MATEMATIČKE FINANCIJE

BOJAN BASRAK

verzija: 22. lipnja 2009.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Financijska tržišta

Matematički modeli su tipično tek gruba aproksimacija složenosti i nepredvidivosti stvarnih financijskih tržišta. Ipak bez razumijevanja matematičkih modela, teško je razumijeti i posljedice koje tržišta ostavljaju na sveukupnu suvremenu ekonomiju i društvo. A posljedice poremećaja financijskih tržišta izuzetno su značajne, čak i za one pojedince i institucije koje ne sudjeluju na njima izravno.

Financijsku imovinu kojom se trguje možemo podijeliti po raznim kriterijima:

▷ Osnovni financijski instrumenti
– nerizični: novac, državne obveznice
– rizični: strane valute, dionice, korporativne obveznice,...

▷ Izvedeni financijski instrumenti
– izvedenice/derivativi: forwards, futures, opcije (call, put, evropske, američke, azijske, egzotične), swaps,... Iako je njihova raširenost vrlo velika, i dalje ih okružuju kontroverzna mišljenja (u često citiranoj izjavi, jedan od najpoznatijih investitora W. Buffet nazvao ih je "oružjem za masovno uništenje"). Posljednjih desetljeća dogodila se prava eksplozija trgovanja ovim vrijednosnicama (već u 2007. ukupna je vrijednost izvedenica u opticaju višestruko nadmašivala ukupno svjetsko bogatstvo, izvor: Bank for International Settlements), no prema nekim izvorima njihova povijest je vrlo duga. Već u 17-om stoljeću trgovanje rižom u Osaki, u Japanu uključivalo je forward ugovore, a u 18-om stoljeću ta trgovina je organizirana u tržište tzv. futures ugovora (izvor: The Economist, 22.1.2009).

1.1.1 Osnovni pojmovi i ugovori

Na tržištu postoji više vrsta financijskih imovina s rizikom, no mi ćemo pretpostaviti da postoji i jedna nerizična imovina:

novac / obveznica (*bond*)

Vrijednost nerizične imovine u bilo kojem trenutku nam je unaprijed poznata.
U $t = 0$, njena vrijednost je

$$S_0^0 = 1,$$

a u $t>0$

$$S_t^0 = e^{rt}, \tag{1.1}$$

dakle $r \in R$ je intenzitet kamate ili kraće (neprekidna) kamatna stopa na tržištu.

Ukoliko promatramo tržište u diskretnim vremenskim trenucima $j = 0, 1, 2, \ldots$ pisat ćemo

$$S_t^0 = (1 + r')^t, \tag{1.2}$$

tj. r' je tada efektivna kamatna stopa i očito je $r' = e^r - 1 > -1$.

U modelu ćemo pratiti još $d \in N$ raznih financijskih imovina čije cijene ćemo smatrati neizvjesnima i označavati sa

$$S_t^i, \quad i = 1, \ldots, d,$$

tj. S_t^i je cijena i-te imovine u trenutku t.

1.1.2 Osnovne pretpostavke financijskih modela u kolegiju

- ▷ Cijene svih osnovnih rizičnih imovina u trenutku $t = 0$ su poznate, a za $t > 0$, cijene se mogu modelirati nenegativnim slučajnim varijablama

- ▷ Sve stranke na tržištu imaju jednak pristup svim informacijama, tj. sva informacija koju sudionici posjeduju je već odražena u cijeni vrijednosnica (*efficient market hypothesis*)

- ▷ Trgovati se može bez transakcijskih troškova (*frictionless market hypothesis*). Ova pretpostavka očito ne vrijedi.

- ▷ Sva financijska imovina je beskonačno djeljiva, likvidna i može se posuđivati bez troškova (*divisibility, liquidity, short selling hypothesis*). Likvidnost imovine ovdje znači da se može kupovati i prodavati u neograničenim količinama.

- ▷ Vrijednost nerizične imovine se mijenja po formuli (1.1) i (1.2), a investitori po istoj stopi mogu investirati i posuđivati novac.

- ▷ Posjedovanjem imovine ne ostvarujemo dodatni prihod ili trošak. Ova pretpostavka očito ne vrijedi općenito naime na dionice koje posjedujemo dobivamo dividendu, dok npr. naftu koju eventualno posjedujemo moramo skladištiti, pa imamo trošak.

Napomena 1.1 Neke od ovih pretpostavki se mogu oslabiti, no analiza modela tada postaje značajno složenija. Npr. postoje modeli koji

- uključuju transakcijske troškove,

- uključuju isplatu dividendi,

- modeliraju i promjene kamatnih stopa slučajnim procesom,

– ograničavaju mogućnost short-sellinga,...

Za danu financijsku imovinu definiramo **relativni povrat** (kraće povrat) u periodu $[t, t+h]$ kao

$$\frac{S^i_{t+h} - S^i_t}{S^i_t}.$$

Ako je $t \in N_0$, i $h = 1$, za relativni povrat na nerizičnu imovinu dobijemo

$$\frac{S^0_{t+1} - S^0_t}{S^0_t} = \frac{(1+r')^{t+1} - (1+r')^t}{(1+r')^t} = r'$$

tj. e.k.s.

U praksi se još promatraju i tzv. **log povrati**

$$\ln \frac{S^i_{t+h}}{S^i_t}.$$

U slučaju da su oba izraza "mala", koristeći Taylorov razvoj logaritamske funkcije dobijemo i da su približno jednaka, tj.

$$\ln \frac{S^i_{t+h}}{S^i_t} \approx \frac{S^i_{t+h} - S^i_t}{S^i_t}$$

Specijalno za nerizičnu imovinu je jasno

$$\ln \frac{S^i_{t+1}}{S^i_t} = \ln \frac{e^{r(t+1)}}{e^{rt}} = r$$

tj. log povrat je upravo intenzitet kamate.

1.1.3 Sadašnja vrijednost budućih isplata

Pretpostavimo da želimo u nekom budućem trenutku T osigurati iznos C. Sadašnja vrijednost tog toka novca je očito

$$Ce^{-rT},$$

a to je uočimo i njegova jedina cijena koja ne omogućuje zaradu bez rizika.

Zaista za cijenu $K > Ce^{-rT}$ možemo napisati

$$K = Ce^{-rT} + (K - Ce^{-rT}).$$

Ako uložimo taj novac u nerizičnu imovinu, u $t = T$ imat ćemo

$$Ke^{rT} = C + (Ke^{rT} - C),$$

dakle i iznos C, ali i još neki iznos striktno veći od 0. Ako je dakle netko spreman platiti više od Ce^{-rT} za ovaj tok novca, mogli bismo zaraditi bez rizika.

Slično, ako se na tržištu iznos C koji dospijeva u $t = T$ može osigurati za cijenu $K < Ce^{-rT}$, onda je racionalno kupiti to osiguranje, za novac koji smo posudili (od banke npr.). Tada u $t = T$ moramo vratiti Ke^{rT}, no mi imamo C, a to je više:

$$K < Ce^{-rT} \Rightarrow Ke^{rT} < C.$$

Prema tome na tržištu ne postoji mogućnost zarade bez rizika ulaganjem ili posudbom nerizične imovine, tada povrati na svaku od tih imovina moraju biti jednaki.

Definicija 1.1. *Ako financijsko tržište dopušta strategiju trgovanja kojojm netko ostvaruje zaradu bez rizika, tu strategiju zovemo* **arbitražom** *(arbitrage) ili* **arbitražnom strategijom**.

Primjer 1.2 Ako na tržištu stranih valuta neki dealer, recimo A ponudi eure po cijeni od 1.25 dolara, dok ih drugi dealer, B npr. želi kupiti za 1.28 dolara, očito postoji mogućnost arbitraže. ⌟

Primjer 1.3 Neka dealer A kupuje eure po 1.26 dolara, dok ih dealer B nudi za 1.28 dolara (npr. u Chicagu odnosno Amsterdamu), te neka je dealer A spreman držati cijenu fiksnom tokom 1 godine. Nadalje, neka su e.k.s. na dolare odnosno eure 2% odnosno 4%, tada opet postoji arbitražna strategija.

Zaista, ako u $t = 0$ posudimo 1 mil. dolara po k.s. od 2% i kupimo od dealera B 781250 EUR, te ih uložimo na godinu dana u $t = 1$ imamo 812500 EUR. Tada dobijemo od A za njih 1023750 USD, 1020000 vratimo banci, a 3750 USD profita zadržimo za sebe. ⌟

Postojanje arbitražne strategije upućuje na to da je netko pogrešno odredio cijenu. Takve mogućnosti su rijetke u praksi i obično su puno teže za pronaći nego u ovim primjerima, a zahtjevaju i transakcije velikog volumena. Investitori koji ih nastoje iskoristiti, tzv. *arbitrageurs*, svojim kupovinama/prodajama uzrokuju korekcije na tržištu i nestajanje arbitraža.

Najvažniji argumenti za određivanje cijena financijske imovine i izvedenica u nastavku se zasnivaju na principu nepostojanja arbitraže (*no-arbitrage principle*).

1.2 Izvedene vrijednosnice

1.2.1 Forward ugovori

Jedna od najosnovnijih i najstarijih izvedenica je tzv. **forward ugovor**: on omogućava da se unaprijed fiksira cijena neke imovine (dionica, valute, žita, nafte,...).

Definicija 1.2. **Forward ugovor** *je ugovor u kojem se jedna strana (kupac) obavezuje na kupnju, a druga strana (prodavatelj) na prodaju financijske imovine* **u trenutku dospijeća** T *po tzv.* **forward cijeni** *ili* **cijeni izvršenja** K**.**

Kupac imovine je po forward ugovoru u tzv. **long poziciji**, a prodavatelj u tzv. **short poziciji**. Kupac se ovim ugovorom želi zaštititi od velikog porasta cijena, a prodavatelj od pada.

Pitanje je kako odrediti cijenu K tako da ne nastane mogućnost arbitraže. Jedna mogućnost je sljedeća: ako pretpostavimo da je buduća vrijednost financijske imovine slučajna varijabla S_1, i da joj čak znamo i očekivanje ES_1, tada bismo mogli pretpostaviti da je nearbitražna forward cijena

$$K = ES_1$$

No to gotovo nikad nije tako.

Primjer 1.4 Pretpostavimo da je e.k.s. $r' = 5\%$ te da želimo odrediti forward cijenu za 1 dionicu T-HT-a, koja danas vrijedi npr. 220 HRK. Ukoliko je datum izvršenja $T = 1$ godina, jedina nearbitražna cijena je

$$K = 220 \cdot 1.05 = 231\text{HRK}$$

Zaista, ako je $K > 231$ onda
u $t = 0$

- posudimo 220 HRK po e.k.s. 5%
- kupimo 1 dionicu T-HT-a za 220 HRK
- sklopimo forward ugovor s forward cijenom K

u $t = 1$

- prodamo dionicu za K HRK
- vratimo dug banci i ostane nam $(K - 231) > 0$ HRK!

Ako je $K < 231$ onda
u $t = 0$

- posudimo 1 dionicu T-HT-a i prodamo je
- investiramo dobivenih 220 HRK po e.k.s. 5%
- zaključimo forward ugovor (u long poziciji) s forward cijenom K

u $t = 1$

- podignemo 231 HRK iz banke
- kupimo jednu dionicu po cijeni $K < 231$ i vratimo je vlasniku od kojeg smo je posudili. Ostaje nam (231-K) HRK profita

⌟

Posudba dionice u gornjem primjeru znači da smo vlasnici -1 dionice i da ćemo je morati vratiti. Proces kojim investitori prodaju dionice i drugu rizičnu financijsku imovinu koja nije u njihovom vlasništvu naziva se **short selling**. Mi ćemo pretpostaviti da je to dopušteno, premda to u RH nije slučaj. I na razvijenim tržištima praksa short sellinga je vrlo kontroverzna pa je po prvom udaru financijske krize 2008. godine kratkotrajno zabranjena i na najrazvijenijim tržištima.

Lema 1.3. *(nearbitražna forward cijena)*
Ako financijsko tržište ne dopušta arbitražu, cijena izvršenja forward ugovora s dospijećem u trenutku T za dionicu čija je sadašnja vrijednost S_0, mora biti

$$K = S_0 \cdot e^{rT} = S_0(1 + r')^T.$$

Dokaz. Ako je $K > S_0 e^{rT}$
u $t = 0$

- prodavatelj u forward ugovoru posudi S_0 USD
- kupi 1 dionicu za taj iznos

u $t = T$

- proda dionicu za K
- vrati $S_0 e^{rT}$ USD banci. I zaradi $K - S_0 e^{rT}$ dakle bez rizika!

Ako je $K < S_0 \cdot e^{rT}$
u $t = 0$

- kupac u forward ugovoru posudi 1 dionicu i proda je (napravi short sell)
- investira S_0 na tržištu novca

u $t = 1$

- podigne $S_0 e^{rT}$ investiranog novca
- kupi jednu dionicu po cijeni K i vrati je vlasniku. Ostaje sa $(S_0 e^{rT} - K)$ zarade bez rizika!

$\square$

Pretpostavimo da precizno znamo točnu razdiobu buduće vrijednosti financijske imovine, npr.

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}, \quad K_1 < K_2$$

(mora biti $K_1 < S_0 e^{rT} < K_2$ inače ćemo imati arbitražu). Primjetimo da će cijena izvršenja K_2 pogodovati kupcu u forward ugovoru (on zarađuje $K_2 - S_0 e^{rT}$ prema lemi) te da će ta cijena biti vjerojatnija što je p bliži 1. No razdioba od S_1 ne igra ulogu u određivanju nearbitražne cijene.

Iako smo u gornjoj lemi govorili o dionici, jednako tako bismo mogli govoriti i o bilo kojoj drugoj financijskoj imovini za koju vrijede osnovne pretpostavke.

Osim forward ugovora na međunarodnim financijskim tržištima se trguje i tzv. **futures ugovorima** koji su sadržajno jednaki forward ugovorima, ali se future ugovori sklapaju u okvirima etabliranih burzi, a burze onda određuju i pravne okvire ovih ugovora. Povijesno su i forward i future ugovori nastali na trgovini poljoprivrednim proizvodima (s namjerom snižavanja rizika za kupce i prodavatelje).

1.2.2 Evropske call i put opcije

Kao i forward ugovori, opcije se mogu koristiti za smanjivanje rizika na financijskom tržištu, no kako ćemo vidjeti zahvaljujući njima rizike je vrlo lako i značajno povećati.

Definicija 1.4. **evropska call opcija** *je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T kupi financijsku neku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K.*
evropska put opcija *je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u trenutku T proda neku financijsku imovinu po nekoj cijeni K.*

Sva tri ugovora koja smo do sada vidjeli zovemo izvedenicama, naime njihova vrijednost je izvedena iz vrijednosti osnovne financijske imovine odnosno dionice na koju se odnose. Za oba ova ugovora vrijeme T se naziva **vrijeme dospijeća** (*exercise time/maturity*), a K se zove **cijena izvršenja**.

Opcije očito mogu biti vrlo korisne: ako znamo da će nam trebati 1 mil. EUR za godinu dana, evr. call opcija koja omogućava da kupimo 1 mil EUR po 7.4 mil HRK nas očito štiti od valutnog rizika.

Slično, ako imamo 1000 dionica T-HT i znamo da će nam trebati 200000 HRK za godinu dana, možemo (u principu) kupiti evr. put opciju koja nam daje pravo prodati te dionice upravo po toj cijeni.

Uočite da za razliku od forward ugovora koji je zapravo dogovor u kojem obje strane imaju obaveze u trenutku dospijeća, kod evr. opcija jedna strana (prodavatelj opcije) ima samo obavezu, dok druga strana(vlasnik/kupac opcije) ima neko **pravo, ali ne i obavezu**. Situacija je jasno nesimetrična i prirodno je očekivati da to pravo vlasnika ugovora mora nešto i koštati. Prava cijena ovakvih ugovora jedno je od centralnih pitanja matematičkih financija.

Ilustrativno je primjetiti da i studenti ponekad, kada dobiju nezadovoljavajuću ocjenu, zatraže ponovnu priliku uz molbu da im se u najgorem slučaju upiše dobivena ocjena. I ovdje se dakako radi o opciji koja daje pravo, ali ne i obavezu (istina ne na imovinu). Svjesni toga studenti budu izrazito ljubazni u takvim prigodama.

