Teme za diplomske radove za akademsku godinu 2015./2016.

Ante Mimica

1. Slučajne šetnje i Wiener-Hopfova faktorizacija

U ovom diplomskom radu će se promatrati općenita slučajna šetnja u $\mathbb{R}$ i neka njezina svojstva. Neka su su $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisne i jednako distribuirane realne slučajne varijable. Slučajna šetnju je definirana sa $S_0 = 0$ i $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ za $n \geq 1$. Promatrat će se sljedeća pitanja:

(a) Ako je $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$, tj. X_1 nije degenerirana, što se može reći o dugoročnom ponašanju slučajne šetnje $S = \{S_n : n \geq 0\}$? Pokazuje se da vrijedi sljedeća trihotomija:

$$S_n \to +\infty \text{ g.s.} \quad \text{ili} \quad S_n \to -\infty \text{ g.s.}$$

$$\text{ili} \quad -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \text{ g.s..}$$

(b) Neka je $N = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}$ prvo vrijeme posjeta skupu $(0, \infty)$. Što se može reći o distribuciji slučajnog vektora (N, S_N)? Slično pitanje se može postaviti i za $\tilde{N} = \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$.

(c) Što se može reći o distribuciji distribuciji procesa maksimuma $\{\max_{0\leq k\leq n} S_k : n \geq 0\}$ i minimuma $\{\min_{0\leq k\leq n} S_k : n \geq 0\}$ slučajne šetnje?

Pri odgovaranju na pitanja (b) i (c) od pomoći će biti Wiener-Hopfova faktorizacija.

Osnovna literatura:

- S. I. Resnick. Adventures in Stochastic Processes. Birkhäuser, Boston/Basel/Berlin, 2002. (Poglavlje 7)

Dodatna literatura:

- W. Feller. An introduction to probability and its applications, Vol. 2. Wiley, 1971. (Poglavlje XII)
- J. Kennedy. Understanding the Wiener-Hopf Factorization for the Simple Random Walk. *Journal of Applied Probability*, Vol. 31, No. 2 (1994), pp. 561-563

2. Poissonovi točkovni procesi

Kako modelirati "slučajnu" distribuciju točaka Π u prostoru $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$? Tipični primjeri mogu biti pozicije i vremena potresa u zadnjih 100 godina, položaj stabala u nekoj šumi, vremena dolazaka klijenata na šalter nekog servisa. Jedan način je pomoću Poissonovog točkovnog procesa, koji će biti slučajan skup takav da je broj točaka u disjunktnim regijama nezavisan te ima Poissonovu distribuciju s parametrom koji na neki način ovisi o veličini regije koju promatramo. Osnovni primjer takvog procesa su vremena skokova Poissonovog procesa.

Nakon formalne definicije, odredit će se i distribucija slučajne varijable $\sum_{X \in \Pi} f(X)$ za funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (Campbellov teorem). Također će se dokazati i Rényjev teorem, koji karakterizira Poissonov točkovni proces. Na kraju će se definirati Poissonova slučajna mjera i primijeniti u definiciji subordinatora (slučajnog procesa koji ima nezavisne i stacionarne priraste te neopadajuće trajektorije).

Osnovna literatura:

- J. F. Kingman. Poisson processes. Clarendon Press. Oxford. 2002. (Poglavlja 1-3, 8.1 (samo početak), 8.2, 8.3)

Dodatna literatura:

- S. I. Resnick. Adventures in Stochastic Processes. Birkhäuser, Boston/Basel/Berlin, 2002. (Poglavlje 4)

3. Ergodski teorem i stacionarni procesi

Ako je $\{X_n : n \geq 0\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da je $\mathbb{E}|X_0| < \infty$, onda po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \mathbb{E}X_0 \ .$$

Postavlja se pitanje koliko se mogu oslabiti uvjeti na gornji niz slučajnih varijabli tako da ovaj limes i dalje g.s. postoji. Odgovor na to pitanje je već 1931. godine dao G. D. Birkhoff. Za niz slučajnih varijabli $\{X_n : n \geq 0\}$ kaženo da je stacionaran ako ima istu distribuciju kao i pomaknuti niz $\{X_{m+n} : n \geq 0\}$ za svaki $m \geq 0$. Ako je $\mathbb{E}|f(X_0)| < \infty$, onda

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \quad \text{postoji g.s.} \, .$$

U ovom diplomskom radu će se dokazati ergodski teorem kao i neke njegove primjene.

Osnovna literatura:

- L. Breiman. Probability. SIAM, Philadelphia (Poglavlje 6)
- R. Durrett. Probability: Theory and Examples, 3rd ed. Thomson, Brooks/Cole, 2005. (Poglavlje 6)

4. Donskerov teorem

Neka je $X = \{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da je $\mathbb{E}X = 0$ i $\mathbb{E}X^2 = 1$. Definiramo slučajnu šetnju $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ za $n \geq 1$. Cilj ovog diplomskog rada je pokazati da

$$\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \quad \text{konvergira po distribuciji procesu} \quad B_t\,,$$

tj. Brownovom gibanju koje kreće iz $B_0 = 0$. Ovaj rezultat je poznat kao Donskerov teorem. Prvo će se dokazati Skorohodova reprezentacija slučajne varijable X takve da je $\mathbb{E}X = 0$ i $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Naime, u tom slučaju postoji vrijeme zaustavljanja T za Brownovo gibanje takvo da je

$$B_T \stackrel{d}{=} X \quad \text{i} \quad \mathbb{E}T = \mathbb{E}X^2\,.$$

Također će se napraviti neke primjene Donskerovog teorema, kao što je konvergencija po distribuciji maksimuma slučajne šetnje.

Osnovna literatura:

- R. Durrett. Probability: Theory and Examples, 3rd ed., Thomson, Brooks/Cole, 2005. (Poglavlje 7)