MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 1

(a) Neka su $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ i $Z \sim \text{Exp}(\eta)$ nezavisne slučajne varijable, gdje su $\lambda, \mu, \eta > 0$.

(a1) (3 boda) Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{P}(X > Y + Z | X > Z) = \mathbb{P}(X > Y).$$

(a2) (3 boda) Ako je $\mu = 2\lambda$ i $\eta = 3\lambda$, izračunajte

$$\mathbb{P}(X < \tfrac{Y+Z}{3}).$$

(b) Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i prebrojivim skupom stanja S. Označimo s $P_{ij}(t)$, $i, j \in S$, $t \geq 0$ prijelaznu funkciju i s $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ generatorsku matricu te definirajmo $q(i) = -q_{ii}$, $i \in S$.

(b1) (3 boda) Neka je $i \in S$ i definirajmo $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq i\}$. Dokažite da je

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\mathbb{P}_i(T \leq t)}{t} = q(i).$$

(b2) (4 boda) Neka je $Y = \{Y_n : n \geq 0\}$ pripadni lanac skokova Markovljevog lanca X. Dokažite da za $i \in S$ takav da je $q(i) > 0$ vrijedi

$$q(i) \int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ii}^{(n)},$$

gdje je $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ matrica prijelaza Markovljevog lanca Y.

(b3) (2 boda) Neka je $i \in S$ prolazno stanje za Markovljev lanac Y i pretpostavimo da je $q(i) > 0$. Dokažite da je $\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt < \infty$.

Rješenje:

(a1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y + Z | X > Z) &= \frac{\mathbb{P}(X > Y + Z)}{\mathbb{P}(X > Z)} = \frac{\iiint_{x > y+z} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} \eta e^{-\eta z}\, dx\, dy\, dz}{\frac{\eta}{\lambda+\eta}} \\
&= (\lambda + \eta) \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)y}\, dy \int_0^\infty e^{-(\lambda+\eta)z}\, dz \\
&= (\lambda + \eta) \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\lambda + \eta} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \mathbb{P}(X > Y)
\end{aligned}$$

Napomena (ne odnosi se bodovanje zadatka): Tvrdnja vrijedi i ako su Y, Z samo nezavisne slučajne varijable koje su $\mathbb{P}$-g.s. nenegativne. Naime, tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji

$$\mathbb{P}(X > Y + Z) = \mathbb{P}(X > Y)\mathbb{P}(X > Z)$$

pa je dovoljno pokazati tu tvrdnju, a ona slijedi iz

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > Y + Z) &= \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > y + z) d\mathbb{P}_Y(y) d\mathbb{P}_Z(z) \\
&= \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > y)\mathbb{P}(X > z) d\mathbb{P}_Y(y) d\mathbb{P}_Z(z) \\
&= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > y) d\mathbb{P}_Y(y) \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > z) d\mathbb{P}_Z(z) \\
&= \mathbb{P}(X > Y)\mathbb{P}(X > Z)\,.
\end{aligned}$$

(a2) Iz $\mathbb{P}(3X > t) = \mathbb{P}(X > t/3) = e^{-\lambda t/3}$ slijedi da je $3X \sim \mathrm{Exp}(\frac{\lambda}{3})$. Koristeći (a) dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < \tfrac{Y+Z}{3}) &= 1 - \mathbb{P}(3X > Y + Z) = 1 - \mathbb{P}(3X > Y + Z | 3X > Z)\mathbb{P}(3X > Z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(3X > Y)\mathbb{P}(3X > Z) = 1 - \frac{2\lambda}{\frac{\lambda}{3} + 2\lambda} \frac{3\lambda}{\frac{\lambda}{3} + 3\lambda} = 1 - \frac{27}{35} = \frac{8}{35}\,.
\end{aligned}$$

(b1) Označimo s J_1 prvo vrijeme skoka Markovljevog lanca X. Tada je

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathbb{P}_i(T_i \le t)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathbb{P}_i(J_1 \le t)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1 - e^{-q(i)t}}{t} = q(i)\,.$$

(b2) Ako su $J_0, J_1, J_2, \ldots$ vremena skokova, $\{E_n : n \ge 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $E_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ te ako je $Y = \{Y_n : n \ge 0\}$ pripadni lanac kokova, onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt &= \int_0^\infty \mathbb{E}_i 1_{\{X_t = i\}}\,dt = \mathbb{E}_i \int_0^\infty 1_{\{X_t = i\}}\,dt \\
&= \mathbb{E}_i \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty 1_{\{J_n \le t < J_{n+1}\}} 1_{\{Y_n = i\}}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i [J_{n+1} - J_n; Y_n = i] \\
&= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i \left[\frac{E_{n+1}}{q(Y_n)}; Y_n = i\right] = \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i E_{n+1} \mathbb{P}_i(Y_n = i) \\
&= \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili nezavisnost niza $\{E_n : n \ge 1\}$ i lanca skokova Y.

