2. Martingali - prvi dio

1. Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ kvadratno integrabilni slučajni proces, $\mathcal{F} = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. Ako $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ definira $(\mathcal{F}_n)$-martingal, dokažite da je tada

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = 0 \quad \text{za} \quad i, j \geq 0,\ i \neq j\,.$$

2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ filtracija na njemu. Za niz događaja $\{B_n : n \geq 0\} \subset \mathcal{F}$ takav da je $B_n \in \mathcal{F}_n$ za sve $n \geq 0$ definiramo slučajni proces $X = \{X_n : n \geq 0\}$ s

$$X_n = \sum_{k=0}^n 1_{B_k}, \quad n \geq 0\,.$$

   (a) Dokažite da je X submartingal.
   (b) Odredite Doobovu dekompoziciju procesa X.

3. Neka je $\{Y_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}Y_1 = \mu < \infty$ i $\text{Var}Y_1 = \sigma^2 < \infty$. Definiramo slučajni proces $X = \{X_n : n \geq 0\}$ s

$$X_0 = 0 \quad \text{i} \quad X_n = \sum_{k=1}^n Y_k\,,\ n \geq 1\,.$$

Odredite nizove (b_n) i (c_n) takve da

$$X_n^2 + b_n X_n + c_n, \quad n \geq 0$$

bude martingal.

4. Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ niz integrabilnih slučajnih varijabli i $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. Neka su $a, b > 0$ takvi da je $a + b = 1$ i

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = aX_n + bX_{n-1} \quad \text{za sve} \quad n \geq 1\,.$$

Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da

$$M_n = \alpha X_n + X_{n-1},\ n \geq 0$$

bude martingal.

Upute i rješenja: **1.** Promotrite $\mathbb{E}[(S_i - S_{i-1})(S_j - S_{j-1})]$. **2.** $X = A + M$, $A_0 = 0$, $A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k | \mathcal{F}_{k-1})$, $n \geq 1$ i $M_0 = 1_{B_0}$, $M_n = \sum_{k=1}^n (1_{B_k} - \mathbb{P}(B_k | \mathcal{F}_{k-1}))$, $n \geq 1$. **3.** $b_n = -2\mu n + b_0$ i $c_n = -(\sigma^2 + \mu^2)n + \mu^2 n(n+1) + c_0$ **4.** $\alpha = (1-a)^{-1}$