3\,w + 3)^2 = v^2\,w^2 + v^2 + 4\,w^2 - \\ 2\,w\,v^2 - 4\,v\,w^2 + 4\,v\,w + 4\,v^2 + 9\,w^2 + 9 - 12\,v\,w + 12\,v - 36\,w = \\ \left(v^2 - 4\,v + 13\right) w^2 - \left(2\,v^2 + 8\,v + 18\right) w + 9 + 12\,v + 5\,v^2.$$

Nakom kvadriranja i prebacivanja članova uvjet $d_B = d_C$ postaje

$$(v-3)^2\,(w^2+1) - (w-3)^2\,(v^2+1) = v^2\,w^2 - 6\,v\,w^2 + 9\,w^2 + \\ v^2 - 6\,v + 9 - v^2\,w^2 + 6\,w\,v^2 - 9\,v^2 - w^2 - 6\,w - 9 = \\ 8\,w^2 - 8\,v^2 - 6\,v\,w^2 - 6\,v + 6\,v^2\,w + 6\,w$$

Ponovo nam treba pomoć čarobnjaka kako bi smo prepoznali da je posljednji izraz zapravo produkt $2\,(v-w)(3\,v\,w - 4\,v - 4\,w - 3)$. S druge strane, jednakost $d_B = d_A$ je ekvivalentna sa $\frac{|(v-3)(w-3)|}{\sqrt{M}} = \frac{|v-3|}{\sqrt{v^2+1}}$. Nakom kvadriranja i prebacivanja desne strane na lijevu imamo

$$(v-3)^2\,[(w-3)^2\,(v^2+1) - M] = 0.$$

Na kamenu starih mudraca piše da je uglata zagrada zapravo produkt $4\,(1-w)(v-3)(v-w)$. Zaključujemo da je $w = 1$ što uvršteno u drugu zagradu $3\,v\,w - 4\,v - 4\,w - 3$ prvog uvjeta daje $3\,v - 4\,v - 4 - 3 = 0$ ili $v = -7$. Ostale dvije mogućnosti $v = 3$ i $v = w$ nam ne odgovaraju (pravac AI simetrale kuta A ima naklon jednak 3). Zato su tražene jednadžbe stranica trokuta ABC redom

$$AB \qquad \ldots \qquad 7\,x + y - 10 = 0,$$

(stavili smo $v = -7$ u jednadžbu $v\,x - y - 2\,v - 4 = 0$ od AB i množili sa -1 da smanjimo broj minusa)

$$CA \qquad \ldots \qquad x - y - 6 = 0,$$

(stavili smo $w = 1$ u jednadžbu $w\,x - y - 2\,w - 4 = 0$ od CA), i

$$BC \qquad \ldots \qquad x + 7\,y - 6 = 0,$$

(stavili smo $w = 1$ i $v = -7$ u jednadžbu

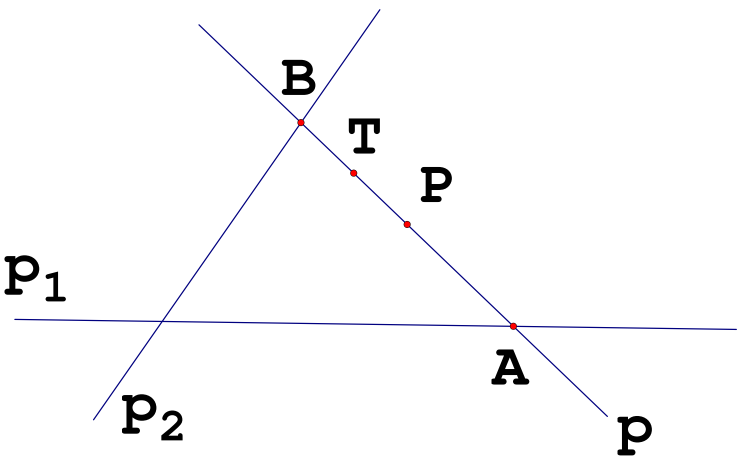
$$(v\,w - v - 2\,w)\,x + (2\,v - 3\,w + 3)\,y + 12 - 2\,v\,w + 2\,v = 0.$$

od BC što daje $(-7+7-2)\,x + (-14-3+3)\,y + 12 + 14 - 14 = 0$ i zato gore navedenu jednadžbu nakom dijeljenja sa -2.) $\square$

Sve što smo ranije kazali na kraju rješenja Zadatka 1 sada kada smo preživjeli rješavanje Zadatka 2 moramo ponoviti sa dvostruko jačim naglaskom. Zadatak 2 je izuzetno težak pogotovo ako se prihvati ovaj standardni pristup. Možda se on može riješiti lagano nekim trikom no bilo bi zgodno ponuditi ga na kakvom takmičenju ili studentima i statistički obraditi rezultate. Volio bih kada bi ti rezultati oborili moje tvrdnje.

3. Rješenje Zadatka 3

Rješenje Zadatka 3. Ideja dokaza se najlakše vidi iz dolje nacrtane skice Zadatka 3 na Slici 3.



Slika 3. Skica ideje rješavanja Zadatka 3.

Točkom T povučemo pravac p kojem je naklon neki nepoznati realan broj k, nađemo presjeke A i B tog pravca sa zadanim pravcima p_1 i p_2, odredimo polovište P dužine AB, i na kraju odredimo vrijednost parametra k iz uvjeta da se točke P i T podudaraju. Kako se točke podudaraju ako imaju iste i apcise i ordinate dobiti ćemo dva uvjete za jednu nepoznanicu što izgleda malo neobično ali treba držati na umu da za kolinearne točke (one koje leže na istom pravcu) $E(x_0,\, y_0)$, $C(x_1,\, y_1)$ i $D(x_2,\, y_2)$ osim u slučaju $x_1 = x_2$ iz $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ slijedi $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$ i slično osim u slučaju $y_1 = y_2$ iz $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$ slijedi $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$.

U ostvarenju tog plana riješavanja prvo primijetimo da traženi pravac p sigurno nije vertikala $x = 5$ jer ona sječe p_1 s jednadžbom $x - 2\,y + 4 = 0$ u točki $A_v(5,\, \frac{9}{2})$ (uvrstili smo 5 umjesto x u p_1 i riješili po y) i p_2 s jednadžbom $3\,x - y - 3 = 0$ u točki $B_v(5,\, 12)$ (uvrstili smo 5 umjesto x u p_2 i riješili po y) i točka T nije polovište dužine A_vB_v jer je $\frac{33}{4} = \frac{\frac{9}{2}+12}{2} \neq 6$. Zato je moguće pretpostaviti da pravac p ima jednadžbu $y - 6 = k\,(x - 5)$ ili $y = k\,x - 5\,k + 6$ za neki realan broj k.

Apcisu presjeka A pravaca p i p_1 dobivamo rješavanjem po x jednakosti $k\,x - 5\,k + 6 = \frac{x}{2} + 2$ (zapisali smo jednadžbu od p_1 u obliku $y = \frac{x}{2} + 2$ i izjednačili desne strane od p i p_1). Množenjem obje strane sa 2 i prebacivanjem članova koji sadrže x na lijevu stranu a ostale članove na desnu stranu imamo $(2\,k - 1)\,x = 10\,k - 8$ ili $x = x_A = \frac{10\,k-8}{2\,k-1}$. Ordinata točke A je $y_A = \frac{x_A}{2} + 2 = \frac{1}{2}\frac{10\,k-8}{2\,k-1} + 2 = \frac{5\,k-4}{2\,k-1} + 2 = \frac{9\,k-6}{2\,k-1}$. Dakle, točka A ima koordinate $(\frac{10\,k-8}{2\,k-1}, \frac{9\,k-6}{2\,k-1})$.

Slično, apcisu presjeka B pravaca p i p_2 dobivamo rješavanjem po x jednakosti $k\,x - 5\,k + 6 = 3\,x - 3$ (zapisali smo jednadžbu od p_2 kao $y = 3\,x - 3$ i izjednačili desne strane od p i p_2). Prebacivanjem članova koji sadrže x na lijevu stranu a ostale članove na desnu stranu imamo $(k - 3)\,x = 5\,k - 9$ ili $x = x_B = \frac{5\,k-9}{k-3}$. Ordinata točke B je

$$y_B = 3\,x_B - 3 = 3\,\frac{5\,k - 9}{k - 3} - 3 = \frac{15\,k - 27}{k - 3} - 3 = \frac{12\,k - 18}{k - 3}.$$

Dakle, točka B ima koordinate $(\frac{5\,k-9}{k-3}, \frac{12\,k-18}{k-3})$.

