STOHASTIČKI INTEGRAL

Integral u odn. na Brownovo gibanje ili druge slučajne procese u neprekidnom vremenu.

Osnovni pojmovi:

- uvjetno očekivanje
- filtracija
- predvidiv i adaptiran proces
- martingal i martingalna transformacija
- Brownovo gibanje

Ako su f, g lijepe funkcije (f neprekidna, g ograničene varijacije tada je

$$\int_0^1 f(t)\,dg(t) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(g(t_i)-g(t_{i-1}))$$

po nizu particija $0 = t_0 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ t.d. očica particije ide k 0

<u>Riemann - Stieltjesov integral</u> od f uodn. na g.

Ako je f derivabilna s ogr. derivacijom na $[0,1]$ možemo definirati i

$$\int_0^1 f(t)\,dB_t(\omega)$$

za sve $\omega \in \Omega$.

Problem

$$\int_0^1 B_t \, dB_t$$

naime B_t nije derivabilna, nije čak ni ograničene varijacije. Ima samo kvadratnu varijaciju $(= t$ na intervalu $[0,t])$, tj.

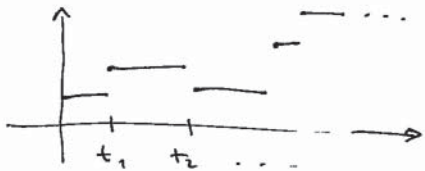
$$\int_0^t (dB_s)^2 = t$$

Itov integral za jednostavne procese

$\exists \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$,

Z_i adaptiran na $(\mathcal{F}_{t_{i-1}})$

$$C_t = \sum_1^n Z_i \, 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t) + Z_n \, 1_{\{T=t\}}$$



$$\int_0^T C_s \, dB_s = \sum_1^n C_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

ITOV INTEGRAL ZA JEDNOSTAVNE PROCESE

- martingal u odn. na prir. filtraciju od (B_t)
- izometrija

$$E\left(\int_0^t C_s \, dB_s\right)^2 = \int_0^t E C_s^2 \, ds \qquad t \in [0,T]$$

- linearan
- ima neprekidne putove

Općeniti Itov integral

Ako je (C_s) proces t.d. je

- adaptiran na Brownovo gibanje.
- $\int_0^T E C_s^2 \, ds < \infty$

tada postoji niz jedn. procesa t.d.

$$\int_0^T E\left[C_s - C_s^{(n)}\right]^2 ds \to 0$$

i možemo definirati

$$\int_0^t C_s \, dB_s \qquad t \in [0,T]$$

ITOV INTEGRAL

kao L_2-limes integrala $\int_0^t C_s^{(n)} \, dB_s$.

I općenito Itov integral je

- martingal
- izometrija
- linearan
- neprekidnih putova

<u>Primjer</u>

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$$

međutim ne po točkama ω, niti po g.s. točkama ω već kao limes u L_2-smislu.

ITOVA LEMA

Stohastički diferencijalni račun ima nešto drugačija pravila od onih na koje smo navikli. Ako su f, b diferencijabilne funkcije mi znamo da vrijedi

$$\left[f(b(s))\right]' = f'(b(s)) \cdot b'(s)$$

ili

$$f(b(t)) - f(b(0)) = \int_0^t f'(b(s))\, db(s) = \int_0^t f'(b(s))\, b'(s)\, ds$$

No ako je f dva puta diferencijabilna za Itov integral vrijedi

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)\, ds$$

tzv. ITOVA FORMULA (LEMA)

(JEDNOSTAVNA)

Ako je $f(\cdot,\cdot)$ funkcija čije su parcijalne derivacije drugog reda neprekidne vrijedi

$$f(t,B_t)-f(s,B_s)=\int_s^t\left[f_1(x,B_x)+\frac{1}{2}f_{22}(x,B_x)\right]dx+$$

$$\int_s^t f_2(x,B_x)\,dB_x \qquad \text{za } s<t$$

1. POOPĆENJE ITOVE LEME

Ako je (X_t) Itov proces, tj. za adaptirane $A^{(1)}, A^{(2)}$

$$X_t = X_0+\int_0^t A_s^{(1)}ds+\int_0^t A_s^{(2)}dB_s$$

i f kao gore

$$f(t,X_t)-f(s,X_s)=\int_s^t\left[f_1(y,X_y)+A_y^{(1)}f_2(y,X_y)+\frac{1}{2}\left(A_y^{(2)}\right)^2 f_{22}(y,X_y)\right]dy$$

$$+\int_s^t A_y^{(2)}f_2(y,X_y)\,dB_y$$

2. POOPĆENJE ITOVE LEME

STOHASTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Za fje a, b tražimo proces (X_t) t.d.