Primjer 1.5 Neka je $r' = 10\%$, te neka je

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} 200 & 250 \\ (1-p) & p \end{pmatrix},$$

za neki $p \in (0,1)$ razdioba vrijednosti rizične imovine u $t = 1$. Promotrimo evr. call opciju s cijenom izvršenja 220 u $t = 1$.

Ako cijena bude $S_1 = 200$, opcija će biti bezvrijedna jer dakako, vlasnik opcije ima pravo kupiti za 220 nešto što na tržištu može kupiti za 200, pa to pravo neće iskoristiti. Ako cijena poraste na 250, opciju će iskoristiti, i time može u $t = 1$ odmah ostvariti profit od

$$250 - 220 \quad \text{HRK}$$

⌟

Za sve tri do sada uvedene izvedenice vrijednost u trenu dospijeća se može izraziti kao funkcija vrijednosti imovine na kojoj se zasnivaju (*underlying asset*).

- Općenito vrijednost evropske call opcije u trenutku dospijeća T je

  $$(S_T - K)_+$$

  gdje je S_T=cijena imovine u trenutku $t = T$, K=cijena izvršenja, $a_+ = \max(a, 0), a \in \mathbb{R}$.

- Vrijednost evropske put opcije za vlasnika u trenutku dospijeća T je

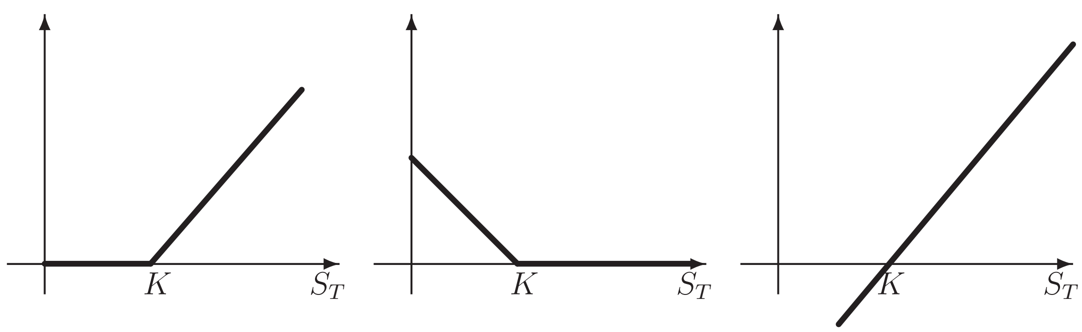
  $$(K - S_T)_+$$

  dakle vlasnik će iskoristiti opciju da proda za K nešto što može prodati za S_T na tržištu samo ako $K \geq S_T$

- Vrijednost forward ugovora za kupca je na sličan način

  $$(S_T - K).$$

  On kupuje za K nešto što vrijedi S_T na tržištu.



Slika 1.1: Vrijednost u trenutku dospijeća kao funkcija cijene dionice za evropsku call opciju, evropsku put opciju i forward ugovor (s lijeva na desno).

Određivanje cijena financijskim opcijama vrlo je netrivijalan problem općenito, stoga ćemo model pojednostavniti.

- ▷ Financijska tržišta vrlo su složena, pa je i njihovo matematičko modeliranje zahtjevan zadatak.

- ▷ Arbitraža je mogućnost da se na tržištu zaradi bez rizika. Na stvarnim tržištima mehanizmi ponude i potražnje uzrokuju da arbitraže vrlo brzo nestaju čak i kad se pojave.

- ▷ Izvedenice su posebna vrsta vrijednosnica, čija vrijednost se izvodi iz vrijednosti neke druge financijske imovine. Najjednostavije izvedenice su evropska call opcija, evropska put opcija i forward ugovor.

Poglavlje 2

Jednoperiodni model financijskog tržišta

Zbog jednostavnosti, tržište ćemo promatrati u samo dva trenutka, koja ćemo označiti sa $t = 0$ odnosno 1. Pretpostavimo da se, uz nerizičnu imovinu, na tržištu može trgovati isključivo još jednom dionicom, čija cijenu označimo sa S_t u trenutku $t = 0$, odnosno 1.

Po osnovnim pretpostavkama S_0 je poznata vrijednost, a za S_1 ćemo pretpostaviti da je nenegativna slučajna varijabla.

Primjer 2.1 Neka je e.k.s. $r' = 0\%$, neka je početna cijena dionice S_0=250 EUR, te neka S_1 ima razdiobu

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} 200 & 400 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

evropska call opcija sa cijenom izvršenja 300 i datumom dospijeća T=1 vrijedit će na dan dospijeća

$$(S_1 - 300)_+$$

tj. ili 100 ili 0. Vrijednost tog novca u $t = 0$ je naravno ista jer je e.k.s. $r' = 0$ pa je

$$\frac{1}{1 + r'} \cdot (S_1 - 300)_+ = (S_1 - 300)_+.$$

Mogli bismo pretpostaviti da je stoga "fair cijena" ovakve opcije upravo očekivana zarade kupca opcije, tj.

$$E(S_1 - 300)_+ = 100 \cdot 1/2 = 50$$

No kako ćemo vidjeti ovakva cijena otvara mogućnost arbitraže; ako ponudimo kupiti ovu opciju po toj cijeni, prodavatelj može zaraditi bez rizika slijedećom strategijom

u $t = 0$

- proda opciju za 50 EUR
- posudi 200 EUR u banci
- kupi jednu dionicu za 250 EUR

u $t = 1$

- ako cijena poraste na 400 EUR, proda opciju i isplati kupca sa 100 EUR
- vrati 200 EUR koje je posudio
- ostane mu 100 EUR čiste zarade
- ako cijena padne na 200 EUR, dionicu proda i vrati dug banci, a kupcu opcije ne duguje ništa pa nema niti gubitka niti zarade

Ukratko, prodavatelj ne može imati gubitak, a s vjerojatnošću 1/2 dobit će 100 EUR. Ista strategija bi donijela mogućnost dobitka bez rizika čak i ako vjerojatnosti pada, odnosno porasta cijene nisu jednake. Uočite da vjerojatnosti ne igraju nikakvu ulogu u određivanju gornje strategije (baš kao što nisu utjecale ni na forward cijenu u lemi 2.2).

Da bismo odredili nearbitražnu cijenu opcije, pogledajmo koliko bi koštao **portfelj** koji točno **replicira** opciju (odn. njenu vrijednost) u $t = 1$. Označimo sa x odnosno y novac odnosno broj dionica koji moramo posjedovati da bismo to postigli. Brojevi x i y moraju zadovoljavati u $t = 1$

$$x + y \cdot 400 = (400 - 300)_+ = 100$$

$$x + y \cdot 200 = (200 - 300)_+ = 0$$

Rješavanjem sustava dobijemo $y = 1/2$ i $x = -100$, dakle sa pola dionice (što je moguće posjedovati po našim pretpostavkama) i posuđenih 100 EUR, a u $t = 1$ možemo isplatiti vlasnika opcije.

U $t = 0$ bismo morali dakle posuditi 100 EUR iz banke i kupiti 1/2 dionice za 125 EUR. Da bismo to postigli nedostaje nam 25 EUR i upravo je to nearbitražna cijena ove opcije. Ako bi netko ponudio više, zaradili bismo bez rizika. No ako bismo ponudili opciju za manje, otvorili bismo kupcu mogućnost arbitraže (kao što ćemo vidjeti). ⌟

2.1 Jednoperiodni binarni model

Ponovo pretpostavljamo da je trgovanje moguće samo u dva vremenska trenutka, $t = 0$ i $t = 1$, a na tržištu postoje samo dvije imovine:

▷ novac čija je vrijednost $S_0^0 = 1$ u $t = 0$, a $S_1^0 = 1 + r'$ u $t = 1$, ($r' > -1$ je e.k.s.)

▷ dionica (tj. rizična imovina) čija je cijena S_0^1 u $t = 0$, a

$$S_1^1 = (1 + X_1) \cdot S_0^1$$

u $t = 1$, gdje je X_1 slučajna varijabla s razdiobom

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

za neke konstante $a < b,\ p \in (0, 1)$.

Model možemo do kraja specificirati tako da odredimo vjerojatnosni prostor na kojem je definirana slučajna varijabla X_1, npr. pretpostavimo

$$\Omega = \{a, b\}, 1 - P(a) = P(b) = P, \text{ te}$$

$$X_1(\omega) = \omega,$$

i promatrimo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Ako sa φ^0 označimo novac koji posjeduje investitor, a sa φ^1 broj dionica, možemo reći da uređen par $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1) \in \mathbb{R}^2$ predstavlja portfelj investitora na ovom tržištu ili formalno:

Definicija 2.1. *Na jednoperiodnom binarnom financijskom tržištu proizvoljan vektor $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1) \in \mathbb{R}^2$ zove se* **portfelj**.

Vrijednost portfelja φ u $t = 0$ je

$$V_0 = V_0(\varphi) = \varphi^0 + \varphi^1 S_0^1,$$

a u $t = 1$ vrijednost iznosi

$$V_1 = V_1(\varphi) = \varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_1^1,$$

što je, uočimo, slučajna varijabla. **Mogućnost arbitraže** sada formalno možemo definirati kao portfelj φ za koji vrijedi

$$\begin{aligned} V_0(\varphi) = 0 & \text{ (ne košta ništa na početku)}, \\ V_1(\varphi) \geq 0 & \text{ (sigurno ne donosi gubitak)}, \\ P(V_1(\varphi) > 0) > 0 & \text{ (s pozitivnom vjerojatnošću donosi profit)}. \end{aligned}$$

Pronađite eksplicitno arbitražni portfelj ako je $r' \leq a$ ili $r' \geq b$, da biste dokazali sljedeću lemu.

Lema 2.2. *Ako ne vrijedi $a < r' < b$, u jednoperiodnom binarnom modelu postoji mogućnost arbitraže.*

Prisjetimo se evropske call opcije, koja se na ovom tržištu može izdati samo na 1 dionicu s datumom dospijeća $t = 1$ i cijenom izvršenja K. Njena vrijednost u $t = 1$ je

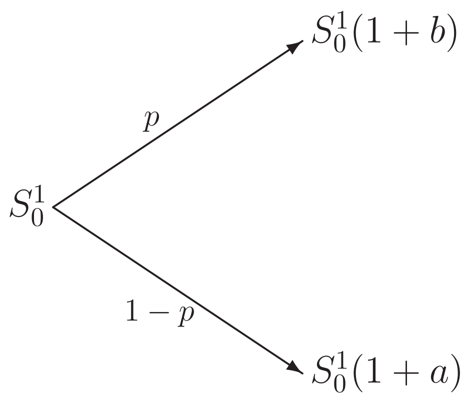
$$(S_1^1 - K)_+.$$

Naš uvodni primjer se lako može reprezentirati u terminima ovog modela; prisjetimo se tamo je

$$a = -1/5, \ b = 3/5, \ p = 1/2, \ r' = 0,$$

a promijena cijena dionice grafički je opisana na Slici 2.3.

Zašto bismo uopće htjeli postati vlasnici evr. call opcije na ovom ili nekom drugom tržištu? Pretpostavimo da iz nekog razloga zaista želimo posjedovati 1 dionicu u trenutku $t = 1$, no u $t = 0$ nemamo dovoljno gotovog novca (niti kreditne sposobnosti) da je



Slika 2.1: Promjena cijene dionice u jednoperiodnom binarnom modelu.

zaista možemo kupiti. Očekujemo da ćemo u trenutku $t = 1$ taj novac imati (iz nekog izvora). Na ovom tržištu znamo da je moguće da se cijena uveća za $60\% = 3/5$ i želimo se zaštititi od tog rizika. Kada bismo kupili ovu opciju sa cijenom izvršenja 300 EUR, za nas bi cijena mogla porasti za najviše 20%.

Kupovinom opcije smo, dakle, eliminirali dio rizika. Još je lakše motivirati kupovinu evr. put opcije, ona nam može garantirati da dionicu koju posjedujemo u trenutku dospijeća uvijek možemo prodati po unaprijed određenoj cijeni, tj. možemo se zaštititi od rizika velikog pada dionice.

Uočite ipak da se kupovinom opcija može uvećati rizik!!! Ako u $t = 0$ kupite call opciju s nadom da ćete profitirati od skoka vrijednosti dionice, ako dionica padne na 200 EUR u $t = 1$ izgubit ćete sav novac (100% dakle) što ste ga uložili u kupnju opcije. Padovi cijena dionica (pogotovo 2008. i 2009. godine) mogu biti vrlo veliki, no gubitak svega uloženog je i u tim okolnostima rijedak događaj na tržištu dionica.

Pokušajmo na jednoperiodnom binarnom tržištu uvesti i opciju, no tako da ne uvedemo mogućnost arbitraže.

Definicija 2.3. *Na jednoperiodnom binarnom financijskom tržištu , slučajan zahtjev C_1 je proizvoljna slučajna varijabla. Ako je $C_1 = h(S_1^1)$ za neku funkciju h, kažemo da je C_1 izvedenica.*

Vrijednost evropske call opcije u $t = 1$ je očito slučajna varijabla

$$C_1 = (S_1^1 - K)_+ = h(S_1^1) : \{a, b\} \to \mathbb{R},$$

gdje je $h(x) = (x - K)_+$, no umjesto te varijable u nastavku ćemo promatrati proizvoljan slučajan zahtjev.

Odredimo nearbitražnu cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva. Već smo vidjeli da očekivana diskontirana cijena slučajnog zahtjeva

$$E\left[\frac{C_1}{1 + r'}\right] ,$$

može dovesti do arbitraže, i to tako da smo napravili portfelj koji točno replicira slučajan zahtjev. Ispostavlja se da je to ključna ideja i u puno složenijim modelima.

Teorem 2.4. *(cijena slučajnog zahtjev u jednoperiodnom binarnom modelu) Pretpostavimo da u jednoperiodnom binarnom modelu vrijedi $a < r' < b$ (inače model dopušta arbitražu), tada za proizvoljan slučajan zahtjev C postoji jedinstven portfelj koji ga replicira, a jedina nearbitražna cijena ovog zahtjeva je*

$$\frac{1}{1+r'}\left[C(a)\frac{b-r'}{b-a}+C(b)\frac{r'-a}{b-a}\right]. \tag{2.1}$$

Dokaz. Pokažimo da za C postoji portfelj φ koji ga replicira. Kako je $C : \{a, b\} \to \mathbb{R}$, φ bi morao zadovoljavati

$$\varphi^0 \cdot (1+r') + \varphi^1 \cdot S_0^1 \cdot (1+a) = C(a),$$

$$\varphi^0 \cdot (1+r') + \varphi^1 \cdot S_0^1 \cdot (1+b) = C(b).$$

Kako $r' > -1, a < b$ ovaj sustav ima jedinstveno rješenje

$$\varphi^1 = \frac{C(b)-C(a)}{S_0(b-a)},$$

$$\varphi^0 = \frac{1}{1+r'} \cdot \frac{C(a)(1+b)-C(b)(1+a)}{b-a}.$$

Vrijednost ovog portfelja u $t = 0$ je dakle

$$V_0 = \frac{1}{1+r'} \cdot \left[\frac{C(a)(b-r')+C(b)(r'-a)}{b-a}\right]$$

Jasno je da ovako određena cijena ne dopušta arbitražu (razmislite zašto). Pokažimo da je upravo $V_0(\varphi)$ jedina nearbitražna cijena za C.

(i) Ako netko ponudi više od V_0 za C, npr. $V' > V_0$, tada u $t = 0$

- prodamo opciju za V'
- za V_0 oformimo portfelj φ
- ostatak $(V' - V_0)$ uložimo u banku

u $t = 1$

- isplatimo vlasnika slučajnog zahtjeva C
- ostane nam ulog $(V' - V_0) \cdot (1 + r')$

(ii) Ako netko prodaje C za $V' < V_0$, tada u $t = 0$

- kupimo opciju za V'
- konstruiramo portfelj $(-\varphi^0, -\varphi^1)$ i zaradimo $V_0 > V'$
- uložimo $(V_0 - V')$ u banku

u $t = 1$

- dobijemo C koji vrijedi upravo kao portfelj koji dugujemo
- ostane nam novac u banci $\square$

Svojstvo jednoperiodnog binarnog tržišta da dopušta repliciranje bilo koje izvedenice naziva se **potpunost**. Koristeći Teorem 2.4 možemo preciznije karakterizirati odsustvo arbitraže u jednoperiodnom binarnom modelu.