Apcisa polovišta P dužine AB je aritmetička sredina apcisa točaka A i B, tj.

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}\,(\frac{10\,k - 8}{2\,k - 1} + \frac{5\,k - 9}{k - 3}) = \frac{(10\,k - 8)(k - 3) + (5\,k - 9)(2\,k - 1)}{2\,(2\,k - 1)(k - 3)} = \frac{20\,k^2 - 61\,k + 33}{4\,k^2 - 14\,k + 6}.$$

Ordinata od P je slično aritmetička sredina ordinata točaka A i B, tj.

$$y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\,(\frac{9\,k - 6}{2\,k - 1} + \frac{12\,k - 18}{k - 3}) = \frac{(9\,k - 6)(k - 3) + (12\,k - 18)(2\,k - 1)}{2\,(2\,k - 1)(k - 3)} = \frac{33\,k^2 - 81\,k + 36}{4\,k^2 - 14\,k + 6}.$$

Uvjet da se točke P i T podudaraju ekvivalentan je zahtjevu da istovremeno vrijedi $x_P = 5$ i $y_P = 6$. Nakom prebacivanja cijelih brojeva na lijevu stranu i svođenja na zajedničke nazivnike te promatranjem samo brojnika dobivamo

$$20\,k^2 - 61\,k + 33 - 5\,(4\,k^2 - 14\,k + 6) = 9\,k + 3 = 0,$$

odnosno

$$33\,k^2 - 81\,k + 36 - 6\,(4\,k^2 - 14\,k + 6) = 9\,k^2 + 3\,k = k\,(9\,k + 3) = 0.$$

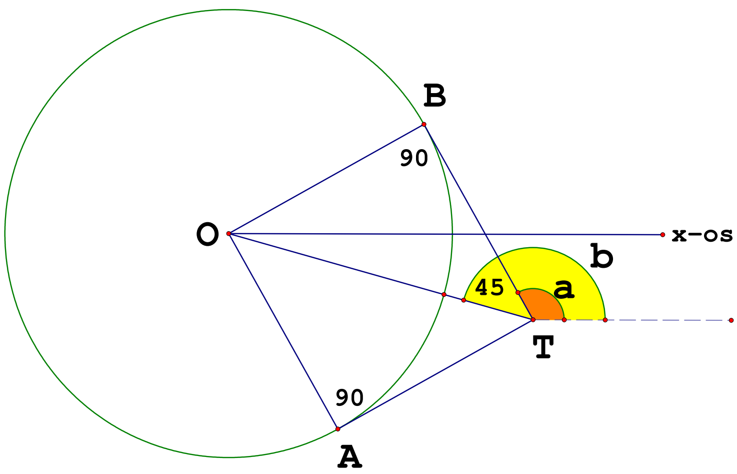
Očigledno je jedini zajednički korijen (nultočka) te dvije jednadžbe jednak $k = -\frac{1}{3}$. Jednadžba traženog pravca p je zato $y - 6 = -\frac{1}{3}\,(x - 5)$ ili (nakom množenja obiju strana sa 3 i prebacivanja svih članova na lijevu stranu) $x + 3\,y - 23 = 0$.

Izgleda da je ovaj zadatak ipak bitno lakši i primjereniji od prva dva zadatka za tradicionalno rješavanje iako i on ima nezgodne dijelove kao što je diskusija za vertikalu. Primjetimo da ako se promatraju samo apcise dobiti ćemo ispravni odgovor premda se u biti moraju promatrati i apcise i ordinate jer se jedino tada matematički korektno dolazi do rješenja. □

4. Rješenje Zadatka 4

Prvo rješenje Zadatka 4. Prije svega moramo primijetiti da je udaljenost točke T od ishodišta jednaka $\sqrt{7^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$ i da je taj broj strogo veći od radijusa $\sqrt{29}$ zadane kružnice pa je dana točka T izvan zadane kružnice što povlači da će postojati dvije tangente iz T na kružnicu.

Naše jednostavno rješenje Zadatka 4 bez mnogo pisanja zasniva se na činjenici da je $\sqrt{58}=\sqrt{2}\,\sqrt{29}$ što povlači da je četverokut $TAOB$ kome su vrhovi točka T, dirališta A i B tangenata sa kružnicom, i središte kružnice zapravo kvadrat kome je OT dijagonala. Ako su a i



Slika 4. Skica ideje prvog rješenja Zadatka 4.

b kutevi što ih pravci BT i OT zatvaraju sa pozitivnim smjerom x-osi onda je očito (vidi Sliku 4): $b=a+45^\circ$ i vrijedi $\tan b=-\frac{3}{7}$. Zato je naklon k_B tangente BT jednak

$$k_B=\tan(b-45^\circ)=\frac{\tan b-\tan 45^\circ}{1+\tan b\,\tan 45^\circ}=\frac{-\frac{3}{7}-1}{1-\frac{3}{7}}=\frac{-3-7}{7-3}=-\frac{5}{2}.$$

Kako je pravac AT (druga tangenta) okomit na pravac BT njegov naklon k_A zadovoljava $k_A=-\frac{1}{k_B}$ pa je $k_A=\frac{2}{5}$. Sada možemo napisati tražene jednadžbe tangenata na kružnicu iz točke T koristeći formulu za pravac kroz danu točku (kod nas je to točka T) sa poznatim naklonom. Zato je jednadžba prve tangente AT jednaka $y+3=\frac{2}{5}(x-7)$ ili

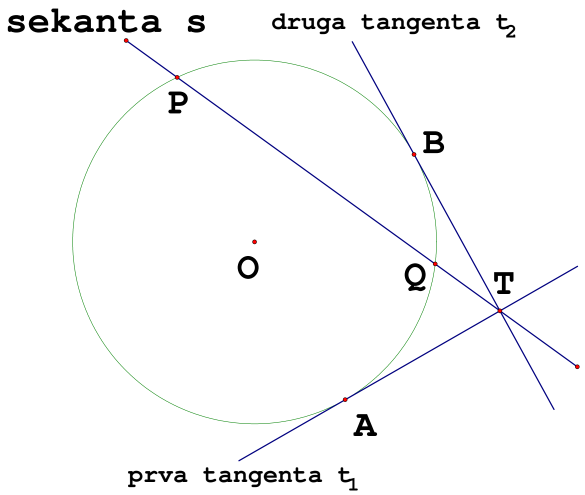
$$2\,x-5\,y-29=0$$

a jednadžba druge tangente BT jednaka je $y + 3 = -\frac{5}{2}\,(x - 7)$ ili

$$5\,x + 2\,y - 29 = 0.$$

Iako je dosta jednostavno gornje rješenje Zadatka 4 zahtijeva znatnu domišljatost (da se primijeti da je udaljenost OT jednaka $\sqrt{2}$ puta polumjer kružnice), zatim treba znati da je spojnica središta kružnice s točkom dodira tangente okomita na tangentu, da je kut $\angle OTB$ jednak $45°$ (jer je njegov sinus jednak $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$), treba znati da je naklon pravca zapravo tanges kuta što ga pravac zatvara s pozitivnim smjerom x-osi, pa formulu za tangens razlike kuteva, i odnos naklona dva okomita pravca.

Drugo rješenje Zadatka 4. Ideja dokaza se pomalo nazire iz dolje nacrtane skice Zadatka 4. Jer je tangenta u stvari granični slučaj sekante



Slika 5. Skica ideje drugog rješenja Zadatka 4.

koja ima umjesto dva presjecišta sa kružnicom (točke P i Q na slici) samo jedno (točku A odnosno B na slici), mi ćemo točkom T povući pravac s (sekantu) kojem je naklon neki nepoznati realan broj k i zahtijevati da postoji samo jedna točka presjeka tog pravca i zadane kružnice. Taj pristup bi trebao omogućiti da odredimo vrijednost parametra k kada je sekanta u stvari tangenta i tako riješimo zadatak. Naravno da očekujemo točno dvije vrijednosti za k.

Prije svega, kao i u rješenju Zadatka 3, treba vidjeti da vertikala $x = 7$ nije moguće rješenje što je očigledno budući da je $\sqrt{29} < 7$ pa ta vertikala uopće ne sječe kružnicu.

Jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = 29$$

dok sekanta ima jednadžbu

$$y + 3 = k\,(x - 7)$$

ili u javnom obliku

$$y = k\,x - 7\,k - 3.$$

Da bi smo našli apcise točaka presjeka kružnice i sekante trebamo uvrstiti zadnji y u prvu jednadžbu (kružnice) i zahtijevati da nastala kvadratna jednadžba u x s koeficijentima nekim izrazima koji sadrže k ima točno jedno rješenje. Drugim riječima, diskriminanta joj je jednaka nuli. Imamo,

$$x^2 + (k\,x - 7\,k - 3)^2 = 29$$

ili s izvršenim kvadriranjem

$$x^2 + k^2\,x^2 + 49\,k^2 + 9 - 14\,k^2\,x - 6\,k\,x + 42\,k = 29$$

i zato

$$(k^2 + 1)\,x^2 - 2\,k\,(7\,k + 3)\,x + 49\,k^2 + 42\,k - 20 = 0$$

nakon skupljanja istovrsnih članova i prebacivanja 29 na lijevu stranu.

Sada zahtijevamo da diskriminanta ove kvadratne jednadžbe (kvadrat koeficijenta $-2\,k\,(7\,k + 3)$ od x minus četiri puta produkt koeficijenta $k^2 + 1$ of x^2 i slobodnog člana $49\,k^2 + 42\,k - 20$) bude jednaka nuli

$$4\,k^2\,(7\,k + 3)^2 - 4\,(k^2 + 1)(49\,k^2 + 42\,k - 20) = 0.$$

Djeljenjem sa 4, izvršenjem kvadriranja, i djelomičnom grupacijom sličnih članova jer vidimo da $(7\,k + 3)^2$ započinje sa $49\,k^2 + 42\,k$ dobivamo

$$k^2\,(49\,k^2 + 42\,k + 9) - k^2\,(49\,k^2 + 42\,k) + 20\,k^2 - 49\,k^2 - 42\,k + 20 = 0$$

odnosno $9\,k^2 + 20\,k^2 - 49\,k^2 - 42\,k + 20 = 0$ i zato

$$20\,k^2 + 42\,k - 20 = 0$$

nakon zbrajanja i množenja sa -1. Korjeni (nultočke) ove kvadratne jednadžbe su

$$k_{1,\,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-20)}}{2 \cdot 20} = \frac{-42 \pm \sqrt{1764 + 1600}}{40} = \frac{-42 \pm \sqrt{3364}}{40} = \frac{-42 \pm 58}{40}.$$

Dakle, $k_1 = \frac{-100}{40} = -\frac{5}{2}$ i $k_1 = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$. Zato je jednadžba prve tangente jednaka $y + 3 = -\frac{5}{2}\,(x - 7)$ ili

$$5\,x + 2\,y - 29 = 0$$

a jednadžba druge tangente jednaka je $y + 3 = \frac{2}{5}\,(x - 7)$ ili

$$2\,x - 5\,y - 29 = 0.$$

U ovom rješenju trebalo je malo više pisati, trebalo se prisjetiti kada kvadratna jednadžba ima samo jedan korijen, i trebalo je znati riješiti kvadratnu jednadžbu. Pri tome je najteže naći 42^2 zatim $\sqrt{3364}$ i pravilno skratiti razlomke $\frac{-100}{40}$ i $\frac{16}{40}$.

RJEŠENJA UZ POMOĆ RAČUNALA

5. Rješenje Zadatka 1 računalom u MAPLE-u

Prvo rješenje Zadatka 1 u MAPLE-u. Prvo ćemo zadati točke kao uređene parove njihovih koordinata.

tP:=[-6,-4]:tQ:=[3,-9]:tR:=[10,6]:tS:=[2,1]:tT:=[-2,-10]:

Zatim definiramo funkciju koja će zadanoj točki i zadanom realnom broju k pridružiti jednadžbu pravca kroz tu točku s naklonom jednakim k. To je dobro poznata formula $y - y_1 = k\,(x - x_1)$.

ptk := proc(t,k) local a,b;a:=t[1]:b:=t[2]: y-b=k*(x-a): end:

Sada zadajemo jednadžbe stranica traženog paralelograma. Realni broj v je naklon stranica AB i CD dok je realni broj w naklon stranica BC i DA.

pABP := ptk(tP, v): pBCQ := ptk(tQ, w):
pCDR := ptk(tR, v): pDAT := ptk(tT, w):

Vrhove paralelograma dobivam rješavanjem odgovarajućih parova jednadžbi stranica.

tA:=subs(solve({pABP, pDAT},{x, y}), [x, y]):
tB:=subs(solve({pBCQ, pABP},{x, y}), [x, y]):
tC:=subs(solve({pBCQ, pCDR},{x, y}), [x, y]):
tD:=subs(solve({pCDR, pDAT},{x, y}), [x, y]):

Netko bi ovdje mogao prigovoriti da treba mnogo tipkati da bi se sve ovo dobilo. To je donekle točno no daktilografija je lakša od matematike a u zadnje dvije grupe treba unjeti samo prvu naredbu a ostale tri se dobiju iz nje malim izmjenama što se kod tipkanja na računalu lagano postiže. Dakle, ako je situacija simetrična ili se isti postupci ponavljaju kao kod nas onda se tipkanje bitno olakšava.

Osim toga, one funkcije koje se često koriste (poput funkcije **ptk**) se mogu lagano zapamtiti u memoriju računala i one će biti dostupne kad god pokrenemo MAPLE pa neće biti potrebe da ih svaki puta nanovo definiramo. Upotreba računala u nastavi će uključivati obavezu nastavnika da stvori za učenika takav sve veći i veći skup zapamćenih funkcija i formula koje će zamijeniti ulogu logaritamskih tablica s formulama i kako učenika poduči o nekom novom području morati će paralelno objašnjavati kako se to radi s računalom.

Jedna od obaveznih funkcija koja nam sada treba je **po** koja dvjema točkama pridružuje polovište segmenta kojoj su one krajevi.

po := proc(a, b) local d, e, f, g; d := a[1]: e := a[2]:
f := b[1]: g := b[2]: [(d+f)/2, (e+g)/2]: end:

Sada tražimo one vrijednosti za parametre v i w kada će točka S biti zajedničko polovište segmenata AC i BD (dijagonala). Dakle, apcisa i ordinata (prva i druga koordinata) polovišta od AC i polovišta od BD moraju biti jednake redom apcisi i ordinati od S.

rj := solve({po(tA, tC)[1]=tS[1], po(tA, tC)[2]=tS[2],
po(tB, tD)[1]=tS[1], po(tB, tD)[2]=tS[2]},{v, w});

Vrlo hitro računalo daje odgovor $rj := \{v = v,\ w = 7\}$. To znači da v može biti bilo koji realan broj različit od 7 dok je w jednak broju 7. Kolike su tada koordinate vrhova paralelograma dobijemo naredbama:

subs(rj, tA); subs(rj, tB); subs(rj, tC); subs(rj, tD);

Ako sada u te izraze substituiramo $v = \frac{1}{5}$ dobijemo koordinate vrhova paralelograma iz službenog rješenja. □

Drugo rješenje Zadatka 1 u MAPLE-u. U ovom dokazu isto prvo zadamo dane točke kao uređene parove njihovih koordinata a tražene točke A, B, C, i D sa koordinatama redom nekim za sada nepoznatim brojevima a, $a1$, b, $b1$, c, $c1$, d, i $d1$.

tP:=[-6,-4]:tQ:=[3,-9]:tR:=[10,6]:tS:=[2,1]:tT:=[-2,-10]:
tA:=[a,a1]:tB:=[b,b1]:tC:=[c,c1]:tD:=[d,d1]:

Sada nam treba funkcija koja paru točaka pridružuje pravac koji prolazi (ili koji je određen) tim točkama. Pri tome pravac prikazujemo uređenom trojkom $[f,\ g,\ h]$ gdje su f, g, i h koeficijenti linearne jednadžbe $f\,x + g\,y + h = 0$ tog pravca.

pr:=proc(A, B) local a, b, c, d; a := A[1]: b := A[2]:
c := B[1]: d := B[2]: [b-d, c-a, a*d-b*c]: end:

Uvjet da bi točka ležala na pravcu opisan je slijedećom funkcijom.

utp:=proc(A, p) local a, b, u, v, w; a := A[1]: b := A[2]:
u := p[1]: v := p[2]: w := p[3]; a*u+b*v+w: end:

Slijedeće naredbe definiraju uvjete zadatka da točke P, Q, R, i T leže redom na pravcima AB, BC, CD, i DA te da je točka S polovište dijagonala AC i BD.

u1 := utp(tP, pr(tA, tB)): u2 := utp(tQ, pr(tB, tC)):
u3 := utp(tR, pr(tC, tD)): u4 := utp(tT, pr(tD, tA)):
u5 := tS[1]-po(tA, tC)[1]: u6 := tS[2]-po(tA, tC)[2]:
u7 := tS[1]-po(tB, tD)[1]: u8 := tS[2]-po(tB, tD)[2]:

Na kraju, tražimo da nam MAPLE nađe tražene koordinate.

rj:=solve({u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8}, {a,a1,b,b1,c,c1,d,d1}):

Nestvarno brzo računalo će na ekranu ispisati:

$$rj := \left\{a = \frac{2}{5} + \frac{8}{5}d1,\ a1 = d1,\ b = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}d1,\ b1 = 2 - d1,\right.$$
$$\left. c = \frac{18}{5} - \frac{8}{5}d1,\ c1 = 2 - d1,\ d = \frac{2}{5} + \frac{8}{5}d1,\ d1 = d1\right\},$$

$$\left\{a = -1 - \frac{1}{2}\,d,\ a1 = -3 - \frac{7}{2}\,d,\ b = 4 - d,\ b1 = -2 - 7\,d,\right.$$
$$\left. c = \frac{1}{2}\,d + 5,\ c1 = \frac{7}{2}\,d + 5,\ d = d,\ d1 = 4 + 7\,d\right\}.$$

Što je sad ovo? Dobili smo dvije familije rješenja a ne samo jednu kao ranije. Ako pogledamo pažljivije prvu familiju vidimo da ona sadrži degenerirani slučaj kada je $A = D$ i $B = C$ dok je S polovište dijagonala $AC = BD$. Mi smo tu mogućnost ranije isključili kada smo načinili pretpostavku da je $v \neq w$. Nespretan odabir točaka P, Q, R, S, i T gdje je S na pravcu PR je izgleda uzrokom svih ovih neprilika.

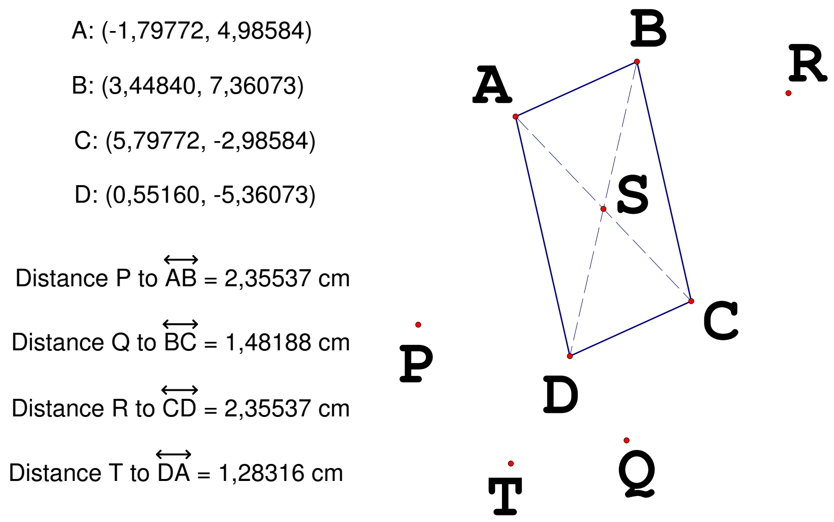
Druga familija daje naredbom **subs(rj[2], tA);** i slično za ostale vrhove da su tražene koordinate $A(-1 - \frac{1}{2}\,d,\ -3 - \frac{7}{2}\,d)$, $B(4 - d,\ -2-7\,d)$, $C(\frac{1}{2}\,d + 5,\ \frac{7}{2}\,d + 5)$, $D(d,\ 4 + 7\,d)$. Uvrstimo li sada $d = 0$ u tim izrazima dobivamo "rješenje" $A(-1,\ -3)$, $B(4,\ -2)$, $C(5,\ 5)$, $D(0,\ 4)$. Druga zgodna "rješenja" s cjelobrojnim koordinatama vrhova dobiju se za svaku parnu vrijednost parametra d, npr. za $d = -2$ imamo $A(0,\ 4)$, $B(6,\ 12)$, $C(4,\ -2)$, $D(-2,\ -10)$. □

6. Rješenje Zadatka 1 računalom u SKETCHPAD-u

Rješenje Zadatka 1 u SKETCHPAD-u. U verziji 4 poznatog programa GEOMETER'S SKETCHPAD za dinamičku geometriju postupam na slijedeći način.

Prvo pod alatima GRAPH odaberem Plot Points... i unesem koordinate zadanih točaka P, Q, R, S, i T. Zatim odaberem po volji dvije različite točke A i B obje različite od točke S. Pod TRANSFORM pomoću Mark Center odredim da je točka S centar i upotrebom Rotate rotiram točke A i B oko S za 180°. Tako dobijem točke C i D s time da je $ABCD$ gotovo uvijek (osim u degeneriranim slučajevima) paralelogram kojem je točka S središte. Svim točkama pridjelim imena i nacrtam stranice paralelograma $ABCD$ podebljano a dijagonale crtkano. Alatom MEASURE Coordinates točkama A, B, C, i D izračunam koordinate (jer one nas zanimaju) a onda odabirom stranice AB i točke sa MEASURE Distance odredim udaljenost točke P od pravca AB i postupim slično s preostala tri para $(BC,\ Q)$, $(CD,\ R)$, i $(DA,\ T)$. Sakrijem li koordinatne osi dobiti ću slijedeću Sliku 6.

Sada se pomiću slobodne točke A i B s ciljem da se postigne da udaljenosti točaka P, Q, R, i T od pravaca AB, BC, CD, i DA budu sve četiri što bliže jednake nuli. Ako smo dovoljno pažljivi i uporni primijetiti ćemo da za mnoge položaje točke A možemo odabrati točku B kojom će se zadovoljiti da se te četiri udaljenosti malo razlikuju od nule. Da su sve one točno jednake nuli gotovo da i nemožemo postići. To naravno nije točno ali je i nešto što je prirodna posljedica toga da je SKETCHPAD samo približno točan i treba ga uzimati kao pomagalo s izvjesnim nedostacima i ograničenjima.



Slika 6. Slika Zadatka 1 u SKETCHPAD-u.

Imamo sreću da u našem Zadatku 1 ipak i tu postoji pogodnost koju možemo iskoristiti da nađemo neka "rješenja" s cjelobrojnim koordinatama vrhova.

Naime, pod GRAPH Snap Points ako odaberemo tu opciju onda se točke same smještaju u najbliže točke ravnine kojima su obje koordinate cjelobrojne. Ako sada vrludamo s točkama A i B po ravnini sa željom da sve udaljenosti budu točno nula biti ćemo puno uspješniji. Naše slijedeće dvije slika prikazuje dva takva slučaja gdje je prvi upravo službeno "rješenje".

□

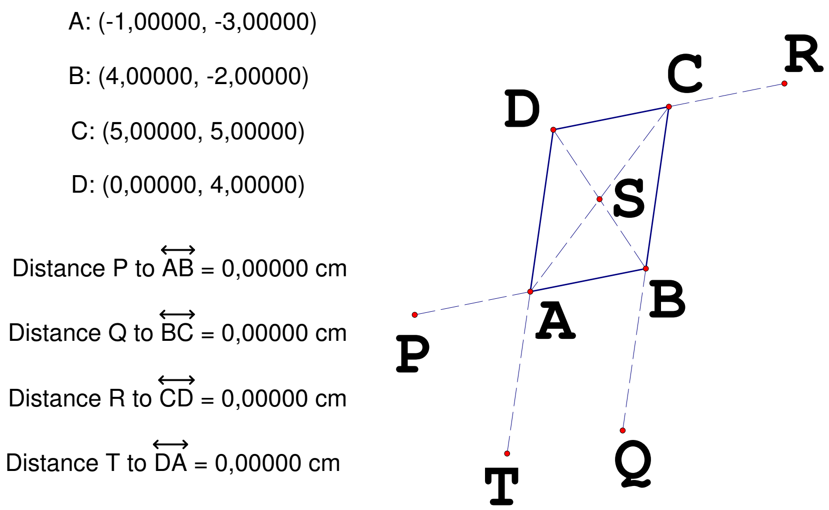
7. Eksperiment na računalu potaknut Zadatkom 1

Sada možemo krenuti eksperimentirati na računalu i pokušati naći pod kojim uvjetima na položaj pet danih točaka P, Q, R, S, i T postoji točno jedan nedegenerirani paralelogram $ABCD$ kojem je točka S središte a pravci AB, BC, CD, i DA prolaze redom točkama P, Q, R, i T. Bez umanjenja općenitosti, možemo uzeti da je S ishodište, da P ima koordinate $(1, 0)$ (jedinična točka), i da su koordinate točaka Q, R, i T parovi $(q, q1)$, $(r, r1)$, i $(t, t1)$ za neke proizvoljne realne brojeve q, $q1$, r, $r1$, t, i $t1$.

