6. Poissonov proces i procesi obnavljanja

1. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$. Izračunajte
   (a) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 3, X_4 = 6)$,
   (b) $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 \geq 2)$,
   (c) $\mathbb{P}(X_{10} - X_8 \geq 3)$,
   (d) $\mathbb{P}(X_5 - X_3 \geq 1, X_2 = 1)$.

2. Na neko računalo elektronička pošta stiže po Poissonovom procesu s intenzitetom 10 poruka po satu. Izračunajte vjerojatnost
   (a) da u 6 minuta stigne barem jedna poruka,
   (b) da u prvih pola sata stigne najviše jedna poruka, a u prvih sat vremena stignu barem 3 poruke.
   (c) da između prvog i drugog sata stigne barem dvije poruke.

3. Na nekom križanju crveni automobili dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom $\lambda > 0$, a plavi po Poissonovom procesu s intenzitetom $\mu > 0$ nezavisno od crvenih.
   (a) Odredite distribuciju broja crvenih i plavih automobila u trenutku $t > 0$.
   (b) Ako je do trenutka $t > 0$ točno jedan automobil prošao križanjem, kolika je vjerojatnost da je crvene boje?
   (c) Ako je do trenutka $t > 0$ prošlo tri automobila, kolika je vjerojatnost da je barem jedan crvene boje?
   (d) Odredite očekivani broj crvenih automobila koji prođe prije prolaska prvog plavog automobila.

4. Ptice slijeću na žicu po Poissonovom procesu s intenzitetom 10 ptica po satu. Svaka ptica je neovisno od drugih vrabac s vjerojatnošću 0.4, a inače je lastavica.
   (a) Kolika je vjerojatnost da u sat vremena na žicu sleti barem jedan vrabac?
   (b) Ako je u jednom satu na žicu sletilo 4 vrapca, kolika je vjerojatnost da su u tom vremenskom periodu još na žicu sletjele 3 lastavice?

5. Putnici dolaze na željeznicku stanicu po Poissonovom procesu s intenzitetom $\lambda > 0$. Izračunajte ukupno očekivano vrijeme čekanja svih putnika koji se nalaze na stanici do trenutka $t > 0$ kada na stanicu stiže vlak.

6. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$. Definiramo slučajni proces $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ s

$$Y_t = \begin{cases} -1 & X_t \text{ je neparan} \\ 1 & X_t \text{ je paran ili jednak } 0\,. \end{cases}$$

   (a) Dokažite da je Y Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i odredite mu generatorsku matricu.

(b) Izračunajte $\mathbb{E}Y_t$ za $t > 0$.

7. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ i prirodnom filtracijom.

   (a) Dokažite da su sljedeći slučajni proces martingali

   (a1) $X_t - \lambda t,\ t \geq 0$ (a2) $(X_t - \lambda t)^2 - \lambda t,\ t \geq 0$ (a3) $e^{\mu X_t - \lambda(e^\mu - 1)t},\ t \geq 0,$

   gdje je $\mu \in \mathbb{R}$.

   (a4*) Pokušajte pomoću (a3) odrediti "Poissonovski" martingal trećeg stupnja.

   (b) Za $s, t \geq 0$ izračunajte

   $$\text{(b1)}\quad \mathbb{E}[X_s X_t], \qquad \text{(b2)}\quad \mathrm{Cov}(X_s, X_t).$$

8. Kupci dolaze u supermarket u slučajnim trenucima tako da su vremena između dolazaka dva kupca nezavisna i uniformno distribuirana na intervalu između 0 i 10 minuta. Svaki kupac potroši slučajan iznos koji ima vjerojatnosnu funkciju gustoće

   $$f(x) = \frac{\sqrt{10000 - x^2}}{2500\pi} 1_{[0,100]}(x).$$

   Odredite prosječni utržak supermarketa po satu.

