1. Uvjetno očekivanje

1. Neka je $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ Borelova σ-algebra na $[0,1]$ i $\mathbb{P}$ Lebesgueova mjera. Definiramo
$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, [0, \tfrac{1}{2}), [\tfrac{1}{2}, 1]\} \quad \text{i} \quad \mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, [0, \tfrac{3}{4}), [\tfrac{3}{4}, 1]\}$$
te $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$.
   (a) Izračunajte $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]$.
   (b) Vrijedi li
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] \ ?$$
2. Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tj. neka vrijedi
$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad \text{za sve} \quad x, y \in \mathbb{R} \ \text{ i } \ \lambda \in [0,1] \,.$$
   (a) Dokažite da za sve $x < y < z$ vrijedi
$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} \,.$$
   (b) Zaključite da za svaki $c \in \mathbb{R}$ postoji desna derivacija
$$\varphi'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} = \inf_{x > c} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \,.$$
   (c) Dokažite za sve $c, x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\varphi(x) \geq \varphi(c) + (x - c)\varphi'_+(c) \,.$$
3. Neka su $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra. Dokažite da vrijedi
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]Y] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] \,.$$
4. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebre. Vrijedi li sljedeća tvrdnja:
$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \iff \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \ \text{ za sve } \ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \ ?$$

Upute i rješenja: **1.** (a) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} 3/8 & 0 \leq \omega < 1/2 \\ 5/8 & 1/2 \leq \omega \leq 1 \end{cases}$ (b) Ne. **2.** Tvrdnja (a) slijedi iz konveksnosti za $\lambda = \frac{y-x}{z-x}$. **3.** Izračunajte $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]]$. **4.** Da.