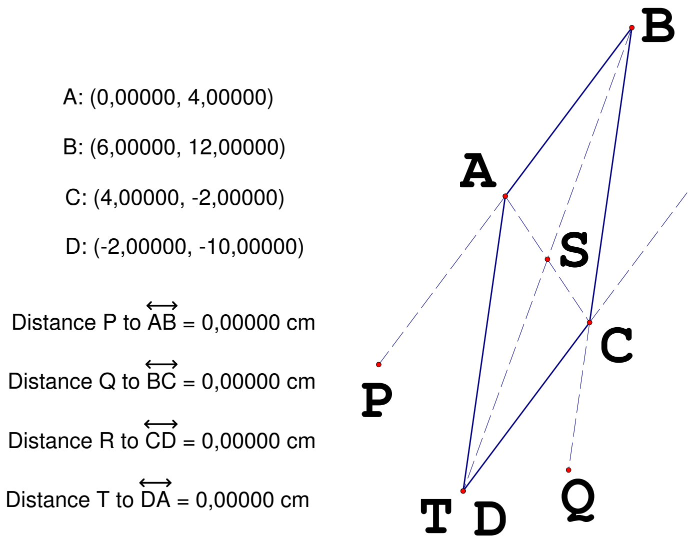
Primjenimo li metodu iz drugog dokaza Zadatka 1 u MAPLE-u imamo:

Prvo ponovo zadamo dane točke kao uređene parove njihovih koordinata a tražene točke A, B, C, i D sa koordinatama redom nekim za sada nepoznatim brojevima a, $a1$, b, $b1$, c, $c1$, d, i $d1$.

tP:=[1,0]:tQ:=[q,q1]:tR:=[r,r1]:tS:=[0,0]:tT:=[t,t1]:



Slika 7. Prikaz službenog "rješenja" Zadatka 1 u SKETCHPAD-u.



Slika 8. Još jedno cjelobrojno "rješenje" Zadatka 1 u SKETCHPAD-u.

tA:=[a,a1]:tB:=[b,b1]:tC:=[c,c1]:tD:=[d,d1]:

Slijedeće naredbe definiraju uvjete zadatka da točke P, Q, R, i T leže redom na pravcima AB, BC, CD, i DA te da je točka S polovište dijagonala AC i BD.

u1 := utp(tP, pr(tA, tB)): u2 := utp(tQ, pr(tB, tC)):
u3 := utp(tR, pr(tC, tD)): u4 := utp(tT, pr(tD, tA)):

u5 := po(tA, tC)[1]: u6 := po(tA, tC)[2]:
u7 := po(tB, tD)[1]: u8 := po(tB, tD)[2]:
Na kraju, tražimo da nam MAPLE nađe tražene koordinate.
rj:=solve({u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8}, {a,a1,b,b1,c,c1,d,d1}):
Bez oklijevanja vrlo brzo računalo će na ekranu ispisati:

$$
\begin{aligned}
rj := \Big\{ c1 &= -\frac{(q1\,t - q1 - qt1 - t1)\,r1}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
d &= \frac{rq1\,t + q1\,t + r1\,t - qt1 + r1\,q - rqt1}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
c &= -\frac{rq1\,t - rqt1 + q1\,t - qt1 - r1\,q - r1\,t}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
b1 &= -\frac{r1\,(-qt1 + q1\,t + t1 + q1)}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
b &= -\frac{rq1\,t + q1\,t + r1\,t - qt1 + r1\,q - rqt1}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
d1 &= \frac{r1\,(-qt1 + q1\,t + t1 + q1)}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
a1 &= \frac{(q1\,t - q1 - qt1 - t1)\,r1}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1},\\
a &= \frac{rq1\,t - rqt1 + q1\,t - qt1 - r1\,q - r1\,t}{q1 + rq1 - r1\,q - r1\,t + rt1 + t1}\Big\},\\
&\{c1 = 0,\, b1 = 0,\, d1 = 0,\, c = 0,\, a1 = 0,\, d = 0,\, b = 0,\, a = 0\}
\end{aligned}
$$

Drugo rješenje odgovara neinteresantnom slučaju kada se svi vrhovi od $ABCD$ poklope s točkom S. Svi nazivnici izraza u prvom rješenju su isti i mogu se zapisati na tri ekvivalentna načina kao

$$
\begin{gathered}
-r1\,q + (1+r)\,q1 + t1 - r1\,t + r\,t1,\\
(q1 + t1)\,r + (-q - t)\,r1 + q1 + t1,\\
-r1\,t + (1+r)\,t1 + r\,q1 - r1\,q + q1.
\end{gathered}
$$

Iz ovih zapisa vidimo da ako smo odabrali točku S i ako je točka P njoj jednaka onda moraju točke A, B, i S biti na istom pravcu pa su točke C i D refleksije od A i B u točki S što povlači da su Q, R, i T nužno na spomenutom pravcu osim kada je $A = B = S$ a Q, R, i T su bilo kakve.

U interesantnijem slučaju kada su S i P dvije različite točke, onda treću točku Q možemo odabrati po volji uz jedini nezgodan izbor $Q = S$ kada nastupa slična situacija onoj gore opisanoj za $P = S$. Četvrta točka R ne može jedino biti jednaka refleksiji točke P u točki S, tj. njene koordinate ne mogu biti $(-1, 0)$.

Takva razmatranja vode na zaključak da pored degeneriranog paralelograma postoji još samo jedan paralelogram koji zadovoljava postavljene uvjete ako točka T nije na paraleli kroz refleksiju točke Q u točki S sa pravcem koji spaja točku P sa refleksijom točke R u točki S. U Zadatku 1 je refleksija točke R u točki S baš jednaka točki P pa za gornji pravac možemo uzeti bilo koji pravac kroz P i stoga i pravac PT što znači da gornji uvjet nije ispunjen.

8. Rješenje Zadatka 2 računalom u MAPLE-u

Prvo rješenje Zadatka 2 u MAPLE-u. Na početku zadamo točku A i jednadžbe pravaca s_B i s_C (tj. dviju zadanih simetrala unutrašnjih kuteva traženog trokuta ABC).

tA:=[2,-4]:sB:=x+y-2:sC:=x-3*y-6:

Zatim primijenim ranije definiranu funkciju **ptk** koja zadanoj točki i zadanom realnom broju k pridružuje jednadžbu pravca kroz tu točku s naklonom jednakim k. Tako zadajemo jednadžbe stranica AB i CA traženog trokuta. Realni broj v je naklon stranice AB dok je realni broj w naklon stranice CA.

pAB := ptk(tA, v): pCA := ptk(tA, w):

Koordinate središta I upisane kružnice i vrhove B i C dobivam rješavanjem odgovarajućih parova jednadžbi pravaca na kojima leže: točka I na s_B i s_C; točka B na AB i s_B; i točka C na pravcima CA i s_C.

tI:=subs(solve({sB, sC},{x, y}), [x, y]):
tB:=subs(solve({sB, pAB},{x, y}), [x, y]):
tC:=subs(solve({sC, pCA},{x, y}), [x, y]):

Sada se slijedećom funkcijom **jp** za određivanje jednadžbe pravca kroz dvije zadane različite točke definira jednadžba pravca BC. Ona je jako slična funkciji **pr** koju smo ranije definirali.

jp:=proc(A, B) local a, b, c, d; a := A[1]: b := A[2]:
c := B[1]: d := B[2]: (b-d)*x+(c-a)*y+a*d-b*c: end:
pBC := jp(tB, tC):