Teorem 2.5. *Jednoperiodni binarni model ne dopušta arbitražu ako i samo ako vrijedi $a < r' < b$. U tom slučaju je ovaj model i potpun.*

Dokaz. Već smo pokazali da je gornji uvjet nužan, no prethodni Teorem pokazuje i da je dovoljan, naime za nearbitražnu cijenu u $t = 0$ same dionice S_1^1, direktnim uvrštavanjem u (2.1) dobijemo upravo S_0^1, dakle tržište je bez arbitraže.

Potpunost slijedi iz tvrdnje Teorema 2.4. $\square$

Nije teško zamisliti model u kojem nećemo moći replicirati proizvoljan slučajan zahtjev. Pretpostavimo sličan model kao i prije: $S_0^0 = 1, S_1^0 = 1 + r', S_1^1 = S_0^1(1 + X_1)$ no sada neka bude

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ p_a & p_b & p_c \end{pmatrix},$$

za neke $a < b < c$ i $p_a, p_b, p_c > 0$. Da bismo pronašli replicirajući portfelj za evropsku call opciju s cijenom izvršenja K, moramo naći $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ tako da

$$\varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_0^1(1 + a) = (S_0^1(1 + a) - K)_+$$

$$\varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_0^1(1 + b) = (S_0^1(1 + b) - K)_+$$

$$\varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_0^1(1 + c) = (S_0^1(1 + c) - K)_+$$

No ako npr. $c > K > b$ ovaj sustav neće imati rješenja (rang matrice sustava je 2, no rang proširene matrice je 3). Dakle ne možemo replicirati $(S_1^1 - K)_+$, no u model možemo (teoretski) dodati još koju dionicu te proširiti portfelj!

Uočimo uz oznaku $p^* = (r' - a)/(b - a) \in (0, 1)$ i vjerojatnost P^* takvu da $1 - P^*(a) = P^*(b) = p^*$, formula (2.1) može se zapisati kao

$$V_1 = E^*\left[\frac{C}{1 + r'}\right],$$

tj. uz drugu (potpuno artificijelnu) vjerojatnost nearbitražna cijena proizvoljnog slučajnog zahtjeva je upravo njegova očekivana diskontirana vrijednost.

Posebno, prema (2.1) nearbitražna cijena evropske call opcije (uz uvjet $a < r' < b$) je

$$V_1 = \frac{1}{1 + r'} \cdot \frac{(S_0^1(1 + b) - K)_+(r' - a)}{b - a}$$

Dakle, iako veća vjerojatnost p znači i veću vjerojatnost da će ova opcija svome vlasniku u $t = 1$ donijeti dobit, nearbitražna cijena (sasvim neintuitivno) uopće ne ovisi o parametru p.

2.2 Opis jednoperiodnog modela

Uz osnovne pretpostavke, ponovo pretpostavljamo da financijskom imovinom možemo trgovati samo u trenucima $t = 0$ i $t = 1$. U modelu promatramo $d + 1$ financijsku imovinu:

- ▷ jednu nerizičnu imovinu (novac) čija je vrijednost $S_0^0 = 1$ u $t = 0$, a $S_1^0 = 1 + r'$ u $t = 1$, gdje je $r' > -1$ e.k.s.
- ▷ d rizičnih imovina (dionica) čije su cijene u $t = 0$ realni brojevi $S_0^i,\ i = 1, ..., d$, a u $t = 1$ slučajne varijable $S_1^i,\ i = 1, ..., d$.

Da bi model učinili do kraja preciznim, pretpostavit ćemo da vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na kojem su definirane gornje slučajne varijable zadovoljava:

- ▷ $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\},\ k \in N$, tj. broj elementarnih događaja (tj. stanja u kojima se tržište može naći) je konačan.
- ▷ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ tj. svaki podskup od Ω je i slučajan događaj.
- ▷ $P(\omega_i) > 0$ za sve $i = 1, ..., k$ (tj. sva stanja imaju striktno pozitivnu vjerojatnost).

Vrijednosti financijskih imovina možemo reprezentirati i vektorima

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d), \quad t = 0, 1.$$

Definicija 2.6. *Proizvoljan vektor $\varphi = (\varphi^0, ..., \varphi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ nazivat ćemo* **portfelj** *na jednoperiodnom tržištu. Pritom φ^i predstavlja broj jedinica i-te imovine koju investitor posjeduje.*

Vrijednost portfelja u $t = 0, 1$ možemo zapisati u obliku skalarnog produkta

$$V_0(\varphi) = (\varphi, S_0) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S_0^i,$$

$$V_1(\varphi) = (\varphi, S_1) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S_1^i.$$

Portfelj koji bez ulaganja i rizika omogućava dobitak ponovo ćemo zvati arbitražom.

Definicija 2.7. *Portfelj $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$ nazivamo* **arbitražom** *ako*

$$(\varphi, S_0) = 0, \quad (\varphi, S_1) \geq 0, \quad i \quad P((\varphi, S_1) > 0) > 0. \tag{2.2}$$

Primjetimo definicija arbitraže ne ovisi o vjerojatnosti P iz opisa modela. Naime, ako $P((\varphi, S_1) > 0) > 0$, tada postoji $\omega_j \in \omega$ takav da $(\varphi, S_1)(\omega_j) > 0$, no tada i za svaku drugu vjerojatnost P' takvu da $P'(\omega_j) > 0$ vrijedi relacija (2.2).

2.3 Odsustvo arbitraže u jednoperiodnom modelu

Već smo napomenuli da je razumno zahtjevati da realistični matematički model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu. Stoga je važno odrediti pod kojim je uvjetima gore opisan model bez arbitraže.Tu će nam pomoći slijedeći pojam.

Definicija 2.8. *Za vjerojatnosnu mjeru P^* na (Ω, F) kažemo da je* **neutralna na rizik** *ako*

$$S_0^i = E^* \left[\frac{S_1^i}{1+r'} \right], \quad i = 0, 1, ..., d \tag{2.3}$$

Prema (2.3) dakle, očekivana diskontirana vrijednost u $t = 1$ svih imovina upravo je njihova sadašnja cijena u odnosu na vjerojatnost P^*. Primjetite da ulagači zapravo racionalno očekuju veći povrat na rizičniju imovinu, pa za objektivnu vjerojatnost P tipično vrijedi

$$E(S_1^i) > (1+r')S_0^i$$

dok je (2.3) ekvivalentno

$$E^*(S_1^i) = (1+r')S_0^i, \quad i = 0, 1, ..., d,$$

a to je uvijek istina za nerizičnu imovinu. Dakle, (2.3) je zapravo nužno provjeriti samo za $i \geq 1$. Vjerojatnosna mjera P^* je neutralna na rizik upravo stoga jer uz nju jednake povrate očekujemo od svih imovina.

Podsjetimo se definicije ekvivalentnih mjera.

Definicija 2.9. *Dvije su vjerojatnosne mjere P i P' ekvivalentne ako za sve $A \in F$ vrijedi*

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow P'(A) = 0.$$

Oznaka je $P \approx P'$.

Prema opisu našeg modela P' je ekvivalentna vjerojatnosti P ako i samo ako je $P'(\omega_i) > 0$ za svaki $i = 1, ..., k$.

Za dokaz teorema o odsustvu arbitraže trebat će nam i sljedeći rezultat iz algebre.

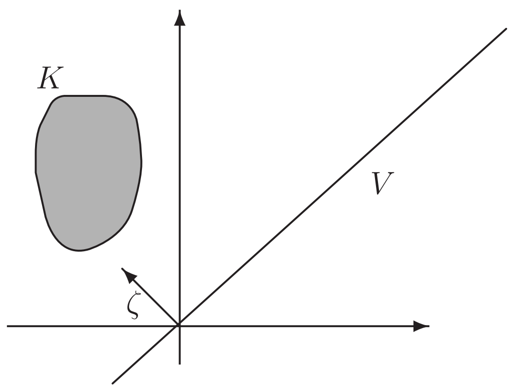
Teorem A. *Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan i konveksan skup, a V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ takav da je $K \cap V = \emptyset$ tada postoji vektor $\zeta \in \mathbb{R}^n$ takav da je*

$$(\zeta, x) > 0 \ \text{ za sve } x \in K \text{ i}$$

$$(\zeta, x) = 0 \ \text{ za sve } x \in V.$$

Za dokaz gornjeg teorema pogledajte omiljenu knjigu iz teorije unitarnih prostora ili Lemu 1.7 u Vondraček [14].

Teorem 2.10. *(fundamentalni teorem određivanja cijena imovine)*
Jednoperiodni model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji bar jedna vjerojatnosna mjera P^* ekvivalentna vjerojatnosti P i neutralna na rizik.



Slika 2.2: Grafički prikaz tvrdnje Teorema A

Dokaz. Ako postoji P^* kao u iskazu teorema, neka $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$ zadovoljava

$$(\varphi, S_1) \geq 0, \quad P((\varphi, S_1) > 0) > 0,$$

tada iz $P^* \approx P$ slijedi i $P^*((\varphi, S_1) > 0) > 0$, no kako $(\varphi, S_1) \geq 0$, tada je i

$$E^*(\varphi, S_1) > 0.$$

Kako je P^* neutralna na rizik

$$(\varphi, S_0) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S_0^i = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i E^* \left(\frac{S_1^i}{1+r'} \right) = \frac{1}{1+r'} E^*(\varphi, S_1) > 0$$

pa φ ne može biti arbitraža.
Pretpostavimo sada da opisani model tržišta ne dopušta arbitražu. Svaku slučajnu varijablu X na $(\Omega, \mathcal{F})$ možemo reprezentirati vektorom $(X(\omega_1), ..., X(\omega_k))$ u prostoru $\mathbb{R}^k$. Skup svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F})$ koje se mogu reprezentirati kao vrijednost nekog portfelja u $t = 1$, a koji ne košta ništa u $t = 0$, čine skup

$$V = \{(\varphi, S_1) : \varphi \in \mathbb{R}^{d+1}, (\varphi, S_0) = 0\}$$

Uvedimo i skup nenegativnih slučajnih varijabli različitih od nule kao

$$\Gamma = \{X : X \in [0, \infty)^k \backslash \{0\}\}.$$

Jasno je da je Γ konveksan konus i podskup od $\mathbb{R}^k$ (skupa svih slučajnih varijabli, uz gornju interpretaciju), te da je V potprostor od $\mathbb{R}^k$. Uočimo tržište ne dopušta arbitražu akko $V \cap \Gamma = \emptyset$. Skup

$$K = \{X : X \in \Gamma, \sum_{i=1}^{k} X(\omega_i) = 1\}$$

je i konveksan i kompaktan, i vrijedi $V \cap K = \emptyset$, pa prema tvrdnji Teorema A, postoji vektor $\lambda = (\lambda(\omega_1), ..., \lambda(\omega_k))$ takav da

$$(\lambda, X) > 0, \qquad \text{za svaki } X \in K, \tag{2.4}$$
$$(\lambda, (\varphi, S_1)) = 0, \qquad \text{za svaki } \varphi \text{ takav da } (\varphi, S_0) = 0. \tag{2.5}$$

Iz (2.4) se lako vidi $\lambda(\omega_i) > 0$ za sve $i = 1, ..., k$, pa možemo definirati vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ relacijom

$$P^*(\omega_i) = \frac{\lambda(\omega_i)}{\sum_{j=1}^k \lambda(\omega_j)}, \ i = 1, ..., k.$$

Kako je izraz na desnoj strani uvijek striktno veći od 0, P^* je ekvivalentna vjerojatnosti P. Nadalje, bez obzira na vrijednost S_0^1 uvijek možemo konstruirati portfelj $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, 0, ..., 0) = (-S_0^1, 1, 0, ..., 0)$ prema (2.5) vrijedi

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda, (\varphi, S_1)) &= \sum_{i=1}^k \lambda(\omega_i)(\varphi^0(1 + r') + \varphi^1 S_1^1(\omega_i)) \\ &= \varphi^0(1 + r') \sum_{i=1}^k \lambda(\omega_i) + \varphi^1 \sum_{i=1}^k \lambda(\omega_i) S_1^1(\omega_i). \end{aligned}$$

Ako obje strane podijelimo sa $\varphi^1(1 + r') \sum_{i=1}^k \lambda(\omega_i)$ slijedi

$$\frac{1}{1 + r'} \sum_{i=1}^k S_1^1(\omega_i) \cdot P^*(\omega_i) = -\frac{\varphi^0}{\varphi^1} = S_0^1,$$

tj.

$$E^*\left[\frac{S_1^1}{1 + r'}\right] = S_0^1,$$

tako da (2.3) vrijedi za $i = 1$, no kako istu metodu mo žemo primjeniti i za $S_0^i, i \geq 2$, P^* je zaista neutralna na rizik. $\square$

2.4 Slučajni zahtjevi

Podsjetimo se definicije evropskih call opcija i forward ugovora iz uvodnog poglavlja. U jednoperiodnom binarnom modelu iskazali smo ih kao funkcije cijene dionice u trenutku $t = 1$. Slično definiramo izvedenice i u općeniom slučaju.

Definicija 2.11. **Slučajni zahtjev** *je proizvoljna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *a* **izvedenica** *je slučajni zahtjev* C *koji za neku funkciju* h *ima prikaz* $C = h(S_1)$.

Pretpostavimo da je **jednoperiodni model tržišta bez arbitraže** tj. skup $\mathcal{P}$ svih vjerojatnosnih mjera neutralnih na rizik je neprazan. Postavlja se pitanje kako odrediti cijenu proizvoljnom slučajnom zahtjevu, ali tako da pritom ne omogućimo arbitražu. Vrijednost (proizvoljnog) slučajnog zahtjeva C u $t = 0$ bit će upravo cijena koju odredimo, npr. $\pi(C)$. Pretpostavimo ćemo da uvođenje novog financijskog instrumenta ne utječe na cijenu postojećih $d+1$ financijskih imovina. Slučajni zahtjev C sada možemo smatrati $d+2$-gom financijskom imovinom, te tako proširiti model postavljajući

$$S_0^{d+1} = \pi(C), \; S_1^{d+1} = C \, .$$

Novo tržište je ponovno bez arbitraže ako možemo i za njega pronaći vjerojatnost neutralnu na rizik; ispostavlja se da zapravo možemo uzeti iste mjere iz skupa $\mathcal{P}$ kao i prije tj. vrijedi:

Teorem 2.12. *(o nearbitražnoj cijeni slučajnog zahtjeva)*
Ako je $\mathcal{P} \neq \emptyset$, tada su nearbitražne cijene slučajnog zahtjeva C zadane sa

$$\left\{ E^* \left[\frac{C}{1+r'} \right] : P^* \in \mathcal{P} \right\} .$$

Dokaz. Ako je π nearbitražna cijena, tada po teoremu 2.10 postoji vjerojatnost P' neutralna na rizika takva da

$$S_0^i = E' \left[\frac{S_1^i}{1+r'} \right] \quad i = 0, \; 1, \ldots, \; d+1, \tag{2.6}$$

posebno $\pi = E'[C/1+r']$, a P' je neutralna na rizik i za suženi model ($i = 0, \; 1, \ldots, \; d$), pa je

$$\pi \in \{ E^* [C/1+r'] : P^* \in \mathcal{P} \} .$$

Obrnuto, ako je $\pi = E^* [C/1+r']$ za neku $P^* \in \mathcal{P}$, tada ponovno vrijedi (2.6) i model je bez arbitraže. □

Iz teorema je jasno da u slučaju $|\mathcal{P}| = 1$, svaki slučajni zahtjev ima jedinstvenu nearbitražnu cijenu. Ukoliko je više vjerojatnosnih mjera neutralnih na rizik, akteri na tržištu mogu doći do različitih nearbitražnih cijena za isti slučajni zahtjev. To se ne može dogoditi za tzv. dostižne zahtjeve.

Definicija 2.13. *Slučajan zahtjev C je* **dostižan** *ako postoji portfelj $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$ takav da $(\varphi, S_1) = 0$. Kažemo i da φ* **replicira** *C.*

Teorem 2.14.
Ako je $\mathcal{P} \neq \emptyset$, te ako je slučajni zahtjev C dostižan, tada on ima jedinstvenu nearbitražnu cijenu.

