5. Markovljevi lanci s neprekidnim vremenom

1. Neka je $X \sim \text{Exp}(\lambda), Y \sim \text{Exp}(\mu), Z \sim \text{Exp}(\nu)$ nezavisne slučajne varijable i $\lambda, \mu, \nu > 0$. Dokažite da vrijede sljedeće varijante svojstva memorijske odsutnosti
   (a)
   $$\mathbb{P}(X > Y + Z | X > Z) = \mathbb{P}(X > Y)\,,$$
   (b)
   $$\mathbb{P}(Z > Y \,|\, \min\{Y, Z\} > W) = \mathbb{P}(Z > Y)\,,$$
   gdje je W slučajna varijabla nezavisna od Z i Y.

2. Neka su $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezavisne slučajne varijable i $\lambda > 0$. Koristeći prethodni zadatak izračunajte:
   (a) $\mathbb{P}(X > Y + Z)\,,$
   (b) $\mathbb{P}\left(X < \frac{Y+Z}{2}\right).$

3. Neka su $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ i $X_3 \sim \text{Exp}(\lambda_3)$ nezavisne slučajne varijable
   (a) Izračunajte $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < X_3)\,.$
   (b) Izračunajte
   $$\begin{aligned} &\text{(b1)} \quad \mathbb{P}(X_3 > X_2 | X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\})\,, \\ &\text{(b2)} \quad \mathbb{P}(X_1 < X_2 | X_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\})\,. \end{aligned}$$

4. Neka su $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ i $X_3 \sim \text{Exp}(\lambda_3)$ nezavisne slučajne varijable, gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0\,.$
   (a) Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}\,.$
   (b) Odredite distribuciju slučajne varijable $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}\,.$
   (c) Izračunajte $\mathbb{P}(X_i = Y)$ za $i = 1, 2, 3\,.$

5. Neka su $\{X_n : n \geq 1\}$ su nezavisne slučajne variajble takve da je $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje je $\lambda > 0\,.$ Neka je N geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p \in (0, 1)$ nezavisna od niza $\{X_n : n \geq 1\}$, tj. $\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$. Definiramo $S = X_1 + \ldots + X_N$. Odredite distribuciju slučajne varijable $S\,.$

6. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i generatorskom matricom
   $$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix},$$
   gdje su $\alpha, \beta > 0\,.$
   (a) Izračunajte $P_{ij}(t)$ za $i, j \in \{1, 2\}$ i $t \geq 0\,.$
   (b) Izračunajte $\lim\limits_{t \to \infty} P_{ij}(t).$

7. Dokažite da je

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0.6 + 0.4e^{-2t} & 0.4 - 0.4e^{-2t} \\ 0.6 - 0.6e^{-2t} & 0.4 + 0.6e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 .$$

prijelazna funkcija Markovljevog lanca $X = \{X_t : t \geq 0\}$ s neprekidnim vremenom i skupom stanja $S = \{0, 1\}$. Izračunajte

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 0 | X_0 = 0) .$$

8. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i prebrojivim skupom stanja S.

   (a) Neka je $i \in S$. Označimo $W_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq i\}$. Dokažite, koristeći samo Markovljevo svojstvo, da je

   $$\mathbb{P}_i(W_1 > s + t | W_1 > t) = \mathbb{P}_i(W_1 > s) .$$

   (b) Koju distribuciju ima W_1 uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$?

9. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ slučajni proces s neprekidnim vremenom i skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$. Pretpostavimo da je pripadni slučajni proces skokova Markovljev lanac s matricom prijelaza

$$\Pi = \begin{bmatrix} \alpha & (1-\alpha)/2 & (1-\alpha)/2 \\ (1-\alpha)/2 & \alpha & (1-\alpha)/2 \\ 2(1-\alpha)/3 & (1-\alpha)/3 & \alpha \end{bmatrix},$$

gdje je $\alpha \in [0, 1]$ te pretpostavimo da u svakom stanju slučajni proces X provodi eksponencijalno vrijeme s parametrom $\lambda > 0$.

   (a) Za koje vrijednosti α je X Markovljev lanac s neprekidnim vremenom?