Još moramo zadati postupak kojim će se računati kvadrat udaljenosti točke do pravca koji je zadan svojom linearnom jednadžbom u obliku $a\,x + b\,y + c = 0$.

kutp:=proc(A, j) local a, b, u, v; u:= A[1]: v := A[2]:
a := coeff(j, x, 1):b := coeff(j, y, 1):
subs({x = u, y = v}, j)^2/(a^2+b^2): end:

Sada tražimo one vrijednosti za parametre v i w kada će točka I biti jednako udaljena od pravaca BC, CA, i AB.

rj := solve({kutp(tI, pBC)=kutp(tI, pCA),
kutp(tI, pCA)=kutp(tI, pAB)},{v, w});

Vrlo žurno računalo daje odgovor

$$rj := \{w = w,\, v = w\},\ \{w = 1, v = -7\}\,.$$

To znači da ili w može biti bilo koji realan broj i da mu v mora biti jednak što nam očito ne odgovara ili da je $w = 1$ i $v = -7$. Koje su tada tražene jednadžbe stranica trokuta ABC dobijemo naredbama:

subs(rj[2], pBC); subs(rj[2], pCA); subs(rj[2], pAB); □

Drugo rješenje Zadatka 2 u MAPLE-u. I u ovom rješenju isto ćemo prvo zadati danu točku A i pravce (simetrale kuteva) njihovim jednadžbama. Zatim ćemo pretpostaviti da tražene jednadžbe stranica imaju oblike $a\,x - y + b = 0$, $c\,x - y + d = 0$, i $e\,x - y + f = 0$ za neke za sada neodređene realne brojeve a, b, c, d, e, i f.

tA := [2, -4]: sB := x+y-2: sC := x-3*y-6:
pAB := a*x-y+b: tCA := c*x-y+d: pBC := e*x-y+f:

I ovdje ćemo koordinate središta I upisane kružnice i vrhove B i C dobiti rješavanjem odgovarajućih parova jednadžbi pravaca na kojima leže: točka I na s_B i s_C; točka B na AB i s_B; točka C na pravcima CA i s_C; i točka W na pravcima AB i CA;

tI:=subs(solve({sB, sC},{x, y}), [x, y]):
tB:=subs(solve({sB, pAB},{x, y}), [x, y]):
tC:=subs(solve({sC, pCA},{x, y}), [x, y]):
tW:=subs(solve({pAB, pCA},{x, y}), [x, y]):

Mi znamo da je točka W upravo zadana točka A pa dobivamo prva dva uvjeta za naših šest nepoznanica a, b, c, d, e, i f.

u1 := tW[1]-tA[1]: u2 := tW[2]-tA[2]:

Slijedeća dva dobijemo ako iskoristimo ranije definiranu funkciju **utp** koja točki i pravcu pridružuje uvjet da bi točka ležala na pravcu. Ove naredbe definiraju uvjete zadatka da točke B i C leže redom na pravcima s_B i s_C.

u3 := utp(tB, [1, 1, -2]): u4 := utp(tC, [1, -3, -6]):

Peti i šesti uvjet dobivamo tako da ponovo iskoristimo to da je točka I jednako udaljena od stranica trokuta. Za razliku od prvog rješenja, ovdje ćemo koristiti dvije važne pomoćne funkcije. Prva od njih **ku** računa kvadrat udaljenosti dviju danih točaka a druga **pro** točki i jednadžbi pravca pridružuje koordinate ortogonalne projekcije te točke na zadani pravac.

ku := proc (A, B) local a, u, b, v; a := A[1]: u := A[2]:
b := B[1]: v := B[2]: factor(simplify((a-b)^2+(u-v)^2) end:

pro := proc (A, j) local a, b, c, u, v; u := A[1]: v := A[2]:
a:=coeff(j,x,1): b:=coeff(j,y,1): c:=coeff(coeff(j,x,0),y,0):
factor(simplify([-(b*a*v-u*b^2+a*c)/(a^2+b^2),
(-b*c+a^2*v-a*u*b)/(a^2+b^2)])): end:

u5:=ku(tI,pro(tI,pAB))-ku(tI,pro(tI,pCA)):
u6:=ku(tI,pro(tI,pAB))-ku(tI,pro(tI,pBC)):

Na kraju, tražimo da nam MAPLE nađe tražene koeficijente.

rj:=solve({u1,u2,u3,u4,u5,u6}, {a,b,c,d,e,f});

Gotovo istog trenutka računalo će na ekranu ispisati:

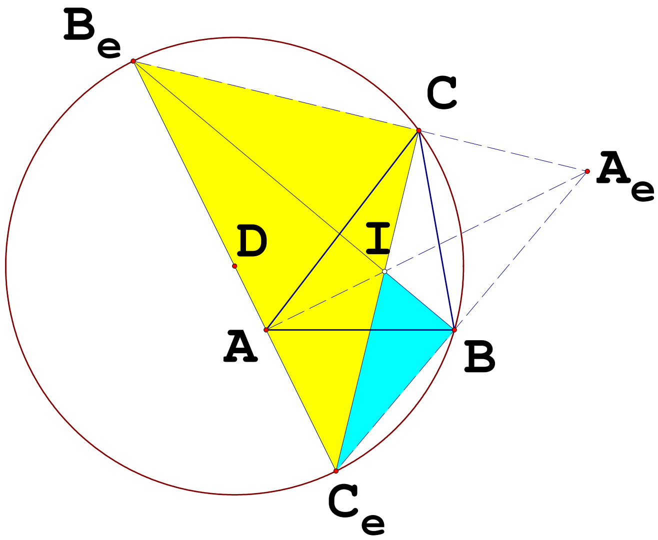
$$rj := \{f = 6/7, d = -6, b = 10, e = -1/7, c = 1, a = -7\}.$$

Odavde lagano čitamo da su tražene jednadžbe $y = -7\,x + 10$ (za AB), $y = x - 6$ (za CA), i $y = -\frac{x}{7} + \frac{6}{7}$ (za BC). □

9. Rješenje Zadatka 2 računalom u SKETCHPAD-u

Prvo rješenje Zadatka 2 u SKETCHPAD-u. Najlakše je Zadatak 2 riješiti čisto konstruktivno metodom koja se izvodi na slijedeći način u verziji 4 programa GEOMETER'S SKETCHPAD.

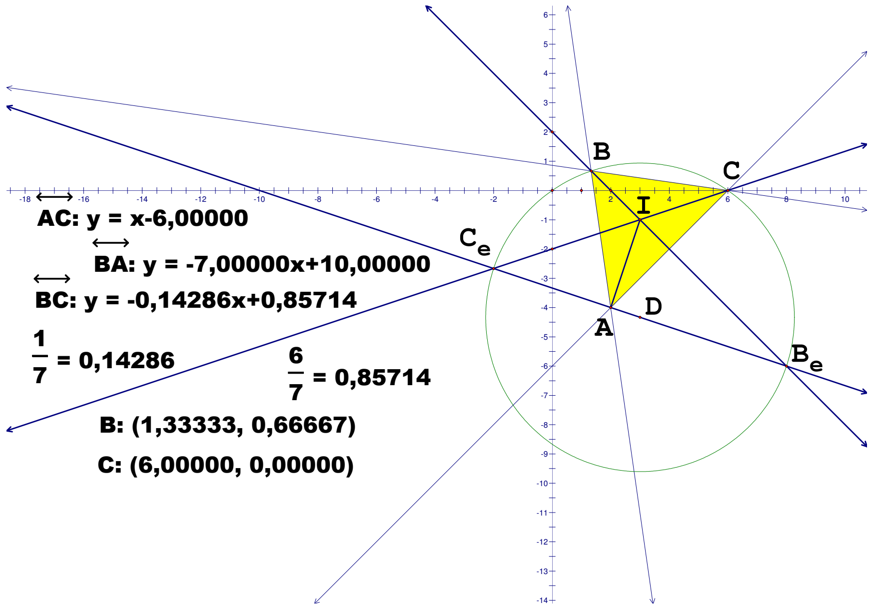
Nacrtam trokut ABC i alatom Angle Bisector pod Construct mu odredim simetrale unutrašnjih kuteva koje se sjeku u središtu I upisane kružnice. Zatim u vrhovima A, B, i C oruđem Perpendicular Line opet pod Construct nacrtam okomice na simetrale unutrašnjih kuteva (to su simetrale vanjskih kuteva). One određuju središta A_e, B_e, i C_e tri pripisane kružnice trokuta ABC. Kako su kutevi $\angle B_eCC_e$ i $\angle B_eBC_e$ pravi, vidimo da vrhovi B i C leže na kružnici kojoj je dužina B_eC_e promjer. Po pretpostavkama Zadatka 2 mi znamo točku A i



Slika 9. Prikaz u SKETCHPAD-u konstruktivne metode rješavanja Zadatka 2.

pravce BB_e i CC_e. Presjek tih pravaca je središte I upisane kružnice. Spajanjem točaka A i I dobijemo simetralu kuta A. Sada će okomica na AI u točki A sječi dva zadana pravca BB_e i CC_e u točkama B_e i C_e. Nađemo alatom Midpoint polovište D dužine B_eC_e i onda pomoću Circle By Center + Point nacrtam kružnicu kojoj je ta dužina promjer. Ta kružnica će sječi pravce BI i CI (zadane simetrale kuteva B i C) u traženim točkama B i C.