Dokaz. Za svaki φ koji replicira C i sve $P \in \mathcal{P}^*$ vrijedi

$$E^* \left[\frac{C}{1+r'} \right] = E^* \left[\frac{\sum_{i=0}^d \varphi^i S_1^i}{1+r'} \right] = \sum_{i=0}^d \varphi^i S_0^i = (\varphi, S_0)$$

Ako i ψ replicira C tada
$$(\varphi, S_0) = (\psi, S_0),$$
inače bismo mogli konstruirati arbitražu.
Ako je $P^{**} \in \mathcal{P}$ ponovo je i
$$(\varphi, S_0) = E^{**}\left[\frac{C}{1+r'}\right].$$
Dakle, (φ, S_0) je jedina nearbitražna cijena □

Posebno su interesantni modeli u kojima je svaki slučajan zahtjev dostižan.

Definicija 2.15. *Model financijskog tržišta je* **potpun** *ako je u njemu svaki slučajan zahtjev dostižan.*

Primjetite da se dostižni zahtjevi mogu karakterizirati i algebarski kao zahtjevi C za koji sustav linearnih jednadžbi
$$M_S\varphi = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & \dots & S_1^d(\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^0(\omega_k) & \dots & S_1^d(\omega_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \vdots \\ \varphi^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(\omega_1) \\ \vdots \\ C_1(\omega_k) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$
ima bar jedno rješenje.

Teorem 2.16.
Jednoperiodni model financijskog tržišta je potpun ako i samo ako je $d+1 \geq k$ i matrica M_S u (2.7) ima rang k.

Dokaz. Kako potpunost znači da je slika operatora pridruženog matrici $M_S : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^k$ cijeli $\mathbb{R}^k$, tvrdnja slijedi iz linearne algebre, odnosno teorije rješavanja sustava linearnih jednadžbi. □

Primjetite da se i uvjeti iz definicije vjerojatnosnih mjera P^* neutralnih na rizik (vidi (2.3)) mogu napisati matrično kao
$$M_S^\tau P^* = M_S^\tau \begin{pmatrix} P^*(\omega_1)) \\ \vdots \\ P^*(\omega_k) \end{pmatrix} = (1+r') \begin{pmatrix} S_0^0 \\ \vdots \\ S_0^d \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$
Na osnovu ovog zapisa možemo pokazati slijedeći teorem.

Teorem 2.17. *(o potpunosti jednoperiodnog modela)*
Jednoperiodni model financijskog tržišta bez arbitraže je potpun akko $|\mathcal{P}| = 1$.

Dokaz. Moramo pokazati da je model potpun akko postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Pokažimo nužnost. Zaista ako je model potpun, a P^* i P^{**} su dvije različite ekvivalentne martingalne mjere, iz (2.8) slijedi
$$M_S^\tau(P^* - P^{**}) = 0,$$

pa matrica M_S ne može biti potpunog ranga.
Obrnuto, ako je P^* jedinstveni element iz $\mathcal{P}$, a M_S nije punog ranga, tada postoji neki vektor $Q = (Q_1, ..., Q_k) \in \mathbb{R}^k$ različit on nul-vektora, takav da

$$M_S^\tau Q = 0,$$

gdje 0 na desnoj strani označava nul-vektor u prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$. No prvi redak matrice M_S^τ je prema (2.7) $(1 + r', \ldots, 1 + r')$, pa posebno vrijedi $(1 + r') \sum_{i=0}^{k} Q_i = 0$. Sada za dovoljno mali $\varepsilon > 0$, kako su $P(\omega_i) > 0$ za sve $i = 1, ..., k$, k-dimenzionalni vektor

$$P^{**} = P^* + \varepsilon Q$$

definira vjerojatnosnu mjeru različitu od P^*. No i za nju je također

$$M_S^\tau P^{**} = M_S^\tau P^* = (1 + r') \begin{pmatrix} S_0^0 \\ \vdots \\ S_0^d \end{pmatrix}$$

pa je i P^{**} neutralna na rizik, što je kontradikcija, pa slijedi $|\mathcal{P}| = 1$. $\square$

Rezultate ovog poglavlja možemo sažeti na slijedeći način:

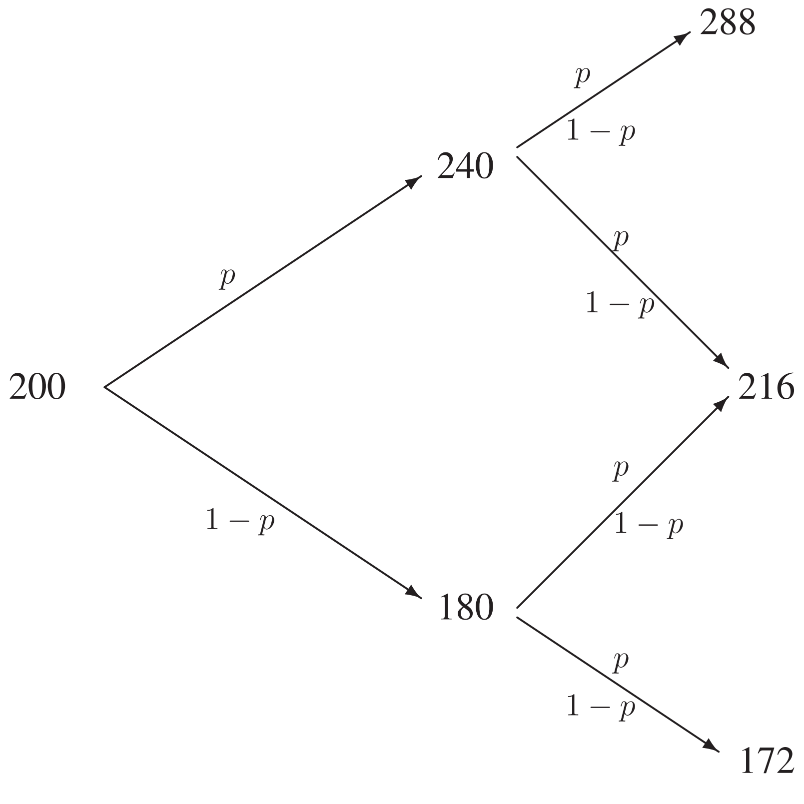
- ▷ Jednoperiodni model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu akko postoji postoji bar jedna ekvivalentna martingalna mjera (odnosno vjerojatnost neutralna na rizik).
- ▷ Nearbitražna cijena svakog slučajnog zahtjeva C je očekivanje $E^*C/(1 + r')$ u odnosu na bilo koju takvu mjeru.
- ▷ Nužan uvjet za potpunost je i da broj imovina na tržištu $d + 1$, bude veći ili jednak broju stanja u kojima se tržište može naći k.
- ▷ Jednoperiodni model bez arbitraže je potpun akko je takva mjera jedinstvena.
- ▷ Jednoperiodni binarni model je bez arbitraže akko $a < r' < b$, a tada je ujedno i potpun.

Poglavlje 3

Uvjetno očekivanje i martingali

Ako tržište promatramo u više od dva (vremenska) trenutka, tada očito i portfelj možemo češće mijenjati i samim tim imamo veći izbor strategija trgovanja. Cijenu evropske call opcije ili drugih izvedenica mogli bismo ponovo pokušati pronaći preko replicirajućih portfelja.

Primjer 3.1 Pretpostavimo da na tržištu postoje samo jedna rizična imovina, čija se cijena mijenja npr. na slijedeći način Ako opcija dospjeva u $T = 2$, s cijenom izvršenja K



njena vrijednost u $T = 2$ je

$$C = (S_2 - K)_+$$

Pretpostavimo zbog jednostavnosti da je e.k.s. $r' = 0$. Ako znamo cijenu dionice S_1

u $t = 1$, i kupujemo ovu opciju u $t = 1$, iz prethodnog poglavlja znamo ($r' = 0, a = -0.1, b = 0.2$) da cijena opcije tada može biti izražena kao

$$\pi_1(C; s) = E^*(C|S_1 = s)$$

koristeći mjeru neutralnu na rizik. No u $t = 0$, S_1 je nepoznata i zapravo je cijena u $t = 1$, slučajna varijabla gledano iz sadašnjosti; i to:

$$C_1 = \pi_1(C; S_1) = E^*(C|S_1).$$

Sad bismo ovu cijenu mogli smatrati slučajnim zahtjevom koji dospjeva u $t = 1$, te odrediti C_1 ponovo koristeći ideju iz jednoperiodnog modela,... $\lrcorner$

Primjer ukazuje na činjenicu da se s vremenom količina investitoru dostupnih informacija mijenja i raste, kao i na vrlo važnu ulogu uvjetnih očekivanja.

3.1 Uvjetna očekivanja

Prisjetimo se definicije vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, te definicije slučajne varijable kao preslikavanja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, za koje vrijedi

$$X^{-1}(\infty, a] = \{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \ , \forall a \in \mathbb{R}.$$

Kažemo da matematičko očekivanje od X postoji ako vrijedi

$$E|X| = \int_\Omega |X| dP \int_\Omega |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$$

i tada

$$EX = \int_\Omega X dP,$$

no očekivanje zapravo najčešće računamo koristeći činjenicu (v. Sarapa [13]) da ako $Eg(X)$ postoji, možemo ga pronaći kao

$$Eg(X) = \int g(X) dP = \int g(x) dF_X(x) \ , \tag{3.1}$$

gdje je F_X funkcija distibucije od X, a integral na d.s. je tzv. Lebesgue-Stieltjesov integral. ([13]). Ako je X diskretna, npr.

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

tada se (3.1) može napisati i kao

$$Eg(X) = \sum_i g(a_i) p_i$$

Ukoliko je A događaj pozitivne vjerojatnosti, tj. $\in \mathcal{F}$ takav da $P(A) > 0$, tada za slučajnu varijablu X možemo izračunati i uvjetnu funkciju distribucije

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A)$$

te i uvjetno očekivanje (ako $E|X| < \infty$) kao

$$E(X|A) = \int x dF_{X|A}(x) = \frac{E[1_A X]}{P(A)}.$$

Ako je Y diskretna slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru, tada je za prebrojivo mnogo $y \in \mathbb{R}, P(Y = y) > 0$, i za sve njih ima smisla računati

$$E(X|Y = y) =: \psi(y).$$

Ako $Y \sim \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \end{pmatrix}$, tada uz uvjet $E|X| < \infty$ i $p_i > 0 \ \forall i$

$$\psi : \{b_1, b_2, \ldots\} \to \mathbb{R}.$$

Sad možemo definirati i uvjetno očekivanje

$$E(X|Y) =: \psi(Y).$$

Uočite, $E(X|Y)$ je slučajna varijabla, možemo je zapisati i kao

$$E(X|Y) = \sum_{b_i} E(X|Y = b_i) 1_{\{Y=b_i\}}$$

Primjetite nadalje da su skupovi $B_i = Y^{-1}(\{b_i\}) = \{Y = b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ događaji u $\mathcal{F}$. Oni generiraju i σ-algebru potencijalno manju od $\mathcal{F}$

$$\mathcal{B} = \sigma(\{B_1, B_2, \ldots\}) = \sigma(Y).$$

Kažemo da su $B_1, B_2, \ldots$ **atomi** σ-algebre $\mathcal{B}$. Dakle mogli bismo pisati i

$$E(X|Y) = \sum E(X|B_i) 1_{B_i}$$

Općenito ako je σ-algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ generirana prebrojivim/konačnim nizom atoma $\{A_1, A_2, \ldots\}$ takvih da $P(A_i) > 0 \ \forall i$, te ako je $E|X| < \infty$, definiramo

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_i E(X|A_i) 1_{A_i} \tag{3.2}$$

Preciznije: $\forall \omega \in A_i$

$$E(X|\mathcal{G})(\omega) = E(X|A_i).$$

Uočimo $E(X|\mathcal{G})$ je slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na $\mathcal{G}$, a vrijedi i

$$\int_A E(X|\mathcal{G}) dP = \int_A X dP \ , \forall A \in \mathcal{G}. \tag{3.3}$$

To je očito za $A = A_i$, no i svaki drugi $A \in \mathcal{G}$ je prebrojiva unija ovih skupova pa jednakost vrijedi i općenito. Vrijedi i obrnuto, $E(X|\mathcal{G})$ u (3.2) je (do na jednakost g.s.) jedina takva slučajna varijabla, izmjeriva u odnosu na $\mathcal{G}$. Zaista, ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva ona je konstantna na svakom A_i, $i = 1, 2, \ldots$ tj. $Y|A_i \equiv y_i$. No ako Y zadovoljava (3.3), tj.

$$\int_{A_i} Y dP = \int_{A_i} X dP = E[X 1_{A_i}]$$

što mora vrijediti prema (3.3) $\Rightarrow$

$$y_i P(A_i) = E[X 1_{A_i}] \Rightarrow y_i = E(X|A_i) \text{ tj. } Y = \sum E(X|A_i) 1_{Y_i}.$$

Ovim motiviramo sljedeću općenitu definiciju:

Definicija 3.1. *Ako je X $\mathcal{F}$-izmjeriva slučajna varijabla takva da $E|X| < \infty$, i $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra tada je* **uvjetno očekivanje od X uz uvjet $\mathcal{G}$** *, u oznaci $E(X|\mathcal{G})$, bilo koja $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla takva da*

$$\int_A E(X|\mathcal{G}) dP = \int_A X dP \,, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Uvjetno očekivanje je slučajna varijabla prema ovoj definiciji i jedinstveno je samo $P|_{\mathcal{G}}$ gotovo sigurno. U slučaju da $\mathcal{G}$ ima niz atoma vjerojatnosti veće od 0, egzistencija slijedi iz formule (3.2). Općenito, egzistencija kao i g.s. jedinstvenost posljedica su Radon-Nikodymovog teorema.

U skladu sa diskretnim slučajem, za slučajne varijable X, Y takve da je X $\mathcal{F}$ izmjeriva, a $\sigma(Y)$ σ-algebra definiramo

Definicija 3.2. $E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$

Primjer 3.2 Ako je (X, Y) slučajan vektor s funkcijom gustoće $f_{X,Y}$, i pripadnim marginalnim gustoćama f_X, f_Y definiramo uvjetnu gustoću od X uz uvjet Y kao

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Definiramo:

$$\psi(y) = E(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

Sad se može pokazati u skladu sa diskretnim slučajem da vrijedi

$$E(X|Y) = \psi(Y) \text{ g.s.}$$

┘

Po definiciji, dvije σ-podalgebre $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ od $\mathcal{F}$ su nezavisne ako $P(G \cap H) = P(G)P(H)$ $\forall G \in \mathcal{G}, \forall H \in \mathcal{H}$. Slučajne varijabla X je nezavisna od $\mathcal{G}$ ako su nezavisne $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$. Pokazuje se i da su slučajne varijable X, Y su nezavisne ako i samo ako su nezavisne $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.

Teorem 3.3. *(svojstva uvjetnog očekivanja)*
Neka je X integrabilna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i $\mathcal{G}$ σ-algebra od $\mathcal{F}$.

1. *Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva $\Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = X$ g.s.*
2. $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$
3. $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$
4. *Ako je $X \geq 0$ g.s. $\Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ g.s.*
5. *Ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla tada $E(YX|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$ g.s.*
6. *Ako $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ g.s.*
7. *Ako je X nezavisna od $\mathcal{G}$ tada je $E(X|\mathcal{G}) = EX$ g.s. Specijalno ako su X i Y nezavisne $E(X|Y) = EX$.*
8. *Ako je i Y integrabilna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tada*
$$E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G}) + \beta E(Y|\mathcal{G}).$$

Primjer 3.3 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ je također σ-algebra, pokažite $E(X|\mathcal{G}) = EX$ za sve X takve da $E|X| < \infty$. ⌟

Jedna interpretacija uvjetnog očekivanja se nameće iz formule (3.2). Ako bismo znali koji će se od atoma $\{A_i\}$ što generiraju σ-algebru $\mathcal{G}$ dogoditi, prije nego znamo točnu vrijednost od X, najbolja ocjena za slučajnu varijablu X je (u srednjekvadratnom smislu) upravo $E(X|\mathcal{G})$. Tako da σ-algebrom možemo modelirati i informaciju koja nam je dostupna u nekom trenutku.

