4. Martingali - treći dio

1. Neka su $Y_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $n \geq 0$ nezavisne slučajne varijable, gdje je $p \in (0,1)$ i $q = 1-p$. Definiramo
$$T = \min\{n \geq 0 : Y_n = 1\}\,,$$
i
$$X_n = q^{-n} 1_{\{T>n\}}\,, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n),\ n \geq 0\,.$$
   (a) Dokažite da je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ martingal. Konvergira li X g.s.? U slučaju da jest, odredite mu limes.
   (b) Konvergira li X u L^1?

2. Neka su $U_n \sim U(0,2)$, $n \geq 1$ nezavisne slučajne varijable. Definiramo $X_0 = 1$ i $X_n = \prod_{i=1}^{n} U_i$ za $n \geq 1$.
   (a) Dokažite da postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s..
   (b) Stavimo $Y_n = \sqrt{X_n}$. Pronađite konstantu $c > 1$ takvu da je
$$\lim_{n\to\infty} c^n Y_n = Y_\infty \text{ g.s.}$$
   za neku slučajnu varijablu Y_∞.
   (c) Dokažite da je $X_\infty = 0$.

3. Neka je $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 0$. Stavimo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_n = \sigma(\{1\},\{2\},\ldots,\{n\},\{n+1,n+2,\ldots\})$ za $n \geq 1$. Definiramo $X_n = (n+1)1_{\{n+1,n+2,\ldots\}}$ za $n \geq 0$. Konvergira li $X = \{X_n : n \geq 0\}$
   (a) g.s.;
   (b) u L^1?

   U slučaju konvergencije, odredite limes.

4. Neka je $U_n \sim U(0,1)$, $n \geq 1$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Stavimo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n)$ za $n \geq 1$. Definiramo
$$X_0 = p \in (0,1) \quad \text{i} \quad X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta) 1_{[0,X_n]}(U_{n+1}) \ \text{ za } \ n \geq 0\,,$$
   gdje je $\theta \in (0,1)$.
   (a) Dokažite da je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ martingal takav da je $0 < X_n < 1$ za sve $n \geq 0$. Zaključite da postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s..
   (b) Dokažite da X konvergira u L^p za sve $p \geq 1$.
   (c) Dokažite da je
$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1-\theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1-X_n)]$$
   te izračunajte $\mathbb{E}[X_\infty(1-X_\infty)]$.
   (d) Odredite razdiobu slučajne varijable X_∞.

Upute i rješenja: **1.** (a) X konvergira g.s. prema $X_\infty = 0$. (b) Ne, jer je $\mathbb{E}|X_n - X_\infty| = \mathbb{E}X_n = 1$. **2.** X je nenegativni martingal pa konvergira g.s.. (b) $c := \mathbb{E}[\sqrt{U_1}]^{-1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. (c) Upotrijebite $X_n = c^{-n} Y_n^2$ i konvergenciju martingala Y. **3.** (a) Da, prema 0. (b) Ne, $\mathbb{E}X_n = 1$. **4.** (d) $X_\infty \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.