(b3) Budući je i prolazno za Y, slijedi da je $\sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)} < \infty$ pa je po (b2) i $\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt < \infty$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 2

Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom, prebrojivim skupom stanja S i generatorskom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ te neka je Π matrica prijelaza pripadnog lanca skokova.

(a) (2 boda) Definirajte invarijantnu mjeru Markovljevog lanca X.

(b) (3 boda) Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ invarijantna mjera Markovljevog lanca X. Definirajmo

$$\mu_i = q(i)\lambda_i, \quad i \in S\,,$$

gdje je $q(i) = -q_{ii}$, $i \in S$. Je li $\mu = (\mu_i : i \in S)$ invarijantna mjera za Π? Svoje tvrdnje dokažite.

(c) (3 boda) Pretpostavimo da je S konačan i neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ invarijantna mjera Markovljevog lanca X. Dokažite ili opovrgnite:

$$\lambda P(t) = \lambda \qquad \text{za sve} \quad t \geq 0\,,$$

gdje je $P(t) = (P_{ij}(t) : i, j \in S)$, $t \geq 0$ prijelazna funkcija Markovljevog lanca X.

(d) (3 boda) Pretpostavimo da je $S = \{1, 2, 3\}$ i

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte

$$\lim_{t\to\infty} P_{11}(t) \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} P_{23}(t)\,.$$

Obrazložite.

Rješenje:

(a) Invarijantna mjera (za X) je netrivijalna mjera $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ takva da vrijedi

$$\lambda Q = 0\,,$$

tj. $\sum_{i\in S} \lambda_i q_{ij} = 0$ za sve $j \in S$.

(b) Budući je $\pi_{ij} = \frac{q_{ij}}{q(i)}$, za $i \neq j$ i $q(i) = -q_{ii}$, slijedi

$$\begin{aligned}(\mu(\Pi - I))_j &= \sum_{i \in S}(\mu_i \pi_{ij} - \mu_i \delta_{ij}) = \sum_{i \in S \setminus \{j\}} q(i)\lambda_i \frac{q_{ij}}{q(i)} - q(i)\lambda_i \\ &= \sum_{i \in S} \lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j = 0\end{aligned}$$

za sve $j \in S$ pa je $\mu\Pi = \mu$. Dakle, μ jest invarijantna mjera za Π.

(c) Koristeći diferencijalnu jednadžbu unatrag dobijemo

$$\frac{d}{dt}[\lambda P(t)] = \lambda P'(t) = \lambda Q P(t) = 0\,,$$

budući je λ invarijantna mjera. Zato je $f(t) = \lambda P(t)$ konstantna funkcija pa iz

$$f(0) = \lambda P(0) = \lambda I = \lambda$$

dobijemo da je

$$\lambda P(t) = f(t) = f(0) = \lambda \quad \text{za sve} \ \ t \geq 0\,.$$

(d) Odredimo stacionarnu distribuciju $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, tj. rješenje sustava

$$\lambda Q = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,.$$

Dobije se sustav

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

s jedinstvenim rješenjem $\lambda = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Budući je X ireducibilan i regularan te ima stacionarnu distribuciju, invarijantna distribucija je ujedno i granična pa je

$$\lim_{t\to\infty} P_{11}(t) = \lambda_1 = \frac{3}{5} \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} P_{23}(t) = \lambda_3 = \frac{1}{5}\,.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA   IME I PREZIME   BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 3

(a) (3 boda) Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka su $s, t > 0$, $s < t$ i $m \in \mathbb{N}$. Dokažite da slučajna varijabla X_s ima binomnu distribuciju s parametrima m i $\frac{s}{t}$ uz vjerojatnost $\mathbb{Q}$ definiranu s

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A|X_t = m), \ A \in \mathcal{F}.$$

(b) Kupci u knjižaru dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom od 30 kupaca po satu. Neovisno o drugim kupcima, svaki kupac kupi knjigu s vjerojatnošću 0.6 .