9. Štete na naplatu u neko osiguravajuće društvo dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom $\lambda > 0$ po danu. Iznos n-te štete je jednak $\sqrt{W_n}$, gdje je $\{W_n : n \geq 1\}$ niz vremena čekanja Poissonovog procesa. Izračunajte prosječni iznos koji po danu osiguravajuće društvo mora izdvojiti za isplatu šteta.

10. Žaba radi nezavisne skokove koji su uniformno distibuirani između 0.4 m i 1 m.

    (a) Koliko skokova po metru napravi žaba na dužem putu?

    (b) Ispred žabe se nalaze dva paralelna potoka: prvi je udaljen od žabe 0.4 m i širok je 0.2 m, a drugi je udaljen od žabe 1 m i širok je 0.4 m. Kolika je vjerojatnost da žaba preskoči oba potoka?

    (c) Žaba se nalazi na livadi punoj muha. Ako je l duljina skoka u m, onda je broj muha koje žaba uhvati u tom skoku jednak $\lfloor 5l \rfloor$. Koliko muha po metru u prosjeku uhvati žaba nakon dužeg skakanja po livadi?

Upute i rješenja: **1.** (a) $\frac{2}{3}\lambda^6 e^{-4\lambda}$ (b) $\lambda(e^{-\lambda} - e^{-3\lambda})$ (c) $1 - e^{-2\lambda}(1 + 2\lambda + 2\lambda^2)$ (d) $2\lambda(e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda})$ **2.** (a) $1 - e^{-1}$ (b) $6e^{-5} - \frac{61}{2}e^{-10}$ (c) $1 - 11e^{-10}$ **3.** (a) broj automobila ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda + \mu$. (b) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ (c) $1 - \frac{\mu^3}{(\lambda+\mu)^3}$ (d) Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ i neka je $W \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ nezavisna od X. Traži se $\mathbb{E}X_W = \int_0^\infty \mathbb{E}X_t \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{\lambda}{\mu}$. **4.** (a) $1 - e^{-4}$ (b) $36e^{-6}$ **5.** $\frac{\lambda t^2}{2}$. Neka je T ukupno vrijeme čekanja svih putnika do dolaska vlaka. Tada je $T = (t - J_1) + (t - J_2) + \ldots + (t - J_{N_t})$, što se može zapisati kao $T = \int_0^t N_s\, ds$. **6.** (a) Iz konstrukcije slijedi da su vremena čekanja eksponencijalna s parametrom $\lambda > 0$ pa je Y Markovljev s generatorskom matricom $Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$. (b) Primijetimo da je $Y_t = (-1)^{X_t}$ pa se lako dobije $\mathbb{E}Y_t = e^{-2\lambda t}$. **7.** (a) Koristite nezavisnost i Poissonovu distribuciju prirasta. (a4) Neka je $f(\mu, x, t) = e^{\mu x - \lambda(e^\mu - 1)t}$. Krenite od jednakosti $\mathbb{E}[f(\mu, X_t, t); A] = \mathbb{E}[f(\mu, X_s, s); A)]$ za $A \in \mathcal{F}_s$, $s < t$. Koristeći teorem o dominiranoj konveregnciji se može ta jednakost derivirati više puta po μ i zatim pustiti $\mu \to 0$. Time se dobije da je proces $\lim_{\mu \to 0+} \frac{\partial^m f}{\partial \mu^m}(\mu, X_t, t)$ martingal. Koristeći relaciju $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu, x, t) = (x - \lambda t e^\mu) f(\mu, x, t)$ dobijemo za $m = 3$ da je proces $(X_t - \lambda t)^3 - (X_t - \lambda_t)(\lambda t - 2)\lambda t$, $t \geq 0$ martingal. (b1) $\lambda^2 st + \lambda(s \wedge t)$ (b2) $\lambda(s \wedge t)$ **8.** $\frac{1600}{\pi} \asymp 509.296$ **9.** $\frac{\sqrt{\lambda\pi}}{2}$ **10.** (a) $\frac{10}{7} \asymp 1.423$ (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{30}{7} \asymp 4.2857$