Teorem 3.4.
Ako su X, Y dvije slučajne varijable s konačnim drugim mometom, te ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada
$$E(X - E(X|\mathcal{G}))^2 \leq E(X - Y)^2$$

Dokaz. $E(X-Y)^2 = E(X - E(X|\mathcal{G}) + E(X|\mathcal{G}) - Y)^2 = E(X - E(X|\mathcal{G}))^2 + 2E[(X - E(X|\mathcal{G})) \cdot (E(X|\mathcal{G}) - Y)] + [E(X|\mathcal{G}) - Y)]^2 \geq E(X - E(X|\mathcal{G}))^2$ □

3.2 Martingali

Definicija 3.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor. Familija σ-algebri $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ takva da vrijedi*
$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}, \qquad \forall n \geq 0$$
naziva se **filtracija**.

Filtracija je dakle rastući niz σ-algebri koji nam omogućuje da modeliramo sve veću količinu informacija o tržištu koje prikupljamo u diskretnim vremenskim trenucima $n = 0, 1, \ldots$.

Definicija 3.6. *Za slučajni proces $(X_n)_{n\geq 0}$ kažemo da je* **adaptiran** *na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ ako je X_n izmjeriva u odnosu na $\{\mathcal{F}_n\}$ za svaki $n \geq 0$.*

Filtracija će u financijskoj matematici biti takva da npr. $\{\mathcal{F}_n\}$ sadrži informaciju o cijenama svih financijskih imovina u trenucima $t = 0, \ldots, n$. Investitor koji mijenja svoj portfelj samo u ovim diskretnim vremenskim trenucima, to čini za svaki period $[t-1, t]$ na osnovu informacije dostupnih do trenutka $t-1$, stoga definiramo

Definicija 3.7. *Za slučajni proces $(H_n)_{n\geq 1}$ kažemo da je* **predvidiv** *u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$ ako je H_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_{n-1}$ za svaki $n \geq 0$.*

U nastavku ćemo općenito promatrati i slučajne procese s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ kao i u prethodnom poglavlju.

Definicija 3.8. *Za slučajni proces $\{X_n\}_{n\geq 0}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ za koji $E|X_n| < \infty$ $\forall n \geq 0$, a koji je adaptiran na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, kažemo da je*

- **martingal** *ako $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ g.s. $\forall n \geq 0$*
- **supermartingal** *ako $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ g.s. $\forall n \geq 0$*
- **submartingal** *ako $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ g.s. $\forall n \geq 0$*

Primjer 3.4 Neka su $\{\epsilon_i\}_{i\geq 0}$ njd. slučajne varijable s konačnim očekivanjem $\mu = E\epsilon_i \in \mathbb{R}$. Primjetite da

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$$

čine filtraciju. Ako definiramo

$$S_n = \epsilon_0 + \cdots + \epsilon_n \; n \geq 0,$$

proces (S_n) je slučajna šetnja i očito je adaptirana na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$, kako je

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(S_n|\mathcal{F}_n) + E(\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mu$$

prema Teoremu 3.3. Pa je (S_n) martingal/supermartingal/submartingal ovisno o tome da li je $\mu = 0$ / $\mu \leq 0$ / $\mu \geq 0$. ⌟

Primjer 3.5 Neka filtracija $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\ldots,T}$, predstavlja informaciju dostupnu u trenucima trgovanja. Za slučajni zahtjev $C = C_T$ možemo smatrati da mu je vrijednost potpuno određena tek informacijom dostupnom u trenutku T. Tada je proces

$$X_n = E(C|\mathcal{F}_n) \; n = 0, \ldots, T$$

martingal u odnosu na ovu filtraciju ako je $E|C| < \infty$.
Zaista

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(C|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = E(C|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ g.s.}.$$

⌟

Napomena 3.6 Kao u gornjem primjeru često ćemo promatrati procese i filtracije indeksirane samo po konačnom skupu $n = 0, \dots, T$.

Propozicija 3.9. *(svojstva martingala)*
Neka je (X_n) integrabilan slučajni proces adapiran na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$. Tada vrijedi:

1. *Slučajni proces (X_n) je martingal $\Leftrightarrow E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \; \forall s \leq t$*
2. *Slučajni proces $(X_n)_{n=0,\dots,T}$ je martingal $\Leftrightarrow E(X_T|\mathcal{F}_s) = X_s \; \forall s$*
3. *Ako je (X_n) martingal tada je $EX_t = EX_0 \; \forall t$*
4. *Ako su (X_n) i (Y_n) martingali u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$ tada je i $(X_n + Y_n)$ martingal.*

Ako su (ϵ_n) n.j.d. slučajne varijable koje predstavljaju dobitak u uzastopnim igrama na sreću na uložen 1 dolar, tada slučajna varijabla $S_n = \epsilon_0 + \cdots + \epsilon_n$, $n \geq 0$ predstavlja ukupnu kockarevu imovinu nakon n odigranih igara. Kako je većina igara (npr. rulet ili slično) nenaklonjena kockarima, proces (S_n) je tipično supermartingal. Igrač bi mogao ponekad mijenjati svoju strategiju tako da ulog u pojedinoj igri promijeni na osnovi informacije dostupne do tog trenutka. Pitanje je postoji li strategija kojom bi za sebe nepovoljnu (ili neutralnu) igru pretvorio u povoljnu.

Za općeniti martingal $\{X_n\}$ možemo konstruirati tzv. **martingalne razlike**

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1} \, , n \geq 1.$$

Za slučajnu šetnju (S_n) ove razlike su očito njd. slučajne vaijable $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$.

Definicija 3.10. *Ako je $(X_n)_n$ martingal, a (H_n) predvidiv niz u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$, tada definiramo proces*

$$Z_t = Z_0 + \sum_{i=1}^{t} H_t \cdot \Delta X_t \tag{3.4}$$

gdje je Z_0 konstanta i zovemo ga **martingalna transformacija** *(oznaka:$Z = H \circ X$).*

Teorem 3.11. *(martingalna transformacija je ponovo martingal)*

- *Ako je (X_t) martingal, a (H_t) predvidiv proces, t.d. je svaka H_t ograničena slučajna varijabla, tada je martingalna transformacija (Z_t) u (3.4) također martingal.*
- *Ako je (X_t) supermartingal, a (H_t) nenegativan predvidiv proces, , t.d. je svaka H_t ograničena slučajna varijabla, tada je proces (Z_t) u (3.4) supermartingal.*

Dokaz. Uočite da je Z_t funkcija slučajnih varijabli $X_0, \dots, X_t, H_1, \dots, H_t, Z_0$ koje su sve $\mathcal{F}_t$ izmjerive pa je to dakako i Z_t. Nadalje, kako je $H_t - \mathcal{F}_t$ izmjeriva

$$E(Z_{t+1} - Z_t|\mathcal{F}_t) = E(H_{t+1}\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = H_{t+1}E(\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 0.$$

Druga tvrdnja se pokazuje analogno. □

Napomena 3.7 Ako je $Z_0 = 0$, martingalna transformacija (Z_t) može se intuitivno razumijeti i kao diskretni stohastički integral $\int H_t dX_t$.

- ▷ Prije nego nam je detaljno poznat rezultat slučajnog pokusa na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, σ-algebrom $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, možemo modelirati (nepotpunu) informaciju o ishodu pokusa koju evt. posjedujemo.
- ▷ Uvjetno očekivanje slučajne varijable X u odn. na σ-algebru $\mathcal{G}$, slučajna je varijabla $E(X|\mathcal{G})$ koja najbolje aproksimira X uz informaciju sadržanu u $\mathcal{G}$.
- ▷ I uvjetno očekivanje zadovoljava uobičajena svojstva kao npr. linearnost i monotonost, no i $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$.
- ▷ Filtracija je rastući niz σ-algebri $(\mathcal{F}_n)$, a martingal je slučajni proces (X_n), integrabilan i prilagođen danoj filtraciji, te takav da $E(X_{n+1}|\mathcal{F}) = EX_n$ g.s.
- ▷ Iz martingala i tzv. predividivog procesa možemo napraviti martingalnu transformaciju, koja i sama predstavlja primjer martingala.

Poglavlje 4

Model tržišta u diskretnom vremenu

4.1 Opis modela

I ovdje slijedimo osnovne pretpostavke iz uvoda, no pretpostavljamo da se na tržištu može trgovati u trenucima $t = 0, 1, \dots, T$ i to sa $(d + 1)$-om imovinom:

- jednom nerizičnom imovinom, čija je vrijednost $S_t^0 = (1 + r')^t$ u $t = 0, \dots, T$
- te d rizičnih imovina čije cijene u $t = 0$ su realni brojevi, a u $t = 1, \dots, T$ su slučajne varijable.

Ponovo pretpostavljamo da je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ končan, te da na izmjerivom prostoru $(\Omega, P(\Omega))$ imamo i vjerojatnost P takva da $P(\omega) > 0 \ \ \forall \omega \in \Omega$. Pretpostavljat ćemo da je zadan i niz σ-algebri $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_t$ koje sadrže informacije o stanju tržišta u trenucima 0 do T. Za vektor cijena svih imovina u trenutku t pišemo

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$$

i pretpostavljamo da je izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.

Definicija 4.1. *Slučajni proces $\varphi = (\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^d)_{t=0,\dots,T}$ predvidiv u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ naziva se* **strategija trgovanja** *(dinamički portfelj).*

Vektor $(\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^d)$ govori koliko jedinica pojedine imovine investitor posjeduje u trenutku t, a cijeli proces određuje strategiju trgovanja u trenucima između 0 i T. Odluke investitor donosi unaprijed za period $[t - 1, t)$ da investira u portfelj φ_t. Vrijednost portfelja u t je

$$V_t(\varphi) = (\varphi_t, S_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i$$

Kako je $V_t(\varphi)$ slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$, proces $(V_t(\varphi))_{t=0,\dots,T}$ je adaptiran slučajan proces.

Definicija 4.2. *Strategija (φ_t) je* **samofinancirajuća** *ako $(\varphi_t, S_t) = (\varphi_{t+1}, S_t)$ $t = 0, \dots, T$.*

Dakle vrijednost samofinancirajućeg portfelja na kraju perioda $[t-1, t)$ i na početku perioda $[t, t+1)$ jednake su. Za sve portfelje u nastavku ćemo pretpostavljati da vrijedi $\varphi_0 = \varphi_1$. Vrijednosti portfelja kao i cijene dionica moramo diskontirati na današnju vrijedost , tako uvodimo oznake

$$\widetilde{S}_t^i = \frac{1}{(1+r')^t} S_t^i,$$
$$\widetilde{V}_t(\varphi) = (\varphi_t, \widetilde{S}_t).$$

Uočite $\widetilde{V}_0(\varphi) = V_0(\varphi)$.

Uočite nadalje da je φ samofinancirajuća akko $\forall t = 1, \ldots, T$

$$V_{t+1}(\varphi) = (\varphi_{t+1}, S_{t+1}) = (\varphi_t, S_t) + (\varphi_{t+1}, (S_{t+1} - S_t)) = V_t(\varphi) + (\varphi_{t+1}, \triangle S_{t+1}), \tag{4.1}$$

uz oznaku $\triangle S_t = S_t - S_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, T$, za vektor promjene cijena dionica u periodu između $t = 1$ i t. No ako uvedemo oznaku

$$\triangle \widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t - \widetilde{S}_{t-1}$$

vidimo da je uvjet (4.1) ekvivalentan uvjetu

$$\widetilde{V}_{t+1}(\varphi) = \frac{1}{(1+r')^{t+1}} (\varphi_{t+1}, S_{t+1}) = (\varphi_{t+1}, \widetilde{S}_{t+1}) = \widetilde{V}_t(\varphi) + (\varphi_{t+1}, \triangle \widetilde{S}_{t+1}) \quad t = 0, \ldots, T-1$$

ili uvjetu

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{t} (\varphi_j, \triangle \widetilde{S}_j), \quad t = 0, \ldots, T-1. \tag{4.2}$$

4.2 Odsustvo arbitraže

I u diskretnom vremenu možemo od razumnog matematičkog modela zahtijevati da ne dopušta mogućnost zarade bez rizika, odnosno arbitražu.

Definicija 4.3. *Strategija trgovanja φ je* **dopustiva** *ako je samofinancirajuća i zadovoljava uvjet*

$$V_t(|varphi) \geq 0 \text{ za } t = 0, 1, \ldots, T.$$

Dopustiva strategija je **arbitraža** *ako vrijedi i*

$$V_0(\varphi) = 0, P(V_T(\varphi) > 0) > 0 \tag{4.3}$$

Uočite, za dopustive strategije je moguće da poneki φ_t^i bude negativan (tj. short sell je dopušten). Nadalje, zbog dopustivosti, za arbitražu vrijedi $P(V_T(\varphi) \geq 0) = 1$. Ispostavlja se ako tržište ne dopušta abitražu tada ne postoji ni jedna druga strategija φ koja je samofinancirajuća i dopušta zaradu bez rizika tj. vrijedi (4.3) (v. Lake). I u ovom slučaju nepostojanje arbitraže možemo karakterizirati koristeći vjerojatnosne mjere neutralne na rizik.

Definicija 4.4. *Vjerojatnosna mjera P^* na $(\Omega, P(\Omega))$ je* **neutralna na rizik** *ako za sve $i = 0, , 1, \ldots, d$ i sve $t = 0, , 1, \ldots, T-1$ vrijedi*

$$E^*(\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \widetilde{S}^i_t \tag{4.4}$$

Kažemo i da je P^* **martingalna mjera**, *naime uz nju je prema (4.4) vektor diskontiranih cijena martingal, tj. vrijedi*

$$E^*(\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \widetilde{S}_t \quad t = 0, \ldots, T-1.$$

Uočite da o konačnosti očekivanja ne moramo brinuti jer je $|\Omega| = k < \infty$. Relaciju (4.4) moramo dakako provjeriti samo za $i \geq 1$. Nadalje, za $T = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ pa je (4.4) ekvivalentno

$$E^*(\widetilde{S}^0_1|\mathcal{F}_0) = E^*\left(\frac{S^i_1}{1+r'}\right) = S^i_0$$

za sve imovine $i = 0, \ldots, d$, baš kao što smo vidjeli u jednoperiodnom modelu.

Teorem 4.5. *(fundamentalni teorem određivanja cijena)*
Model financijskog tržišta u diskretnom vremenu ne dopušta arbitražu akko postoji bar jedna ekvivalentna vjerojatnosna mjera P^* neutralna na rizik.

Dokaz.. Pokazat ćemo samo dovoljnost. Ako dakle postoji ekvivalentna martingalna mjera P^*, tada je $(\widetilde{S}_t)$ martingal u odnosu na nju. Pokažimo da ne postoji arbitraža. Pretpostavimo suprotno, neka je strategija φ arbitraža, tada zbog $V_0(\varphi) = 0$ vrijedi

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = \sum_{j=1}^{t} \varphi_j \triangle \widetilde{S}_j$$

vidi (4.2), dakle $(\widetilde{V}_t(\varphi))$ je martingalna transformacija, a po Teoremu 3.11 onda nužno i martingal. Prema tome je

$$E^*(\widetilde{V}_t(\varphi)) = E^*(V_0(\varphi)) = 0$$

Zbog dopustivosti od $\varphi \quad \widetilde{V}_T(\varphi) \geq 0$, pa je zbog monotonosti očekivanja

$$P^*(\widetilde{V}_T(\varphi) = 0) = 1$$

što je kontradikcija sa (4.3). Dokaz obrnute implikacije se zasniva na teoremu o separiraju?oj hiperravnini i znantno je kompliciraniji (vidi [8], [14].) $\square$

4.3 Potpunost modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu

I u diskretnom modelu zanimat će nas određivanje cijena izvedenih financijskih imovina, posebno onih čija cijena ovisi o stanju cijena osnovnih financijskih imovina.

Definicija 4.6. **Slučajni zahtjev** *s dospjećem T proizvoljna je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Ako C za neku funkciju h ima prikaz $C = h((S_0, \dots, S_T))$ kažemo da je C izvedenica.*

Primjetite: Kako je $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, C je uvijek $\mathcal{F}_T$ izmjeriva slučajna varijabla.

Primjer 4.7.

