Odabrana poglavlja teorije slučajnih procesa

Prva zadaća

1. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje.

   (a) Dokažite da je $\tilde{B}_t = B_{1-t} - B_1$ Brownovo gibanje na $[0, 1]$.

   (b) Neka je $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje ($d \in \mathbb{N}$). Odredite sve $x \in \mathbb{R}^d$ za koje je $x \cdot Y_t, t \geq 0$ Brownovo gibanje.

   (c) Za $\lambda > 0$ dokažite da je $X_t = e^{-\lambda t} B_{e^{2\lambda t}}$, $t \in \mathbb{R}$ stacionarni Ornstein-Uhlenbeckov proces te mu izračunajte parametar i veličinu.

   (d) Dokažite da je s $X(\omega) = \int_0^1 B_s(\omega)^2 \, ds$ definirana slučajna varijabla te joj izračunajte prva dva momenta.

2. Neka je $X_t = |B_t|$ ili $X_t = B_t^+$, gdje je B Brownovo gibanje. Dokažite da za $p, q > 1$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi

$$\sup_{t \geq 0} (X_t - t^{p/2}) \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} \left(\frac{X_t}{1 + t^{p/2}} \right)^q .$$

   (Uputa: Počnite s $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} (X_t - t^{p/2}) \leq a)$ i iskoristite odgovarajuće svojstvo invarijantnosti procesa X naslijeđeno od Brownovog gibanja.)

3. Neka je $X = \{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ neprekidni Brownov most i neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje.

   (a) Dokažite da su sljedeći slučajni procesi neprekidni Brownovi mostovi:

      (a1) $X_{1-t}, 0 \leq t \leq 1$;

      (a2) $Y_t = (1-t) B_{\frac{t}{1-t}}, 0 \leq t < 1$, $Y_1 = 0$;

      (a3) $Z_t = t B_{t^{-1}-1}, 0 < t \leq 1$, $Z_0 = 0$;

   (b) Dokažite da je $(t+1) X_{\frac{t}{t+1}}, t \geq 0$ Brownovo gibanje.

4. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje i $X = \{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ Brownov most. Dokažite da vrijedi

$$\sup_{t > 0} \frac{|B_t| - 1}{t} \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} (|B_t| - t) \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} X_t^2 .$$

   (Uputa: invarijantnost Brownovog gibanja, zadaci 2 i 3)

5. Neka je $\{X(h) : h \in L^2([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \lambda)\}$ Gaussovski prostor (konstruiran u Propoziciji 1.10) i neka je $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takva da je $f \in L^{2+\varepsilon}([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty))$ za neki $\varepsilon > 0$. Definiramo

$$Y_t = X(f 1_{[0,t]}) =: \int_0^t f(s) dB_s, \quad t \geq 0\,.$$

Dokažite da slučajni proces $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ ima neprekidnu modifikaciju.

6. Neka je $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ neprekidni Ornstein-Uhlenbeckov proces s parametrom 1/2 veličine 1. Definiramo slučajni proces

$$\beta_t = X_t + \frac{1}{2} \int_0^t X_u \, du, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Dokažite da je $\beta = \{\beta_t : t \in \mathbb{R}\}$ centrirani Gaussovski proces te mu izračunajte kovarijacijsku funkciju. U kojem smislu možemo β shvatiti kao Brownovo gibanje?

Uputa: Iskoristite jednu od karakterizacija normalnog slučajnog vektora.)

7. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje i $\Delta_n = \{t_j = j 2^{-n} t : j = 0, 1, \ldots, 2^n\}$ subdivizija segmenta $[0,t]$. Dokažite da za $T_t^{\Delta_n} = \sum_{j=0}^{2^n-1} |B_{t_{j+1}} - B_{t_j}|^2$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} T_t^{\Delta_n} = t \quad \text{g.s..}$$

(Uputa: Izračunajte varijancu od $T_t^{\Delta_n} - t$ i upotrijebite Borel-Cantellijevu lemu.)

8. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje, $t_i = \frac{i}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$ i $i = 0, 1, \ldots, n$ i $p > 0$.

   (a) Dokažite da

   $$n^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p$$

   konvergira po vjerojatnosti prema konstanti v_p kada n konvergira prema $+\infty$.

   (b) Dokažite da

   $$n^{\frac{p-1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^p - n^{1-\frac{p}{2}} v_p \right)$$

   konvergira po distribuciji prema normalnoj slučajnoj varijabli kada n konvergira prema $+\infty$.

(Uputa: Iskoristite slabi zakon velikih brojeva, svojstvo skaliranja Brownovog gibanja i centralni granični teorem.)

9. Pronađite primjer slučajnog procesa $X = \{X_t : t \geq 0\}$ koji nije neprekidan i postoje $\alpha > 0$ i $c > 0$ takvi da je

$$\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^\alpha] \leq ch, \qquad \text{za sve} \;\; t, h \geq 0.$$

10. Neka je $X = \{X_t : t \in [0,1]\}$ slučajni proces u $\mathbb{R}$ takav da je

$$\mathbb{E}X_t = 0, \quad \mathbb{E}[X_t^2] = 1, \quad t \in [0,1].$$

i

$$\mathbb{E}[X_s X_t] \geq 1 - c|t-s|^p, \quad s,t \in [0,1],$$

gdje su $c > 0$ i $p > 1$.

   (a) Dokažite da X ima neprekidnu modifikaciju.

   (b) Ako je X Gaussovski, dokažite da za svaki $\alpha < \frac{p}{2}$ X ima modifikaciju koja je α-Hölder neprekidna.

11. Neka je B jednodimenzionalno Brownovo gibanje.

   (a) Ako je $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u $t \geq 0$, dokažite da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da za $i = \lfloor nt \rfloor + 1$ vrijedi

$$|g(\tfrac{j}{n}) - g(\tfrac{j-1}{n})| \leq \tfrac{7l}{n}$$

   za sve $j = i+1, i+2, i+3$ i $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik.

   (b) Neka je $D_t = \{\omega : s \mapsto B_s(\omega) \text{ je diferencijabilna u } t\}$. Dokažite da je $\cup_{t \in [0,T]} D_t$ sadržan u događaju

$$\Gamma_T = \bigcup_{l=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \{|B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \tfrac{7l}{n}\}$$

   te da je $\mathbb{P}(\Gamma_T) = 0$ za sve $T > 0$. Zaključite da trajektorije Brownovnog gibanja g.s. nisu nigdje diferencijabilne.

12. Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i $0 < c_1 < c_2$. Dokažite da su vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_{c_1 B}$ i $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_{c_2 B}$ definirane na $C([0,1])$ međusobno singularne, tj. da postoje izmjerivi skupovi $A_1, A_2 \subset C([0,1])$ takvi da je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ i $\mathbb{P}_1(A_1) = \mathbb{P}_2(A_2) = 1$.
(Uputa: Skupove A_1 i A_2 definirajte koristeći kvadratnu varijaciju slučajnih procesa $c_1 B$ i $c_2 B$.)

13. Neka su $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{F})$ i $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori, gdje su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ redom cilindrične σ-algebre na $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ i $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tj. najmanje σ-algebre u odnosu na koje su projekcije neprekidne.

(a) Dokažite da je $A \in \mathcal{F}$ ako i samo ako postoje $B \in \mathcal{G}$ i $t_1, t_2, \ldots \in [0, \infty)$ takvi da je

$$A = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots) \in B\}.$$

(Uputa: Iskoristite Dynkinov teorem o monotonim klasama.)

(b) Neka su

$$A_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \|\omega\|_\infty \leq 1\} \quad \text{i} \quad A_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \omega \quad \text{neprekidna}\}.$$

Dokažite da $A_1, A_2 \notin \mathcal{F}$.

Ante Mimica

Datum predaje: 2. veljače 2016.