(b1) (2 boda) Izračunajte vjerojatnost da u prvih 10 minuta knjižaru posjeti 1 kupac, a u prvih sat vremena 5 kupaca.

(b2) (2 boda) Izračunajte vjerojatnost da se u prva 2 sata u knjižari proda barem jedna knjiga.

(b3) (3 boda) Pored knjižare je i štand s perecima s istim radnim vremenom kao i knjižara na koji kupci dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom od 54 kupca po satu neovisno o posjeti knjižari. Svaka posjeta štandu s perecima rezultira kupnjom jednog pereca. Izračunajte očekivani broj prodanih pereca prije nego što se prodaju prve dvije knjige u knjižari.

Rješenje:

(a) Neka je $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta Poissonovog procesa te $X_r \sim \mathrm{P}(\lambda r)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(X_s = k) = \mathbb{P}(X_s = k|X_t = m) &= \frac{\mathbb{P}(X_s = k, X_t = m)}{\mathbb{P}(X_t = m)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_s = k, X_t - X_s = m-k)}{\mathbb{P}(X_t = m)} = \frac{\mathbb{P}(X_s = k)\mathbb{P}(X_{t-s} = m-k)}{\mathbb{P}(X_t = m)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}} = \binom{m}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{m-k}
\end{aligned}$$

(b) Označimo s X_t broj kupaca koji je došao u knjižaru do trenutka $t \geq 0$ te s Y_t broj kupaca koji je kupio knjigu do trenutka $t \geq 0$. Tada je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda = 30$, a $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\mu = \lambda p = 30 \cdot 0.6 = 18$.

(b1) Budući je $X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{10/60} = 1, X_1 = 5) &= \mathbb{P}(X_{1/6} = 1, X_1 - X_{1/6} = 4) = \mathbb{P}(X_{1/6} = 1)\mathbb{P}(X_{5/6} = 4) \\ &= \frac{\left(30 \cdot \frac{1}{6}\right)^1}{1!} e^{-30\cdot\frac{1}{6}} \frac{\left(30 \cdot \frac{5}{6}\right)^4}{4!} e^{-30\cdot\frac{5}{6}} = \frac{5^9}{4!} e^{-30}\end{aligned}$$

(b2) Traži se $\mathbb{P}(Y_2 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 1 - e^{-2\mu} = 1 - e^{-36}$.

(b3) Označimo sa Z_t broj kupljenih pereca do trenutka $t \geq 0$. Tada je $Z = \{Z_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intezitetom $\eta = 54$. Označimo li s T vrijeme potrebno do kupnje druge knjige, slijedi da je $T \sim \Gamma(2, \mu)$ kao zbroj dva nezavisna eksponencijalne vremena s parametrom $\mu = 30 \cdot 0.6 = 18$ i T je nezavisna od Z. Traži se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, Z_T &= \int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\, Z_t\ \mathbb{P}(T \in dt) = \int_0^\infty \eta t \frac{1}{\Gamma(2)} \mu^2 t^{2-1} e^{-\mu t}\, dt \\ &= \eta \left[-\mu t^2 e^{-\mu t} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \mu t e^{-\mu t}\, dt \right] = \frac{\eta}{\mu} \\ &= 2\eta \int_0^\infty t\mu e^{-\mu t}\, dt = 2\frac{\eta}{\mu} = 2 \cdot \frac{54}{18} = 6\,.\end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 4

(a) (3 boda) Definirajte proces obnavljanja te pripadni brojeći proces.

(b) (2 boda) Iskažite elementarni teorem obnavljanja.

(c) (5 bodova) Dokažite elementarni teorem obnavljanja.

(d) U nekom gradu kružna autobusna linija prometuje između glavnog trga i botaničkog vrta. Zbog nepredvidive situacije u prometu vrijeme potrebno autobusu da stigne s jednog mjesta na drugo je uniformno distribuirano na intervalu od 30 do 45 minuta.

(d1) (2 boda) Vozač po vožnji sakupi za karte ukupni iznos koji je slučajan i ima funkciju gustoće

$$f(x) = \frac{1}{20\sqrt{x}} 1_{[100,400]}(x) \,.$$

Kolika je dugoročna zarada autobusne kompanije na ovoj liniji po satu?