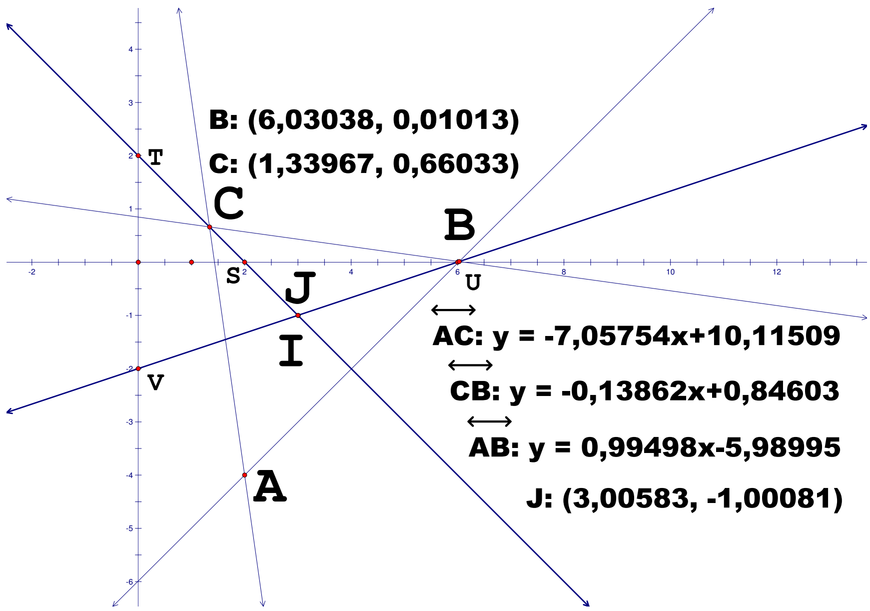
U našem Zadatku 2 primijenim gornju metodu ovako. Prvo pod alatima GRAPH odaberem Plot Points... i unesem koordinate $(2, -4)$



Slika 10. Prvo rješenje Zadatka 2 u SKETCHPAD-u.

zadane točake A. Sada bi smo mogli sa Plot New Function nacrtati dva zadana pravca $x + y - 2 = 0$ i $x - 3y - 6 = 0$ ali je korisnije ako nađemo dvije različite točke na svakom od tih pravaca i onda ih nacrtamo oruđem Line pod Construct. Obično se traže točke gdje pravac sječe koordinatne osi jer se one dobivaju lagano uvrštavanjem $x = 0$ i $y = 0$ u jednadžbama i rješavanjem redom po y i x. Dakle, prvi pravac $x + y - 2 = 0$ sječe x-os u točki $(2, 0)$ a y-os u točki $(0, 2)$ dok drugi pravac $x - 3y - 6 = 0$ sječe x-os u točki $(6, 0)$ a y-os u točki $(0, -2)$. Ucrtam li sada sa Plot Points... pod Graph te četiri točke mogu sa Line pod Construct nacrtati zadane pravce koji su simetrale dva unutrašnja kuta traženog trokuta ABC. Nakom toga lagano nađemo njihov presjek I sa Intersection pod Construct a potom pravac AI, okomicu u točki A na taj pravac, kao i presjeke B_e i C_e okomice sa zadanim pravcima. Onda spojim točke B_e i C_e dužinom i sa Midpoint nađem njeno polovište D i konstruiram kružnicu sa centrom u D koja prolazi točkom B_e alatom Circle By Center + Point. Zatim odredim presjeke te kružnice sa polazna dva pravca da bi smo dobili točke B i C. Nacrtamo li pravce BC, CA, i AB možemo alatom Equation pod Measure dobiti ispisane njihove jednadžbe u eksplicitnom obliku $y = k\,x + \ell$. U jednadžbama od CA i AB nema dvojbe koliki su koeficijenti dok u jednadžbi od BC treba imati šesto čulo da se prepoznaju decimalni brojevi kao $\frac{1}{7}$ i $\frac{6}{7}$. Iz koordinata točaka B i C jasno se vidi da je $B(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ i $C(6, 0)$ pa se primijenom formule $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ za jednadžbu pravca kroz dvije točke lagano nađu točne jednadžbe stranica trokuta ABC. $\square$

Drugo rješenje Zadatka 2 u SKETCHPAD-u. Iako je prvo rješenje vrlo jednostavno malo učenika će se dosjetiti upotrijebiti kružnicu kojoj je B_eC_e promjer. Zato ćemo opisati još jedno jednostavnije rješenje koje ne traži veliku dosjetljivost.



SLIKA 11. Drugo (približno) rješenje Zadatka 2 u SKETCHPAD-u.

Nacrtajmo prvo alatom Plot Point pod Graph točke s koordinatama $A(2, 4)$ (to je zadana točka A), $S(2, 0)$ i $T(0, 2)$ (to su točke u kojima prvi dani pravac $x + y - 2 = 0$ siječe redom x-os i y-os), $U(6, 0)$ i $V(0, -2)$ (to su točke u kojima drugi dani pravac $x - 3y - 6 = 0$ siječe redom x-os i y-os). Onda alatom Line pod Construct nacrtam pravce ST i UV. Na tim pravcima pomoću Point On Object pod Construct odaberem točke B i C. Nacrtam pravce BC, CA, i AB i alatom Angle Bisector opet pod Construct nađem trokutu ABC simetrale unutrašnjih kuteva (dovoljno je samo dvije) čiji presjek će nam dati točku J koja je dakle središte upisane kružnice trokuta ABC. Još nacrtam i presjek I pravaca ST i UV. Izračunam i pokažem koordinate točaka B, C, I, i J te jednadžbe pravaca BC, CA, i AB. Sada odaberem pravac BC i mičemo ga nastojeći da se točka J (koja se također miče) poklopi sa fiksnom točkom I. Kada postignem da su točke I i J podudarne očitam kolike su koordinate i kakve su jednadžbe pravaca. Tim pristupom mogu odrediti tražene jednadžbe jedino približno. □

10. Rješenje Zadatka 3 računalom u MAPLE-u

Rješenje Zadatka 3 u MAPLE-u. Prvo zadam točku T, jednadžbe zadanih pravaca p_1 i p_2, i traženu jednadžbu pravca p s opisanim svojstvom (tj. točka T mora biti polovište dužine AB gdje su A i B presjecišta pravca p s pravcima p_1 i p_2). Kod zadavanja jednadžbe od p koristimo se funkcijom **ptk** za jednadžbu pravca kroz danu točku sa danim naklonom.

tT:=[5,6]:pp1:=x-2*y+4=0:pp2:=3*x-y-3=0:pp:=ptk(tT, k):

Sada nađem točke A i B.

tA := subs(solve({pp, pp1}, {x, y}), [x, y]):

tB := subs(solve({pp, pp2}, {x, y}), [x, y]):

Traženi naklon dobivam pozivanjem ranije definirane funkcije **po** koja paru točaka pridružuje njihovo polovište i zahtjevom da apcisa i ordinata polovišta od A i B budu upravo apcisa i ordinata točke T.

solve({po(tA,tB)[1]=tT[1], po(tA,tB)[2]=tT[2]}, k);

Računalo daje odgovor $-\frac{1}{3}$ pa je tražena jednadžba

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 5) = 0$$

ili nakom množenja sa -3 i prebacivanja lijeve strane na desnu dobivam na kraju $x + 3\,y - 23 = 0$.