- *Evropska call opcija na i-tu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K je izvedenica $C = (S_T^i - K)_t$*
- *Evropska put opcija na i-tu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K je definirana sa $C = (K - S_T^i)_t$*
- *Azijska call opcija na i-tu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K je definirana sa $C = \left(\frac{\widetilde{S}_0^i + \cdots + \widetilde{S}_T^i}{T+1} - K\right)_t$*

Definicija 4.8. *Kažemo da je slučajan zahtjev* **dostižan** *ako postoji samofinancirajuća strategija trgovanja φ takva da je $V_t(\varphi) = C$ i tada kažemo da φ* **replicira** *C.*

Model tržišta bez arbitraže je **potpun** *ako je svaki slučajan zahtjev dostižan.*

Teorem 4.9. *Model tržišta bez arbitraže je potpun akko postoji jedinstvena ekvivalentna vjerojatnosna mjera neutralna na rizik.*

Dokaz.. Pretpostavimo da je model tržišta potpun; tada za svaki slučajni zahtjev C postoji strategija φ takva da je $V_T(\varphi) = C$ pa po (4.2) vrijedi

$$\frac{1}{(1+r')^t} = \widetilde{V}_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{t} (\varphi_j, \triangle \widetilde{S}_j),$$

a to je martingal u odnosu na mjeru neutralnu na rizik. Ako su P^* i P^{**} dvije takve mjere tada

$$E^*(\widetilde{V}_T(\varphi)) = V_0(\varphi) = E^{**}(\widetilde{V}_T(\varphi))$$

Posebno

$$E^*(C) = E^{**}(C),$$

stavimo $C = 1_A$ za $A \subseteq \Omega$ i slijedi $P^* = P^{**}$.

Pretpostavimo da je tržište bez arbitraže, te da postoji jedinstvena ekvivalentna vjerojatnosna mjera P^*. Skup svih dostižnih slučajnih zahtjeva je

$$V = \{u_0 + \sum_{j=1}^{T} (\varphi_j, \triangle \widetilde{S}_j) : u_0 \text{ je konstanta }, (\varphi_t) \text{ je dopustiva strategija}\}$$

Ako postoji zahtjev C koji nije dostižan, tada

$$\frac{C}{(1+r')^T} \notin V$$

posebno $V \not\leq \mathbb{R}^K$($\mathbb{R}^K$ ponovno identificiran sa skupom svih slučajnih varijabli na Ω).
Za $X,\ Y\ :\Omega \to \mathbb{R}$ definiramo skalarni produkt sa

$$(X,\ Y) = E^*[X \cdot Y]$$

Kako $V \neq \mathbb{R}^K$ postoji slučajna varijabla $X \neq 0,\ X \in V^t$, stavimo

$$P^{**}(\omega) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2||X||_\infty}\right) P^*(\omega)$$

gdje je $||X||_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega|$. Jasno je $\left(1 + \frac{X(\omega)}{2||X||_\infty}\right) > 0$ za sve ω, pa je $P^*(\omega) > 0$ za sve ω. Nadalje

$$\sum_\omega P^{**}(\omega) = \sum_\omega P^*(\omega) + \frac{1}{2||X||_\infty} E(X \cdot 1) = 1$$

jer je $1 \in V$ (npr. za $u_0 = 1$, i $\varphi \equiv 0$) $\Rightarrow X \perp 1$ tj. $E(X \cdot 1) = 0$.
Provjerite i da je P^{**} neutralna na rizik.
Za svaku dopustivu strategiju φ je

$$E^{**}[\sum_{j=1}^T (\varphi_j, \triangle\widetilde{S}_j)] = E^*[\sum_{j=1}^T (\varphi_j, \triangle\widetilde{S}_j)] + \frac{1}{2||X||_\infty} E^*[X \cdot \sum_{j=1}^T (\varphi_j, \triangle\widetilde{S}_j)] = 0$$

jer je P^* ekvivalentna martingalna mjera, a $X \perp V$.
Uzmimo za fiksni $i \geq 1,\ A \in \mathcal{F}_t$ slijedeće: $\varphi^i_{t+1} = 1_A,\ \varphi^i_j = 0$ za sve ostale i, j, a φ^0_j izaberemo tako da dobijemo samofinancirajuću strategiju (za d.z.). Očito je

$$\sum_{j=1}^T (\varphi_j, \triangle\widetilde{S}_j) = 1_A(\widetilde{S}^i_{t+1} - \widetilde{S}^i_t) \quad \text{pa je}$$

$$E^{**}1_A(\widetilde{S}^i_{t+1}) = E^{**}1_A(\widetilde{S}^i_t) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_j$$

$$\Rightarrow E^{**}(\widetilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \widetilde{S}^i_t$$

tj. P^{**} je mjera neutralna na rizik. □

Ako je tržište bez arbitraže potpuno, za svaki slučajni zahtjev C postoji dopustiva samofinancirajuća strategija φ koja ga replicira (zovemo ju **hedging strategija**, tj strategija potpune zaštite).

Kako je $(\widetilde{V}_t(\varphi))$ martingal u odnosu na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik $P^* \Rightarrow (\widetilde{V}_t(\varphi)) = E^*[\widetilde{V}_T(\varphi)|\mathcal{F}_t] = E^*[\frac{C}{(1+r')^T}|\mathcal{F}_t]$.
Posebno, na potpunom tržištu za svaki slučajan zahtjev C njegova nearbitražna cijena u trenutku $t = 0$ je

$$C_0 = V_0(\varphi) = E^*\left[\frac{C}{(1+r')^T}\right]$$

U suprotnom: ako bi netko ponudio zahtjev za manje ili ga bio spreman kupiti za više od C_0 lako bismo konstruirali arbitražu.

Baš kao i u jednoperiodnom modelu dakle, objektivna vjerojatnost P **ne** utječe na cijenu, ona se izvodi iz replicirajućeg portfelja.

!!!!!! Dodati definiciju i primjer američke opcije na kraj poglavlja.

4.4 Cox-Ross-Rubinstein (ili binomni) model

Proširimo jednoperiodni binomni model na vremenske trenutke $t = 1, \dots, T$.
Postavimo: $\Omega = \{a, b\}^T$ i za $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T) \quad P(\omega) = P(\omega_1) \cdots P(\omega_T)$ gdje je

$$P(\omega_i) = \left\{ \begin{array}{cc} p & \omega_i = b \\ 1-p & \omega_i = a \end{array} \right\}$$

za neki parametar $p \in (0, 1)$ te realne brojeve $a < b$. Dakle $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ je produkt vjerojatnosnih prostora, tj. model za nezavisno ponavljanje istog pokusa koji ovdje može imati samo dva ishoda a i b. Na Ω lako možemo definirati niz n.j.d. slučajnih varijabli: $X_1, \dots, X_T$ tako da stavimo

$$X_k(\omega) = \omega_k \ \text{ za } \ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$$

Očito X_i imaju razdiobu

$$X_i = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(usporedite sa jednoperiodnim binarnim modelom). U ovom modelu pratimo samo dvije financijske imovine:

- novac, čija vrijednost je $S_t^0 = (1 + r')^t$ za neki $r' > 1$ i sve $t = 0, 1, \dots, T$
- dionicu (rizičnu imovinu), čija cijena S_t^1 u $t = 0$ je poznata konstanta, a u $t = 1, 2, \dots, T$ zadovoljava $S_t^1 = S_0^1 \cdot (1 + X_1) \cdots (1 + X_t)$

Filtracija koju ćemo koristiti neka je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_t = \sigma\{X_1, \dots, X_t\} \ t \geq 1$
Dakle $\mathcal{F}_t$ sadrži sve informacije o ishodu prvih t pokusa.

Primjer 4.10. *(D.Z.)*
Pokažite da za $T = 2$ vrijedi

$$\mathcal{F}_1 = \{\{(a, a,), (a, b)\}, \{(b, a), (b, b)\}, \emptyset, \Omega\}$$

Teorem 4.11. *CRR model ne dopušta arbitražu akko je $a < r < b$.*

Dokaz.. Pokažimo da uz uvjet $a < r < b$, postoji bar jedna ekvivalentna mjera neutralna na rizik. Postavimo

$$P^* = \frac{r' - a}{b - a}$$

i $P^*(b) = 1 - P^*(a) = P^*$, te $P^*(\omega) = P^*(\omega_1) \cdots P^*(\omega_T)$ za $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_T)$.
Sad su ponovo X_i njd. no imaju razdiobu

$$X_i \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}$$

Zbog nezavisnosti je jasno

$$E^*(X_t | \mathcal{F}_{t-1} = E^*(X_t) = r'$$

pa za

$$\widetilde{S}_t^1 = \frac{1}{(1+r')^t} S_0^1 \cdot (1+X_1) \cdots (1+X_t)$$

vrijedi

$$E^*(\widetilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t) = E^*(\widetilde{S}_t^1 \cdot \frac{(1+X_{t+1})}{(1+r')} \mid \mathcal{F}_t) = \widetilde{S}_t^1$$

Dakle $\widetilde{S}_t$ je martingal u odnosu na P^*.
Ukoliko je $r' \leq a$ ili $b \geq r'$ lako se konstruira portfelj koji predstavlja arbitražu (D.Z.), što pokazuje i obrat. □

Može se pokazati da vrijedi i

Teorem 4.12. *Ako je $a < r' < b$ CRR model je i potpun.*

▷ Financijskog tržišta u diskretnom vremenu modeliramo preko slučajnog procesa cijena u trenucima $t = 0, 1, \ldots, T$.

▷ Strategiju trgovanja modeliramo predvidivim slučajnim procesom u odn. na filtraciju određenu procesom cijena. Takva strategija je arbitraža ako omogućuje zaradu bez rizika.

▷ Model financijskog tržišta u diskretnom vremenu ne dopušta arbitražu akko postoji postoji bar jedna ekvivalentna martingalna mjera (odnosno vjerojatnost neutralna na rizik).

▷ Model tržišta bez arbitraže je potpun ako je svaki slučajni zahtjev dostižan. A nužan i dovoljan uvjet za to je da je e.m.m. jedinstvena.

▷ Nearbitražna cijena svakog slučajnog zahtjeva C je očekivanje $E^*C/(1+r')$ u odnosu na tu mjeru.

▷ Cox-Ross-Rubinsteinov model je višeperiodno poopćenje binarnog modela, u njemu su uvjeti za odsustvo arbitraže i potpunost posebno jednostavno izražavaju preko parametara modela.

Poglavlje 5

Brownovo gibanje i stohastički integral

5.1 Brownovo gibanje

Željeli bismo postaviti i neki prirodni model kretanja cijena dionica u neprekidnom vremenu. Iako se u praksi trgovanje obavlja samo u diskretnim vremenskim trenucima, modeli tržišta u neprekidnom vremenu korisna su i elegantna matematička idealizacija.

Osnovni modeli u ovom slučaju izvor nalaze u slučajnom procesu koji zovemo Brownovo gibanje, prema biologu R. Brownu. Početkom 20. stoljeća radovi L. Bacheliera (1900), A. Einsteina (1905) i N. Wienera (1924) postavljaju temelje matematičke teorije ovih procesa. Prvi od ovih autora uočava i potencijal Brownovog gibanja u financijskom modeliranju.

Prisjetimo se CRR modela kod kojeg se cijena dionice ponaša kao proces

$$S_t = S_0(1 + X_1) \cdots (1 + X_t),\ t \geq 0 \tag{5.1}$$

za neke n.j.d. slučajne varijable $X_1, \dots, X_t,\ S_0 \in \mathbb{R}$, koje poprimaju samo dvije vrijednosti u skupu $(-1, +\infty)$. Uočite da (5.1) uvijek možemo napisati kao

$$S_t = S_0 e^{Y_1 + \cdots + Y_t} \tag{5.2}$$

za $Y_t = \ln(1 + X_t)$ n.j.d. slučajne varijable.
Poopćimo model u (5.2) dopuštajući da je Y_t bilo kakav niz slučajnih varijabli s očekivanjem 0 (zbog jednostavnosti) i varijancom σ^2. Tada za sve $s > 0$ vrijedi

$$W_s := S_0 e^{\sum^{\lfloor ns \rfloor} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}} \to^d S_0 e^{\sigma B_s} \ \ n \to \infty \tag{5.3}$$

za neku slučajnu varijablu $B_s \sim N(0, s)$ po centralnom graničnom teoremu (dokažite!), tj. ako proces S_t promatramo u dugom vremenskom periodu, ali pretpostavimo da vrijeme reskaliramo tako da $t = n$ postane $s = 1$, a log povrate reskaliramo sa $\sigma\sqrt{n}$ dobit ćemo proces (W_s) koji za svako fiksno $s > 0$ konvergira slučajnoj varijabli $S_0 e^{(\sigma B_s)}$ kao gore. Može se pokazati da postoji proces (B_s) takav da ova konvergencija vrijedi i na nivou slučajnog procesa (v. [2]). Taj proces je upravo Brownovo gibanje.

Definicija 5.1. *Slučajni proces* $(B_t)_{t \in [0,\infty)}$ *zove se* **standardno Brownovo gibanje** *(ili Wienerov proces) ako vrijedi*

1. $B_0 = 0$

2. *putevi procesa B (tj. $t = B_t(\omega)$) su neprekidni*

3. *za sve $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ prirasti $B(t_1) - B(t_0), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ su nezavisni i stacionarni, tj za sve $s < t$, $n > 0$ vrijedi $B(t) - B(s) =^d B(t+n) - B(s)$*

4. *$B(t) \sim N(0,t)$ za sve $t > 0$.*

Uočimo iz $1), 3)$ i $4) \Rightarrow B(t) - B(s) \sim N(0, t-s) \;\; \forall s < t$

Definicija 5.2. *Za slučajni proces $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$, razdiobe svih vektora $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ za proizvoljne $0 < t_1 < \ldots < t_n$ čine klasu tzv.* **konačnodimenzionalnih razdioba** *procesa X_t. Ako su sve k.d. razdiobe višedimenzionalne Gaussove razdiobe, kažemo da je i proces (X_t) Gaussov.*

Prisjetimo se da je razdioba Gaussovih slučajnih vektora potpuno određena očekivanjem i kovarijancama.

Propozicija 5.3. *Brownovo gibanje je Gaussov proces s očekivanjem 0 i $cov(B_s, B_t) = min(s,t)$ za $s, t \in [0, \infty)$.*

Dokaz.. Pokažimo da za proizvoljne $0 \leq s \leq t$, vektor (B_s, B_t) ima dvodimenzionalnu Gaussovu razdiobu. Primjetite

$$\begin{pmatrix} B_s \\ B_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_s \\ B_t - B_s \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Kako su B_s i $(B_t - B_s)$ nezavisne Gaussove slučajne varijable, vektor na lijevoj strani u (5.4) je transformacija dvodimenzionalnog Gaussovog vektora regularnom matricom, pa dakle i on ima dvodimenzionalnu Gaussovu razdiobu. Iz definicije svojstva $4)$ slijedi $EB_s = 0 \; \forall s$, a iz svojstva $2)$ dobijemo (ako $s < t$)

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = E((B_t + B_s - B_s) \cdot B_s) = 0 + EB_s^2 = s$$

□

Brownovo gibanje ima mnoga neočekivana svojstva (ilustrativno je simulirati par realizacija → vježbe). Npr. može se pokazati da je tzv. **1/2-sebi sličan** proces (D.Z.), a to je signifikantno zbog slijedeće leme (dokaz u TM → vježbe).

Lema 5.4. *Ako je $(X_t))$* **h-sebi sličan proces** *tj. ako za svaki $c > 0$ i $0 < t_1 < \ldots < t_n$ vrijedi*

$$(X_{c+1}, \ldots, X_{c+n}) =^d c^h \cdot (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

tada ako je $h \in (0,1)$ vrijedi za sve $t \geq 0$

$$\limsup_{t \to t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{|t - t_0|} = +\infty \quad g.s.$$

Iz leme dakle slijedi da putevi procesa (B_t) nisu diferencijabilni niti u jednoj fiksnoj točki t_0. Pokažite za D.Z.

1. Ako je (X_t) h-sebi sličan $\Rightarrow X_0 = 0$ g.s.

2. Lema vrijedi za $t = 0$.

Transformacijom Brownovog gibanja možemo dobiti još puno drugih zanimljivih slučajnih procesa u neprekidnom vremenu. Ako definiramo proces

$$Y_t = B_t - t \cdot B_1 \quad \text{za} \ \ t \in [0,1],$$

tada je očito $Y_0 = Y_1 = 0, (Y_t)$ je ponovo Gaussov proces i vrijedi $EY_t = 0 \quad \forall t$ i Cov$(Y_s, Y_t) = \min(s,t) = s \cdot t \quad s,t \in [0,1]$. Proces (Y_t) naziva se i **Brownov most**.