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + b(t, X_t)\,dB_t, \qquad X_0(\omega) = Y(\omega)$$

to je zapravo <u>integralna</u> jednadžba

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\,ds + \int_0^t b(s, X_s)\,dB_s \qquad t \in [0, T] \qquad (*)$$

a zovemo je <u>Itova</u> <u>stohastička</u> <u>diferenc.</u> <u>jednadžba</u>

Proces (X_t) je njeno <u>jako</u> <u>rješenje</u> ako je

- adaptiran na Brownovo gibanje
- integrali (Riemannov i Itov) u $(*)$ su dobro defin.
- (X_t) je funkcija Brownovog gibanja i parametara fja a odn b i zadovoljava $(*)$

NAP) Postoje i slaba rješenja s.d.j.-i, no ona su određena tek preko svojih raspodjela, i ne moraju postojati niti na istom vj. prostoru kao (B_t).

Postoje s.d.j.-e koje imaju samo slaba rješenja no nas one neće zanimati.

I slaba i jaka rješenja s.d.j. (*) nazivamo <u>difuzijama</u>.

Jedinstvenost rješenja (i egzistencija) je garantirana ako su

- a, b neprekidne i
- Lipschitz neprekidne po 2. varijabli, tj. $\exists K$ tol

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K \cdot |x-y| \quad \forall x,y$$

LINEARNA JDŽBA S ADITIVNIM ŠUMOM

$$dX_t = \left[c_1(t)X_t + c_2(t)\right]dt + \sigma_2(t)\,dB_t$$

rješenje:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t c_1(s)\,ds\right)\cdot\left[X_0 + \int_0^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)y(s)\,dB_s\right] \qquad (0)$$

$$y(s) = e^{-\int_0^s c_1(x)dx}$$

Primjer (Vasičekov model)

$$dr_t = c\cdot(\mu - r_t)dt + \sigma\,dB_t$$

$$(0) \Rightarrow r_t = r_0 e^{-ct} + \mu(1-e^{-ct}) + \sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}\,dB_s$$

$$E r_t = r_0 e^{-ct} + \mu(1-e^{-ct}) \longrightarrow \mu$$

$$\operatorname{Var} r_t = \frac{\sigma^2}{2c}(1-e^{-2ct}) \longrightarrow \sigma^2/2c \qquad \Rightarrow \text{ za } r_0 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$

$$\dashrightarrow \quad r_t \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2c}\right)$$

problem (<0)

HOMOGENA JEDNADŽBA S MULTIPLIKATIVNIM ŠUMOM

$$dX_t = c_1(t) X_t \, dt + \sigma_1(t) X_t \, dB_t$$

rješenje:

$$X_t = X_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(c_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma_1(s) \, dB_s \right\} \qquad (A)$$

Primjer (geometrijsko Brownovo gibanje)

$$dX_t = \alpha X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t$$

$$(A) \Rightarrow \quad X_t = X_0 \cdot e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad t > 0$$

normalni log-normalni !?!

<u>Primjer</u> (geometrijsko Brownovo gibanje)

Za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$X_t = X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad t > 0$$

Za $f(t, B_t) = X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$, 1. poopć. Itove Lemme $\Rightarrow$

$$X_t - X_0 = \int_0^t \Big[\underbrace{X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s} \cdot (\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2})}_{f_1(s, B_s)} + \underbrace{\tfrac{1}{2} X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s} \cdot \sigma^2}_{\frac{1}{2} f_{22}(s, B_s)} \Big] ds$$

$$+ \int_0^t \underbrace{\sigma X_0 \sigma e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s}}_{f_2(s, B_s)} dB_s$$

$$= \int_0^t \alpha X_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dB_s \quad \text{h.}$$

Itov proces!

$$dX_t = \alpha X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t$$

Primjer (Ornstein-Uhlenbeckov proces)

$$dX_t = cX_t\,dt + \sigma\,dB_t \quad \leftarrow \quad \text{LANGEVINova JEDNADŽBA}$$

Rješenje:

$$(0) \Rightarrow X_t = e^{ct}X_0 + \underline{\sigma e^{ct}\int_0^t e^{-cs}\,dB_s} \quad \leftarrow \quad \text{O-U proces (neprekidna verzija AR(1) procesa)}$$

Alt. Ideja: za

$$Z_t = \int_0^t e^{-cs}\,dB_s\,, \quad f(t,z) = e^{ct}X_0 + \sigma e^{ct}z$$

stavimo

$$X_t = f(t, Z_t)$$

i primjenimo 2. poopćenje Itove lme. Uočite:

X_t je Gaussov proces t.d. $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2c}\left(e^{c(t+s)} - e^{c(t-s)}\right)$, $s<t$

$EX_t = 0$

NUMERIČKO RIJEŠAVANJE S.D.J-i

- Kad ne možemo naći egzaktno rješenje.
- Simuliramo tipično puno putova B. gibanja (različitih "scenarija") da bismo Monte-Carlo metodama odredili svojstva distribucije pravog rješenja (npr. očekivanje, varijancu, ...)