Umjesto dvije jednadžbe možemo promatrati samo jednu tako da koristimo funkciju **ku** koja izračunava kvadrat udaljenosti dviju točaka. Dakle, napišemo li

solve(ku(po(tA, tB), tT), k);

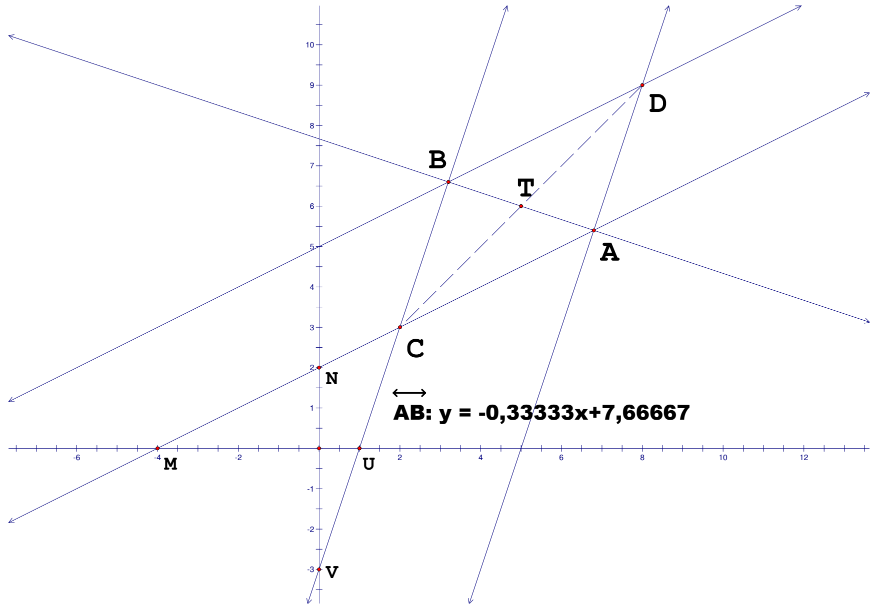
računalo izvještava da su korijeni I (imaginarna jedinica), $-I$, i dva puta $-\frac{1}{3}$. Jasno je da oba kompleksna rješenja moramo zanemariti jer je k realan broj. □

11. Rješenje Zadatka 3 računalom u SKETCHPAD-u

Rješenje Zadatka 3 u SKETCHPAD-u. Prvo unašamo točke $T(5,\,6)$, $M(-4,\,0)$ i $N(0,\,2)$ (gdje prvi pravac p_1 s jednadžbom $x - 2\,y + 4 = 0$ sječe redom x-os i y-os), i $U(1,\,0)$ i $V(0,\,-3)$ (gdje drugi pravac p_2 s jednadžbom $3\,x - y - 3 = 0$ sječe redom x-os i y-os). Zatim odredim presjek C pravaca p_1 i p_2. Točku T odaberem kao centar rotacije i rotiram točku C za 180°. Tako dobijem točku D. Nakom toga povučem točkom D paralele sa pravcima p_1 i p_2. U presjecima tih paralela sa p_2 i p_1 dobiti ćemo točke A i B. Odredim pravac AB i zatražim njegovu jednadžbu. Dobivam $y = -\frac{1}{3}\,x + 7\,\frac{2}{3}$ što je zapravo $y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{23}{3}$ ili $x + 3\,y - 23 = 0$. □

12. Rješenje Zadatka 4 računalom u MAPLE-u

Rješenje Zadatka 4 u MAPLE-u. Prvo zadam točku T, jednadžbu zadane kružnice k i jednadžbu sekante s kroz točku T. Kod zadavanja



SLIKA 12. Rješenje Zadatka 3 u SKETCHPAD-u.

jednadžbe od s koristimo se funkcijom **ptk** za jednadžbu pravca kroz danu točku sa danim naklonom.

tT := [7,-3]: kr := x^2+y^2 = 29: s := ptk(tT, k):

Sada nađem točke P i Q u kojima sekanta sječe kružnicu.

tP := subs(allvalues(solve({kr, s}, {x, y}))[1], [x, y]):

tQ := subs(allvalues(solve({kr, s}, {x, y}))[2], [x, y]):

Tu smo pozvali MAPLE-ovu funkciju **allvalues** koja javno izračunava oba rješenja (kvadratne) jednadžbe. Traženi naklon dobivam pozivanjem ranije definirane funkcije **ku** koja paru točaka pridružuje kvadrat njihove udaljenosti i zahtjevom da taj bude jednak nuli za točke P i Q tj. da se one podudaraju što se dešava upravo onda kada je sekanta prešla u tangentu.

rj := solve(ku(tP,tQ), k);

Računalo hitro daje odgovor $-\frac{5}{2}$ i $\frac{2}{5}$ pa se tražene jednadžbe dobiju naredbama:

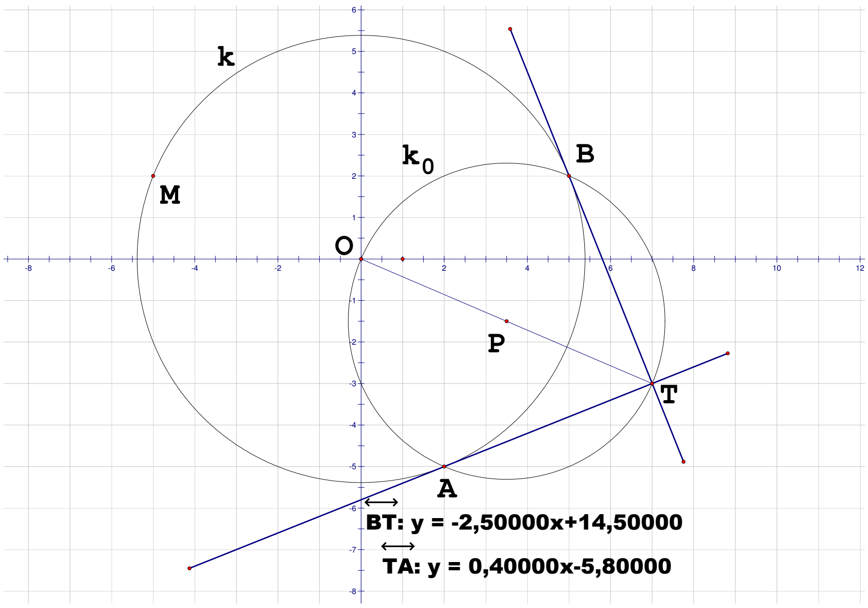
subs(k = rj[1], s); subs(k = rj[2], s);. □

13. Rješenje Zadatka 4 računalom u SKETCHPAD-u

Rješenje Zadatka 4 u SKETCHPAD-u. Prvo treba razmisliti kako nacrtati zadanu kružnicu k. Zamislimo li njezin radijus $\sqrt{29}$ kao

$$\sqrt{29} = \sqrt{25+4} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2}$$

vidimo da će točka $M(-5, 2)$ ležati na zadanoj kružnici k. Zato je ona ishodištem $O(0, 0)$ i točkom M u potpunosti određena. Naravno da je prirodnije umjesto M uzeti točku $(5, 2)$ ali pokazati će se da je to



SLIKA 13. Rješenje Zadatka 4 u SKETCHPAD-u.

upravo točka B (jedno od dirališta traženih tangenti) pa smo ipak uzeli M da ne uđemo u nezgodne komplikacije.

Sada redom nacrtam točke $T(7, -3)$ i $M(-5, 2)$ alatom Plot Point pod Graph, označim ishodište sa O, spojim O i T segmentom, nađem mu polovište P i nacrtam kružnicu k_0 sa središtem u P i točkom O na njoj. Presjek te kružnice k_0 sa zadanom k kojoj je središte ishodište O a M točka na njoj su dvije točke A i B u kojima tangente iz T na kružnicu k nju diraju. Sada nacrtam pravce AT i BT (to su tražene tangente) i očitam njihove jednadžbe. Jasno se vidi da AT ima jednadžbu $y = \frac{4}{10}\,x - \frac{58}{10}$ ili $2\,x - 5\,y - 29 = 0$ dok BT ima jednadžbu $y = -\frac{25}{10}\,x + \frac{145}{10}$ ili $5\,x + 2\,y - 29 = 0$. $\square$

KOPERNIKOVA 7, 10020 ZAGREB, HRVATSKA, EUROPA
E-mail address: CERIN@MATH.HR