Odaberite realne konstante $\mu, \sigma > 0$ i definirajte

$$Z_t = \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

Uočite (Z_t) je ponovno Gaussov proces t.d. $EZ_t = \mu t$ i vrijedi

$$\text{cov}(Z_s, Z_t) = \sigma^2 \text{min}(s,t) \quad \text{za} \quad s,t \geq 0.$$

Kažemo da je (Z_t) **Brownovo gibanje s driftom**. Iz izraza (5.3) je jasno da će nam posebno biti zanimljiva i slijedeća transformacija

$$G_t = e^{Z_t} = e^{\mu t + \sigma B_t}$$

Proces (G_t) jasno više nije Gaussov, nazivamo ga **geometrijsko Brownovo gibanje**. Svaki konačan niz $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ nazivamo **particijom intervala T**, a niz $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ je pripadna **međuparticija** ako zadovoljava $Y_i \in (t_{i-1}, t_i), i = 1, \ldots, n.$

Funkcija f ili put procesa (X_t) je **ograničene varijacije** na intervalu $[0,T]$ ako

$$\sup \sum_1^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty, \quad \text{odn.}$$

$$\sup_{t_i} \sum_1^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty$$

gdje supremum uzimamo po svim particijama s intervala $[0,T]$. Slično X_t je ograničene p-varijacije ako $\sup_{(t_i)} \sum^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p < \infty$

Propozicija 5.5. *Brownovo gibanje (B_t) je proces g.s. neograničene varijacije dok mu je kvadratna ili 2-varijacija na intervalu $[0,T]$ jednaka T g.s.*

Dokaz.. Uzmimo particiju $t_j = jT/n, \quad j = 0,1,\ldots,n$ i definirajmo $\varepsilon_j = (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}/\sqrt{T/n}, \quad j = 1,\ldots,n \Rightarrow \sum_{j=1}^n |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}| = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \cdot \sqrt{T/n} = \sqrt{nT} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{|\varepsilon_j|}{n}$. Uočite ε_i su n.j.d. i t. normalne, pa po zakonu velikih brojeva suma na desnoj strani u gornjoj formuli konvergira g.s. k $E|\varepsilon_1|$, dok $\sqrt{nT} \to +\infty$ za $n \to \infty$. Za dokaz druge tvrdnje vidi Z.V. $\square$

5.2 Martingali u neprekidnom vremenu

Važno svojstvo Brownovog gibanja je i da predstavlja martingal. Kako bismo definirali martingale u ovom slučaju ponovo trebamo rastuću familiju σ - algebri $\{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \ \ 0 \leq t \leq \infty\}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, koju ćemo i ovdje zvati **filtracija**.

Definicija 5.6. *Proces $(Y_t)_t$ je* **adptiran** *na filtraciju $(\mathcal{F}_t)$ ako je Y_t $\mathcal{F}_t$ - izmjeriva za sve $t \geq 0$.*

Svaki proces (Y_t) ima svoju **prirodnu filtraciju**

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s \ : \ s \in [0,t]), \ \ t \geq 0$$

u odnosu na koju je dakako adaptiran.

Definicija 5.7. *Proces (X_t) je* **martingal u odnosu na filtraciju** *$\{\mathcal{F}_t\}$ ako je adaptiran na $\{\mathcal{F}_t\}$, vrijedi $E|X_t| < \infty$ za sve $t \geq 0$ i*

$$E(X_t \,|\mathcal{F}_s) = X_s \ \ \textit{za sve} \ \ s \leq t. \tag{5.5}$$

Formulu (5.5) opet možemo interpretirati tako da kažemo da je najbolje što možemo reći o budućoj vrijednosti martingala u odnosu na informaciju dostupnu u sadašnjem trenutku upravo njegova sadašnja vrijednost. Koristeći svojstva uvjetnog očekivanja dobijemo

$$EX_t = E(E(X_t \,|\mathcal{F}_s)) = EX_s \ \text{za}\ 0 \leq s < t$$

dakle očekivanje martingala je konstantno.

Lema 5.8.
Brownovo gibanje je martingal u odnosu na svoju prirodnu filtraciju $\{\mathcal{F}_t^B\}$.

ZADACI

1. Dokažite lemu (5.8)
2. Pokažite da je i $(Bt^2 - t)$ martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^B\}$
3. Pokažite da je $EB_t^3 = 0 \, \forall t$, no (B_t^3) nije martingal
4. Za svaki niz $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ proces (B_{t_i}) je martingal u diskretnom vremenu u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_{t_i}^B\}$.

Kao i u diskretnom vremenu, ključnu ulogu u nastavku imaju i martingalne transformacije neprekidnih martingala, no da bismo ih korektno definirali potreban nam je pojam stohastičkog integrala.

5.3 Stohastički integral

Prisjetimo se da za Riemann integrabilnu funkciju $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\int_0^T f(s)ds$ možemo aproksimirati koristeći particiju (t_i) intervala $[0,T]$ i neku međuparticiju (y_i) kao

$$\sum_{i=1}^{n} f(y_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{5.6}$$

Ukoliko $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$, mi čak znamo da je $\int_0^T f(s)ds$ limes izraza u (5.6).

Poopćimo ovu ideju koristeći dodatnu funkciju g tako da stavimo

$$J = \lim \sum_i f(y_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \approx \sum_i f(y_i)g'(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \text{ (po teoremu srednje vrijednosti)}$$

gdje limes uzimamo po proizvoljnim particijama za koje $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$ i pretpostavljamo da limes ne ovisi o izboru tih particija. U tom slučaju kažemo da je J **Riemann-Stieltjesov integral** funkcije f u odnosu na g i pišemo

$$J = \int_0^T f(t)dg(t)$$

Postavlja se pitanje kada je f na ovaj način integrabilna u odnosu na g. Jedan dovoljan uvjet je da je f neprekidna, a g funkcija ograničene varijacije. Kako Brownovo gibanje nema ograničenu varijaciju, ovaj uvjet ne možemo primjeniti, no to ipak ne znači da za neke f ne postoji integral $\int_0^T f(s)dB(s)$ (npr. za $f \equiv 1$, je jasno $\int_0^T 1dB_s = B_1$). Problem ostaje ipak integrirati npr. $\int_0^T B_s dB_s$.

5.4 Itov integral jednostavnih procesa

U ovom odjeljku je (B_t) Brownovo gibanje, a $(\mathcal{F}_t)$ njegova prirodna filtracija.

Definicija 5.9. *Slučajni proces* $(C_t)_{t\in[0,T]}$ *je* **jednostavan** *ako postoji particija* $(t_i)_{i=0,\ldots,t}$ *intervala* $[0,T]$ *takva da*

$$C_t = \sum_{i=1}^{n} 1_{[t_{i-1},t_i)}(t) \cdot Z_i$$

(uz dogovor $t_{n+1} = +\infty$*) tako da je* Z_i *izmjeriva u odnosu na* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$.

Itov stohastički integral jednostavnog procesa (C_t) na intervalu $[0,t]$, $t < T$ definiramo kao

$$\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + Z_k(B_t - B_{t_{k-1}})$$

za $t \in [t_{k-1}, t_k]$, uz dogovor da je $\sum_1^0$ uvijek 0).
Posebno je

$$\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \quad \text{i} \quad \int_0^0 C_s dB_s = 0.$$

Uočite kako je (B_{t_i}) martingal, iz prethodnog poglavlja znamo da je

$$(\int_0^{t_k} C_s dB_s)_{k=0,\ldots,n}$$

martingal (pokažite!) kao martingalna transformacija.

Teorem 5.10. *(svojstva Itovog integrala jednostavnih procesa)*

1. *Proces* $I_t = \int_0^t C_s dB_s$ *je martingal. Posebno* $EI_t = 0$.
2. *Itov integral ima svojstvo izometričnosti:* $E(I_t)^2 = \int_0^t EC_s^2 ds \ \ t \in [0,T]$
3. *Itov integral je linearan, tj. za konstante* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i jednostavne procese* C, D *vrijedi*
$$\int_0^t (\alpha C_s + \beta D_s) dB_s = \alpha \int_0^t C_s dB_s + \beta \int_0^t D_s dB_s$$
4. *Putevi procesa* (I_t) *su neprekidni*

Za D.Z. dokažite teorem.

Prisjetimo se da smo poželjeli integrirati $\int_0^T B_s dB_s$, u ovom slučaju integrand nije jednostavan proces, no na sreću i on kao i mnogi drugi procesi daju se aproksimirati jednostavnim procesima uz slijedeću pretpostavku.

Pretpostavka A

Proces (C_s) je adaptiran na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja i zadovoljava $\int_0^T EC_s^2 ds < \infty$.

Provjerite da je pretpostavka A zadovoljena :

- za jednostavne procese
- za determinističke funkcije $c : [0,T] \to \mathbb{R}$ takve da $\int_0^T c^2(t)dt$.
- posebno za sve neprekidne funkcije

Lema 5.11. *Ako proces* (C_t) *zadovoljava pretpostavku A, tada postoji niz* $(C_t^{(n)})$ *jednostavnih procesa takvih da*

$$\int_0^T E(C_s - C_s^{(n)})^2 ds \to 0 \tag{5.7}$$

Dokaz leme je izvan našeg osnovnog interesa. No sad je jasno da za C_s koji zadovoljava pretpostavku A integral $I_t = \int_0^t C_s dB_s$ možemo definirati zaobilaznim putem, koristeći integrale

$$I_t^n = \int_0^t C_s^{(n)} dB_s.$$

Kako vrijedi (5.7), a Itov integral ima svojstvo izometričnosti,

$$E(I_k^n - I_t^m)^2 = \int_0^t E(C_s^{(n)} - C_s^{(m)})^2 ds \to 0$$

za $n, m \to +\infty$, pa je (I_t^n) Cauchyev niz u prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Kako je ovaj prostor potpun Hilbertov prostor, on ima limes u srednjem reda 2 i taj limes I_t zovemo Itovim integralom

$$I_t = \int_0^t C_s dB_s.$$

Dakle

$$I_t^{(n)} \to^{L_2} I_t \text{ za } n \to \infty$$

no ne mora biti da ova konvergencija vrijedi po točkama u Ω, niti gotovo sigurno.
I ovaj integral ima ista svojstva koja smo naveli u Teoremu 5.10. Izračunajmo $\int_0^T B(T)dB(T)$.
Jasno je da je integral $(B(t))$ ovdje adaptiran, a zbog $EB_t^2 = t$ zadovoljava

$$E\int_0^T B_t^2 dt < \infty.$$

Aproksimiramo li

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} B_0 = 0, & t \in [0, T/n) \\ B_{T/n}, & t \in [T/n, 2T/n) \\ \vdots & \\ B_{\frac{(n-1)T)}{n}} & t \in \left[\frac{(n-1)T}{n}\right) \end{cases}$$

Lako se pokaže:

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (\Delta_n(t) - \Delta(t))^2 dt = 0.$$

Po definiciji imamo

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{n\to\infty} = \int_0^T \Delta_n(t) dB(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} B_{jT/n}\left[B_{\frac{j+1}{n}T} - B_{\frac{j}{n}T}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_0^{n-1} B'_j(B'_{j+1} - B'_j)$$

uz oznaku $B'_j = B_{jT/n}$.
Uočite

$$\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}(B'_{j-1} - B'_j)^2 = \cdots = \frac{1}{2}B'^2_n + \sum_{j=0}^{n-1} B'_j(B'_j - B'_{j+1})$$

$$\Rightarrow \int_0^T B_t dB_t = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}\sum_0^{n-1}(B_{\frac{j+1}{n}T} - B_{\frac{j}{n}T})^2 = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T$$

Uočite za g neprekidno diferencijabilnu funkciju

$$\int_0^T g(t)dg(t) = \int_0^T g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}g^2(T)$$

no

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T$$

Dodatni član potiče upravo iz nezanemarive kvadratne varijacije Brownovog gibanja.

Teorem 5.12. *(svojstva Itovog integrala)*
Sva su ista kao i u Teoremu 5.10.

Posebno dakle $(\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t)_t$ je martingal!

5.5 Itova lema

Prisjetimo se: ako je F neprekidno diferencijabilna tada

$$F(t) - F(0) = \int_0^T F'(t)dt$$

Posebno ako su f, g neprekidno diferencijabilne funkcije tada

$$[f(g(t))]' = f'(g(t))g'(t)$$

stoga

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds =^{R.-S.integral} \int_0^t f'(g(s))dg(s)$$

Posebno za $f(x) = x^2$ i $g(0) = 0$

$$g^2(t) = \int_0^t 2g(s)dg(s)$$

no za Brownovo gibanje, tj. Itov integral vrijedi:

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + t \quad !!$$

Prisjetimo se Taylorove formule $\Rightarrow$

$$f(B_t + dB_t) - f(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f'(B_t)(dB_t)^2 + \text{ostatak.}$$

Sada ako na intervalu $(0, t)$ nađemo subdiviziju

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t,$$

i označimo $dB_{t_i} = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n ((f(B_{t_i} + dB_{t_i}) - f(B_{t_i}) \approx \sum_1^n f'(B_{t_i} dB_{t_i} + \tfrac{1}{2}\sum_1^n f''(B_{t_i})(dB_{t_i})^2 \longrightarrow^{L_2}$$
$$\int_0^t f'(B_s)dB_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

Lema 5.13. *(Itova osnovna lema)*
Ako je f klase C_2 tada

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx$$

Primjer 5.14.
Za eksponencijalnu funkciju $g(x) = e^x$ vrijedi $g'(x) = g(x) \Rightarrow$

$$g(t) - g(s) = \int_s^t g(x)dx$$

Možda bismo proces $(e^{B_t})_t$ mogli smatrati Itovom eksponencijalnom funkcijom, no Itova lema za $f(x) = e^x$ daje

$$e^{B_t} - e^{B_s} = \int_s^t e^{B_x}dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t e^{B_x}dx \neq 0$$

dakle dobijemo složeniji izraz!

Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ označimo njene parcijalne derivacije sa

$$f_t, f_x, f_{tt}, f_{xx}, \dots \text{ npr. } f_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

Lema 5.15. *(Itova lema - 1. poopćenje)*
Pretpostavimo da f ima neprekidne parcijalne derivacije f_t, f_x, f_{xx}. Tada za $s < t$ vrijedi

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_t(x, B_x) + \frac{1}{2}f_{xx}(x, B_x)\right] dx + \int_s^t f_x(x, B_x)dB_x$$

Primjer 5.16.
Primjenimo lemu na $f(t, x) = e^{x - \frac{1}{2}t}$

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}f(t, x),\ f_x(t, x) = f(t, x) = f_{xx}(t, x) \Rightarrow$$

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t 0dx + \int_s^t f(x, B_x)dB_x.$$

Mogli bismo reći da je proces $e^{B_t - \frac{1}{2}t}$ u Itovom diferencijalno-integralnom računu ekvivalent eksponencijalne funkcije.

Primjer 5.17. *(geometrijsko Brownovo gibanje)*
Promotrimo proces

$$X_t = e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

za $f(t, x) = e^{\sigma x + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \Rightarrow$

$$f_t(t, x) = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)f(t, x),\ \ f_x(t, x) = \sigma f(t, x)\ \&\ f_{xx} = \sigma^2 f(t, x)$$

Itova lema $\Rightarrow X_t - X_s = \alpha \int_s^t X_x dx + \sigma \int_s^t X_x dB_x$ *ili formalno* $dX_s = \alpha X_s ds + \sigma X_s dB_s$.

Proces (X_t) iz gornjeg primjera je poseban slučaj Itovog procesa. Općenito proces (X_t) je **Itov proces** ako ima reprezentaciju

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dB_s$$

za neku slučajnu varijablu X_0 koja je $\mathcal{F}_0-$ izmjeriva i dva procesa $(A_t^{(1)})$ i $(A_t^{(2)})$ adaptirana na Brownovo gibanje.