(d2) (2 boda) Koliko puta po satu autobus kreće od botaničkog vrta?

Rješenje:

(a) Proces obvavljanja je slučajni proces $S = \{S_n : n \geq 0\}$ definiran s

$$S_n = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n, \; n \geq 0 \,,$$

gdje je $\{Y_n : n \geq 0\}$ niz *nenegativnih nezavisnih* slučajnih varijabli takav da je niz $\{Y_n : n \geq 1\}$ niz *jednako distribuiranih* slučajnih varijabli. Pripadni brojeći proces je slučajni proces $N = \{N_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n), \quad t \geq 0 \,.$$

(b) Neka je $S = \{S_n : n \geq 0\}$ proces obnavljanja. Tada vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\, N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\, Y_1}$$

(uz konvenciju $\frac{1}{\infty} = 0$) .

(c) Dokažimo prvo da vrijedi

$$\frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t}\,. \tag{1}$$

Ako je $\mathbb{E}\,Y_1 = \infty$, onda (1) očigledno vrijedi. U slučaju $\mathbb{E}\,Y_1 < \infty$, zbog $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1}) = 1$ iz Fatouove leme dobijemo

$$\frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1} = \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to\infty} \frac{N_t}{t}\right] \le \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t}\,.$$

Dokazat ćemo još

$$\frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1} \ge \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t}\,. \tag{2}$$

Pretpostavimo prvo da su sl. $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ $\mathbb{P}$-g.s. omedjene konstantom $M > 0$. Koristeći Waldovu jednakost

$$\mathbb{E}\,S_{N_t} = \mathbb{E}\,N_t \cdot \mathbb{E}\,Y_1 + \mathbb{E}\,Y_0$$

i $S_{N_t} = S_{N_t-1} + Y_{N_t} \le t + M$ slijedi

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1}\left[\frac{\mathbb{E}\,S_{N_t}}{t} - \frac{\mathbb{E}\,Y_0}{t}\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1} \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,S_{N_t}}{t}\\ &\le \limsup_{t\to\infty}\left[1 + \frac{M}{t}\right] = \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1}\,.\end{aligned}$$

U općenitom slučaju definiramo, za $M > 0$,

$$Y_0^M = Y_0 \wedge M, \quad Y_i^M = Y_i \wedge M,\ i \ge 1, \quad S_n^M = Y_0^M + Y_1^M + \ldots + Y_n^M,\ n \ge 0$$

te označimo pripadni brojeći proces s N^M. Iz $S_n^M \le S_n$ slijedi da je

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n^M) \le N_t^M$$

pa je po prethodno dokazanom, za sve $M > 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t^M}{t} \le \frac{1}{\mathbb{E}\,[Y_1 \wedge M]}\,.$$

Iz teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t} \le \lim_{M\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}\,[Y_1 \wedge M]} = \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1}\,.$$

Konačno, iz (1) i (2) dobijemo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t} \le \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t}\,,$$

što znači da vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\,Y_1}\,.$$

(d1) Radi se o procesu obnavljanja s nagradom, gdje su $Y_0 = 0$, $Y_n \sim U([\frac{30}{60}, \frac{45}{60}]) = U([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])$ i Q_n imaju gustoću f za $n \geq 1$. Traži se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t-1} Q_i}{t} = \frac{\mathbb{E}\, Q_1}{\mathbb{E}\, Y_1}$$

Vrijedi

$$\mathbb{E}\, Q_1 = \int_{100}^{400} \frac{\sqrt{x}}{20}\, dx = \frac{1}{30} x^{3/2}\Big|_{100}^{400} = \frac{8000 - 1000}{30} = \frac{700}{3}$$
$$\mathbb{E}\, Y_1 = \int_{1/2}^{3/4} 4x\, dx = 2x^2\Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{9-4}{8} = \frac{5}{8}$$

pa je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\frac{700}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{1120}{3}\,.$$

(d2) Radi se o procesu obnavljanja, gdje su $Y_0 = 0$, $Y_n \stackrel{d}{=} U + V$, $n \geq 1$, $U, V \sim U([\frac{30}{60}, \frac{45}{60}]) = U([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])$ nezavisne slučajne varijable. Traži se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\, Y_1} = \frac{1}{\mathbb{E}\, U + \mathbb{E}\, V} = \frac{1}{\frac{5}{8} + \frac{5}{8}} = \frac{4}{5}\,.$$