EULEROVA APROKSIMACIJA

Num. rješenje $(X_t^{(n)})$ s.d.j. je slučajni proces koji aproksimira pravo rješenje na $[0,T]$

particija τ_n: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

očica τ_n: $= \max_{i=1,\dots,n} \Delta_i$ $\quad \Delta_i = t_i - t_{i-1}$

(tipično $t_i = T \cdot \frac{i}{n}$)

Označimo
$$\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$$

pretp. da tražimo rješenje za

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t \qquad t \in [0,T] \qquad (\square)$$

EULEROVA SHEMA

$$X_0^{(n)} = X_0$$
$$X_{t_1}^{(n)} = X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)})\Delta_1 + b(X_0^{(n)})\Delta_1 B$$
$$X_{t_2}^{(n)} = X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 B$$
$$\vdots$$
$$X_T^{(n)} = X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n B$$

zatim $X_t^{(n)}$ interpoliramo linearno između točaka t_i.

U kojem smislu je $X_t^{(n)}$ blizu pravog rješenja?

Jedna ocjena je

$$e_s(\delta_n) = E|X_T - X_T^{(n)}| \qquad \delta_n = \max \Delta_i$$

očica particije

$\boxed{\text{DEF}}$ $X^{(n)}$ je <u>jako numeričko rješenje</u> s.d.j. ($\square$)

ako

$$e_s(\delta_n) \to 0 \quad \text{za} \quad \delta_n \to 0$$

Numeričko rješenje $X^{(n)}$ <u>konvergira jako ka X</u> <u>s redom $\gamma > 0$</u> ako $\exists\, c > 0$ t.d.

$$e_s(\delta_n) \le c \cdot \delta_n^{\gamma} \quad \text{za} \quad \delta_n \le \delta_0$$

Npr. Eulerova aproksimacijska shema konvergira jako s redom $1/2$, za ekvidistantne particije.

MILSTEINova SHEMA

$$X_0^{(n)} = X_0$$

$$\vdots$$

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_t + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\, b'(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \cdot \left[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i\right]$$

Milsteinova aprok. shema za ekvidistantne particije konvergira jako reda 1.

CIJENE OPCIJA U BLACK-SCHOLESovom MODELU

Za neke opcije cijena se može naći korištenjem Itove leme i rješavanjem p.d.j. npr. (eu-call/put). Za općenite slučajne zahtjeve (= zapravo $\mathcal{F}(T)$ izmjerive sluč. varijable) to je puno teže.

Ideja dolazi iz diskretnog vremena: ako možemo naći P^* mjeru t.d. diskontirani proces cijena kao i vrijednost samofinancirajućeg portfelja predstavlja martingal, tada u odsutnosti arbitraže,

$$\text{cijena sluč. zahtjeva} = \text{očekivanje u odn. na } P^* \left(\text{diskontirane vrijednosti sluč. zahtjeva u } T \right)$$

BLACK-SCHOLESOV MODEL

- Rizična imovina

$$dX_t = \alpha X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t \qquad t \in [0,T]$$

- Nerizična imovina

$$t \longmapsto e^{rt} = \beta_t \qquad t \in [0,T]$$

- diskontirana cijena

$$\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$$

- portfelj (predvidiv)

$$V_t = (a_t, b_t)$$ # jedinica riz/neriz. imovine u trenutku t

- samofinancirajući portfelj

$$dV_t = a_t \, dX_t + b_t \, d\beta_t$$

- slučajni zahtjev

$h(T)$ - $\mathcal{F}(T)$ izmjeriva sl. varijabla

GIRSANOVLEV TEOREM

Neka je (B_t) Brownovo gibanje, tada je proces

$$X_t = e^{-qB_t - \frac{1}{2}q^2 t} \qquad t \geq 0 \qquad (**)$$

martingal u odn. na filtraciju Brow. gibanja.

Relacija

$$P^*(A) = \int_A X_T \, dP = E[1_A X_T]$$

definira vjerog. na $(\Omega, \mathcal{F})$ u odn. na koju je

$$\tilde{B}_t = B_t + qt \qquad t \geq 0$$

Brownovo gibanje adaptirano na istu filtraciju.

Posebno u B-S modelu $\exists P^*$ t.d.

$$\tilde{B}_t = B_t + \left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right) t \quad \text{Brown. gibanje}$$

Kako je

$$\sigma B_t + (\alpha - r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t = \sigma \cdot \tilde{B}_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t$$

u odn. na P^* (Girsanov) je

$$\tilde{X}_t = X_0 \cdot e^{\sigma \tilde{B}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{-rt} \cdot X_t$$

martingal $(q = \sigma$ u $(**))$, posebno

$$E^*[\tilde{X}_t] = X_0$$

Dakle ako je (a_t, b_t) samofinancirajući portfelj koji replicira slučajni zahtjev $h = h(X_T)$ tada je vrijednost tog portfelja u trenutku t

$$V_t = E^*\left[e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Posebno cijena slučajnog zahtjeva u $t=0$ je

$$V_0 = E^*\left[e^{-rT} h(X_T) \right]$$

NAP B-S. model je potpun.