   (b) Za vrijednosti iz (a) odredite pripadne granične distribucije.

10. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ slučajni proces sa skupom stanja $S = \{0, 1\}$. Proces u svakom stanju čeka eksponencijalno vrijeme s parametrom Λ, gdje je $\mathbb{P}(\Lambda = 1) = \frac{1}{3}$ i $\mathbb{P}(\Lambda = 2) = \frac{2}{3}$ i zatim prijeđe u drugo stanje. Je li X Markovljev lanac?

11. Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom, prebrojivim skupom stanja S i generatorskom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$. Dokažite da za $j \in S$ vrijedi

$$\text{(a)} \quad \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \mathbb{P}_i(J_1 \leq t) = -q_{ii} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \mathbb{P}_i(J_2 \leq t) = 0 ,$$

gdje J_n označava vrijeme n-tog skoka slučajnog procesa X .

Upute i rješenja: **1.** (b) Primijetite da je $\mathbb{P}(Z > Y > W) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Z > Y > W|W)] = \mathbb{E}[h(W)]$, gdje je $h(x) = \mathbb{P}(Z > Y > x)$ i $\mathbb{P}(Y > W, Z > W) = \mathbb{E}[g_1(W)g_2(W)]$, gdje su $g_1(x) = \mathbb{P}(Y > x)$ i $g_2(x) = \mathbb{P}(Z > x)$. **2.** (a) $\frac{1}{4}$ (b) Odredite prvo distribuciju slučajne varijable $2X$. Tražena vjerojatnost je $\frac{5}{9}$. **3.** (a) Iskoristite zadatak 1 (b). $\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ (b1) uz $W = X_1$. Rješenje je $\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$. (b2) $\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3}$ **4.** (a) $Y \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ (b) $f_Z(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} + \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} - (\lambda_1 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x} - (\lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}$ (c) $\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ **5.** $S \sim \text{Exp}(\lambda p)$ **6.** (a) Upotrijebite jednadžbu unaprijed $P'(t) = P(t)Q$ i $P_{i1}(t) + P_{i2}(t) = 1$ da biste dobili $P(t) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \end{bmatrix}$. **7.** Odredite Q-matricu i konstruirajte Markovljev lanac X. Tražena vjerojatnost je $0.24(1 - e^{-2})(1 - e^{-4})$. **8.** (a) Budući su trajektorije neprekidne zdesna, $\mathbb{P}_i(W_1 > s + t, W_1 > t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(X_{t+s} = i, X_{t+\frac{n-1}{n}s} = i, \ldots, X_{t+\frac{1}{n}s}, X_t = i, X_{\frac{n-1}{n}t} = i, \ldots, X_{\frac{1}{n}s} = i) = \lim_{n\to\infty} P_{ii}(s/n)^n P_{ii}(t/n)^n$. (b) W_1 ima eksponencijalnu distribuciju. **9.** (a) $\alpha = 0$. Vrijeme prvog skoka ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda(1 - \alpha)$. Napišite generatorsku matricu i zaključite da $\alpha = 0$. (b) $(10/27, 8/27, 9/27)$ **10.** Ne. Ako s W označimo vrijeme čekanja u nekom stanju, onda je $\mathbb{P}(W > t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$ pa W nema eksponencijalnu distribuciju (v. Zad. 8). **11.** $\mathbb{P}_i(J_1 \leq 1) = 1 - e^{q_{ii}t}$. (b) $\mathbb{P}_i(J_2 \leq t) = 1 - \mathbb{P}_i(J_2 > t) = 1 - \mathbb{P}_i(W_1 > t) - \mathbb{P}_i(W_1 \leq t, W_1 + W_2 > t) = 1 - e^{q_{ii}t} - \sum_{k\in S} \pi_{ik} \int\int_{x \leq t < y} q_{ii}q_{kk}e^{q_{ii}x}e^{q_{kk}y}dxdy = 1 - e^{q_{ii}t} - \sum_{k\in S} \pi_{ik}e^{q_{kk}t}(1 - e^{q_{ii}t})$. Tvrdnja slijedi iz teorema o dominiranoj konveregnciji.