Lema 5.18. *(Itova lema - 2. poopćenje)*
Pretpostavite da je (X_t) Itov proces, te da f ima neprekidne derivacije f_t, f_x, f_{xx}. Tada za $s < t$ vrijedi

$$f(t,X_t)-f(s,X_s) = \int_s^t \left[f_t(y,X_y) + A_y^{(1)} f_x(y,X_y) + \frac{1}{2}[A_y^{(2)}]^2 f_{xx}(y,X_y) \right] dy + \int_s^t A_y^{(2)} f_x(y,X_y) dB_y.$$

5.6 Stohastičke diferencijabilne jednadžbe

Prisjetimo se običnih diferencijabilnih jednadžbi, npr. prvog reda

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) = a(t,x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{5.8}$$

ili formalno

$$dx(t) = a(t,x(t))dt \tag{5.9}$$

za neku funkciju $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Npr.
$x'(t) = a(t) \Rightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds$
$x'(t) = x(t) \cdot c \Rightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = (\ln(x(t))' = c \Rightarrow x(t) = x(0)e^{ct}$.
Uočite da (5.8) možemo napisati i u integrabilnom obliku

$$x(t) = x(0) + \int_0^s a(s,x(s))ds.$$

Rješenja o.d.j. su funkcije, jedinstvene uz zadani početni uvjet , no u pravilu ih teško nalazimo u zatvorenom obliku, pa se oslanjamo na numeričku aproksimaciju rješenja.

Zamislimo da u jednadžbu (5.8) želimo unijeti slučajnu komponentu. Tada bi i rješenje mogli tražiti u obliku slučajnog prcesa (X_t) koji npr. zadovoljava

$$dX_t = a(t,X_t)dt + B(t,X_t)dB_t \tag{5.10}$$

gdje je (B_t) ponovo Brownovo gibanje, a koristimo i početni uvjet

$$X_0(\omega) = Y(\omega)$$

No (5.9) smo interpretirali preko jednadžbe (5.8), kako ćemo interpretirati (5.10)?
Jednadžbu (5.10) možemo interpretirati kao **stohastičku integralnu jednadžbu**

$$X_t = Y + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s \tag{5.11}$$

na intervalu $[0, T]$. Uočite prvi od integrala na d.s. je obični Riemannov integral, a drugi je Itov stohastički integral. Jednadžbu (5.11) uz ovu interpretaciju nazivamo **Itovom stohastičkom** diferencijabilnom jednadžbom. Dakle, iako je nazivamo diferencijabilnom jednadžbom ona je u stvari stohastičko-integralna jednadžba. Kažemo da je i Brownovo gibanje (B_t) njen vodeći/ pogonski proces. Postavlja se pitanje što možemo smatrati rješenjem jednadžbe (5.10) odnosno (5.11), a matematička literatura nudi dva tipa rješenja. Uočite da je početni uvjet u (5.10) $X_0 = Y$.
Slučajni proces (X_t) je **jako rješenje** s.d.j. (5.11) ako je

- adaptiran na Brownovo gibanje (B_t),
- integrali na desnoj strani u (5.11) su dobro definirani,
- slučajna varijabla Y je $\mathcal{F}_0$-izmjeriva
- (X_t) zadovoljava (5.11) gotovo sigurno.

Postoje i slaba rješenja stohastičih diferencijabilnih jednadžbi koja ne moraju biti čak ni definirana na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ (ona zadovoljavaju (5.11) za neko Brownovo gibanje i na nekom Y prostoru). Također postoje stohastičke diferencijabilne jednadžbe koje imaju samo takva rješenja.

Jaka (i slaba) rješenja stohastičkih diferencijabilnih jednadžbi nazivamo difuzijama / difuzijskim procesima.
Uočite za $a \equiv 0$ i $b \equiv 1 \Rightarrow (B_t)$ je također difuzija.

Postoji vrlo plodna matematička literatura koja se bavi uvjetima uz koje postoje rješenja stohastičkih diferencijabilnih jednadžbi, ali i njihovim egzaktnim te približnim, tj. numeričkim rješenjima.

Primjer 5.19. *Geometrijsko Brownovo gibanje* $X_t = X_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ *je jako rješenje s.d.j.*

$$dX_t = \alpha X_s ds + \sigma X_s dB_s$$

tj.

$$X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s.$$

Dokaz.. *Primjenite Itovu lemu - prvo poopćenje*

$$f(t, x) = X_0 e^{\sigma x + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

$$f_t(t, x) = (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2) f(t, x)$$
$$f_x(t, x) = \sigma f(t, x)$$
$$f_{xx}(t, x) = \sigma^2 f(t, x)$$

iz čega slijedi

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot f(s, B_s) ds + \sigma \int_0^t f(s, B_s) dB_s$$

odnosno

$$X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s.$$

Primjer 5.20. *Promotrite stohastičku diferencijabilnu jednadžbu*

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma dB_t$$

vrlo korištenu u fizici (Langevin 1908), ona intuitivno predstavlja neprekidno poopćenje AR(1) jednadžbe

$$X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$$

Njen integrabilni oblik je

$$X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s, \quad t \in [0, T]$$

Itova lema se ponovno može iskoristiti da se pokaže da je tzv. Ornstein-Uhlenbeck proces

$$X_t = e^{\alpha t} X_0 + \sigma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} dB_s$$

rješenje ove jednadžbe.

ZADACI uz gornji primjer

1. Pokažite da X_t zaista rješava s.d.j.-u
2. Pokažite da uz početni uvjet $X_0 = 0$ vrijedi

$$\text{cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{\alpha(t+s)} - e^{\alpha(t-s)})$$

3. Pokažite da je Ornstein-Uhlenbeckov proces Gaussov proces
4. Promotrite vezanu s.d.j.-u $dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t \quad t \in [0, T]$ čije je rješenje Vasičekov proces

- ▷ Brownovo gibanje je jedan od najvažnijih vjerojatnosnih modela procesa u neprekidnom vremenu, s primjenom u mnogim prirodnim i ekonomskim znanostima.

- ▷ Brownovo gibanje je Gaussov proces, nezavisnih i stacionarnih prirasta.

- ▷ Transformacijama Brownovog gibanja možemo dobiti i druge važne procese od kojih je geometrijsko Brownovo gibanje za nas najvažniji primjer.

- ▷ Kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[0, t]$ je upravo t.

- ▷ Integral $\int f dg$ se može definirati za vrlo općenite integrande, tj. funkcije f i integratore, tj. funkcije g, poopćujući time pojam Riemannovog integrala do pojma Riemann-Stieltjesovog integrala. To ne možemo učiniti tako jednostavno ako za integrator uzmemo Brownovo gibanje.

- ▷ Itov (stohastički) integral se lako definira za jednostavne procese koristeći isti pristup kao u definiciji Riemann-Stieltjesovog integrala. Za ostale integrande to možemo učiniti koristeći svojstvo izometričnosti ovog integrala.

- ▷ Ako se proces da dobro aproksimirati jednostavnim procesima, njegov Itov integral u odn. na Brownovo gibanje je općenito L_2 limes niza Itovih integrala jednostavnih procesa. I ovaj integral ima svojstvo linearnosti, monotonosti, itd. i uvijek je martingal.

- ▷ Itova lema poopćuje i mijenja neka pravila o derviranju i integriranju realnih funkcija i korisna je u traženju Itovih integrala i riješenja stohastičkih diferencijalnih jednadžbi.

Poglavlje 6

Black-Scholesova formula

6.1 Black-Scholes formula

Godine 1973. Black i Scholes, te Merton, u odvojenim radovima proveli su analizu matematičkog modela financijskog tržišta u neprekidnom vremenu. Jedan od osnovnih rezultata bio je i određivanje cijene evropske call opcije, a model, kao i matematička analiza, bili su zasnovani na idejama iz prethodnog poglavlja tj. stohastičkim diferencijabilnim jednadžbama.

Osnovne pretpostavke modela koji danas zovemo i Black-Scholesovim bile su, uz uobičajene osnovne pretpostavke, i slijedeće: trgovati možemo neprekidno u periodu $[0, \infty)$, a trgujemo sa dvije imovine:

- jednom nerizičnom imovinom čija se cijena mijenja neprekidno i iznosi e^{rt} u trenutku $t \geq 0$ (novac, obveznica)
- i jednom rizičnom imovinom čija je cijena geometrijsko Brownovo gibanje

  $$S_t = S_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

  za neko Brownovo gibanje (B_t) i od njega nezavisnu inicijalnu vrijednost (mi ćemo pretpostavljati konstantu) S_0, definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Kao što smo već napomenuli (S_t) predstavlja (jako) rješenje s.d.j.

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

ili intuitivno

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t).$$

Drugi član u gornjoj jednadžbi ima normalnu razdiobu $N(0, dt)$. Kao i prije, $r > 0$ označava neprekidnu kamatnu stopu, a konstante $\alpha > 0$ i $\sigma > 0$ zovemo srednja stopa povrata, odnosno volatilnost.
Zbog rizika očekujemo $\alpha > r$ i razliku $\alpha - r$ zovemo premija za rizik.

Ekonomisti su i prije 1973. ponudili heurističke argumente koji proces (S_t) opravdavaju kao prihvatljivu aproksimaciju za kretanje cijena na tržištu. Primjetite ako je

$\sigma = 0$, tada je $S_t = S_0 e^{\alpha t}$, dakle cijena dionice bi bila deterministički određena i rasla bi eksponencijalno, kao i cijena nerizične imovine. Ako bismo i dalje pretpostavljali da na tržištu nema arbitraže, nužno bi bilo $\alpha = r$. Pokažite!

I u neprekidnom modelu cijenu slučajnih zahtjeva možemo naći iz kriterija nepostojanja arbitraže i traženjem odgovarajućih replicirajućih strategija.
Strategija trgovanja je određena procesima $(a_t) =$ broj dionica koje posjedujemo u trenutku t i $(b_t) =$ broj obveznica koje posjedujemo u trenutku t.
Za ove procese prirodno je pretpostaviti da ovise samo o informaciji dostupnoj do trenutka t, ili preciznije da su adaptirani na Brownovo gibanje (B_t). Vrijednost portfelja u t je sada

$$V_t = a_t S_t + b_t e^{rt}, \quad t > 0,$$

a diskontirana vrijednost je

$$\widetilde{V}_t = \frac{a_t S_t}{e^{rt}} + b_t$$

Strategija (a_t, b_t) je **samofinancirajuća** ako se promjena njene vrijednosti događa isključivo zbog fluktuacije cijena dionica i obveznica, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} dV_t &= a_t dS_t + b_t d(e^{rt}) \\ &= a_t dS_t + b_t e^{rt} r dt, \end{aligned}$$

preciznije

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s d(e^{rs})$$

Evropska call i put opcija definiraju se analogno kao i u diskretnom vremenu, tako da evropska call opcija C sa cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T vlasniku daje pravo na kupnju dionice po cijeni K u trenutku T kada je njena vrijednost ponovo:

$$(S_t - K)_t.$$

Pitanja su i ovdje:

- Možemo li odrediti cijenu opcijama da izbjegnemo arbitražu?
- Možemo li replicirati svaki zahtjev ili barem određenu klasu njih?

Iako to ovdje nećemo detaljno obrazlagati, može se pokazati da je cijenu slučajnog zahtjeva $C = f(S_t)$ moguće odrediti kao očekivanje

$$E^*(e^{-rT} f(S_t))$$

gdje očekivanje ponovo računamo u odnosu na ekvivalentnu integralnu mjeru odnosno vjerojatnost P^* koja je ekvivalentna vjerojatnosti P i neutralna na rizik, tj. u odnosu na koju je diskontirana cijena dionice

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

martingal. Na sreću postoji matematički rezultat koji nam pokazuje kako možemo pronaći takvu mjeru.

Primjer 5.16 ukazuje na to da je proces $e^{B_t - \frac{1}{2}t}$ martingal. Na isti način se pokazuje da to vrijedi i za proces $S_0 e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$, no kako je $\widetilde{S}_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ trebamo zapravo naći mjeru u odnosu na koju se

$$\sigma B_t + (\alpha - r)t$$

ponovo ponaša kao $\sigma \widetilde{B_t}$ za neko Brownovo gibanje $\widetilde{B_t}$.

Teorem 6.1. *(Girsanov)*
Neka je (B_t) Brownovo gibanje, tada je proces

$$X_t = e^{-qB_t - \frac{1}{2}q^2 t}, \quad t \geq 0$$

martingal u odnosu na filtraciju Brownovog gibanja (B_t).
Relacija

$$P^*(A) = \int_A X_T dP = E[1_A X_T]$$

definira vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ koja je ekvivalentna vjerojatnosti P, a u odnosu na P^* je proces

$$\widetilde{B} = B_t + qt \;, \quad t \geq 0$$

Brownovo gibanje i adaptiran na istu filtraciju.

Dokaz nećemo dati (vidi [7] npr.) no dio tvrdnje se pokazuje kao u primjeru 5.16.

Primjenimo li ovaj teorem na Black-Scholesov model, pokazuje se da postoji vjerojatnosna mjera P^* u odnosu na koju je

$$\widetilde{B_t} = B_t + \frac{(\alpha - r)}{\sigma} t$$

Brownovo gibanje (postavite $q = \frac{\alpha - r}{\sigma}$).
Uočite da vrijedi

$$\sigma B_t + (\alpha - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t = \sigma \widetilde{B_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t,$$

pa je u odnosu na ovu mjeru (po istom teoremu)

$$\widetilde{S_t} = S_0 e^{\sigma \widetilde{B_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

martingal (stavimo $q = -\sigma$). Posebno $E^*[\widetilde{S_t}] = S_0$. Ako prihvatimo argumente iz diskretnog vremena tada nearbitražnu cijenu ev. call opcije možemo odrediti koristeći

$$C_0 = E^*[e^{-rT}(S_T - K)_t].$$

Iz definicije mjere P^* slijedi

$$\begin{aligned}
C_0 &= E^*[(\widetilde{S_T} - e^{-rT}K)_t] \\
&= E^*[(S_0 e^{\sigma \widetilde{B_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - e^{-rT}K)_t] \\
&= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} (S_0 e^{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - e^{-rT}K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
&= S_0 \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy - K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-s^2}{2}} ds
\end{aligned}$$

Uz definicije i supstitucije:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln S_0/K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{\pi}} \\ y &= \frac{x}{\sqrt{2T} + \sigma\sqrt{\frac{T}{2}}} \quad \text{i} \quad s = -\frac{x}{\sqrt{T}} \end{aligned}$$

i formulu $d_1 = \frac{\ln S_0/K+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{\pi}}$

dobivamo formulu

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2). \tag{6.1}$$

Formula (6.1) zajedno sa izrazima za konstante d_1 i d_2 predstavlja slavnu Black-Scholesovu formulu za cijenu evropske call opcije, za što su u konačnici Scholes i Merton dobili i Nobelovu nagradu.

Na isti način cijenu bismo odredili i u bilo kojem drugom vremenskom trenutku, no najneobičnije u izrazu (6.1) je što on uopće ne ovisi o parametru α, tj srednjoj stopi povrata (povežite sa CRR modelom).

ZADATAK

1. Nađite ekvivalentan izraz za evropsku put opciju.

- ▷ Black, Scholes i Merton analizirali su geometrijsko Brownovo gibanje kao model za kretanje cijena dionica u neprekidnom vremenu. Osnovni parametri ovog modela su srednja stopa povrata i volatilnost.
- ▷ Poopćujući intuiciju iz diskretnog vremena cijenu slučajnog zahtjeva možemo odrediti ako uspijemo odrediti ekvivalentnu martingalnu mjeru, odn. vjerojatnost u odn. na koju je diskontirana cijena dionice martingal.
- ▷ Girsanovljev teorem nam direktno omogućuje da pronađemo tu vjerojatnost, i posebno Brownovo gibanje s driftom transformiramo u Brownovo gibanje bez drifta.
- ▷ Black i Scholes su izveli izraz za cijenu evropske call opcije u ovom modelu koristeći nešto drugačije metode. Iznenađujuće ova cijena ne ovisi o srednjoj stopi povrata.

Bibliografija

[1] Baxter, W. A., Rennie, A. (1996). *Financial Calculus*, Cambridge University Press.

[2] Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures, 2nd Edition.* Wiley, New York.

[3] Bjork, T. (1999). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.

[4] Capiński, M., Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering*, Springer.

[5] Etheridge, A. (2002). *A Course in Financial Calculus*, Cambridge University Press.

[6] Hull, J. C. (1993). *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice-Hall.

[7] Karatzas, I., Shreve, S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer.

[8] Lamberton, D., Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapmann & Hall.

[9] Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus . With Finance in View*, World Scientific Publishing Co.

[10] Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations*, 6th ed., Springer.

[11] Protter, P. (1990). *Stochastic Integration and Stochastic Differential Equations: A New Approach*, Springer.

[12] Steele, M. (2000). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer.

[13] Sarapa, N. (1987). *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga.

[14] Vondraček, Z. (2003). *Financijsko modeliranje*, web-skripta. PMF-MO, Zagreb.