3. Martingali - drugi dio

Neka je $\{Y_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1/2$. Definiramo slučajni proces $S = \{S_n : n \geq 0\}$ s

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1$$

i filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ s $\mathcal{F}_n := \sigma\{S_0, \ldots, S_n\}$, $n \geq 0$. S predavanja znamo da je slučajni proces $X = \{X_n : n \geq 0\}$ definiran s $X_n = e^{\lambda S_n - n \ln \operatorname{ch} \lambda}$ martingal.

1. Neka je $A \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. Derivirajte jednakost

   $$\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1} - (n+1) \ln \operatorname{ch} \lambda}; A] = \mathbb{E}[e^{\lambda S_n - n \ln \operatorname{ch} \lambda}; A]$$

   po λ više puta, pustite zatim $\lambda \to 0+$ i pronađite na taj način polinomijalne martingale gledajući po S_n sve do četvrtog stupnja.

2. Označimo za $m \in \mathbb{Z}$

   $$T_m := \min\{n \geq 1 : S_n = m\}.$$

   Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $-a < 0 < b$ i označimo $T = T_{-a} \wedge T_b$.

   (a) Izračunajte $\mathbb{E}T$.

   (b) Izračunajte $\mathbb{E}[TS_T]$.

   (c) Izračunajte $\operatorname{Var}T$ u slučaju $a = b$.

3. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $-a < 0 < b$ i označimo $T = T_{-a} \wedge T_b$.

   (a) Izračunajte $\mathbb{E}[e^{-T \ln \operatorname{ch} \lambda}]$.

   (b) Neka je $a = b = 2$. Dokažite da je $\mathbb{E}[\alpha^T] = \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}$, $\alpha \in (0,1)$. Odredite razdiobu slučajne varijable T.

   (c) Neka je $a = 1$ i $b = 2$. Dokažite da je $\mathbb{E}[\alpha^T] = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Odredite razdiobu slučajne varijable T.

   (d) Neka je $a = b = 3$. Dokažite da je $\mathbb{E}[\alpha^T] = \frac{\alpha^3}{4-3\alpha^2}$, $\alpha \in (0,1)$. Odredite razdiobu slučajne varijable T.

Upute i rješenja: **1.** $S_n, S_n^2 - n,\ S_n^3 - 3nS_n, S_n^4 - 6nS_n^2 + 3n^2 + 2n,\ S_n^5 - 10nS_n^3 + 15n^2 S_n + 10nS_n$ **2.** Upotrijebite martingale iz prethodnog zadatka i teorem o opcionalnom zaustavljanju. (a) ab (b) $\frac{ab(b-a)}{3}$ (c) $\frac{2(b^2+b^4)}{3}$ **3.** (a) Upotrijebite teorem o opcionalnom zaustavljanju na martingal X za λ i $-\lambda$. $\mathbb{E}[e^{-T \ln \operatorname{ch} \lambda}] = \frac{\operatorname{sh}(\lambda a) + \operatorname{sh}(\lambda b)}{\operatorname{sh}(\lambda(a+b))}$. (b) Slijedi iz (a) za $\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda}$. $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$. (c) $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$. (d) $\mathbb{P}(T = n) = \frac{3^{k-1}}{4^k}$, $n = 2k+1$, $k \geq 1$.