MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 1

(a) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ te neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je $X \geq 0$ g.s. s konačnim očekivanjem. Definirajte $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

(b) (4 boda) Iskažite i dokažite uvjetnu Fatouovu lemu.

(c) (3 boda) Neka je X slučajna varijabla s uniformnom razdiobom na intervalu $(0, 2)$ i neka je $Y = \lfloor X \rfloor$, gdje $\lfloor x \rfloor$ označava najveće cijelo broja $x \in \mathbb{R}$. Izračunajte $\mathbb{E}[X^2|Y]$.

(d) (3 boda) Neka su X i Y kvadratno integrabilne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ i $\mathbb{E}[Y|X] = X$. Dokažite da je $X = Y$ $\mathbb{P}$-g.s.

Rješenje:

(a) Uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ je g.s. jedinstvena slučajna varijabla koja je $\mathcal{G}$-izmjeriva te zadovoljava

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]; A] = \mathbb{E}[X; A] \quad \text{za sve} \quad A \in \mathcal{G}\,.$$

(b) **Teorem. (Fatou)** Neka su X_n, $n \geq 0$ integrabilne i g.s. nenegativne slučajne varijable takve da je $\liminf_{n\to\infty} X_n$ integrabilna. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\,.$$

Dokaz. Budući $\inf_{k\geq n} X_k \uparrow \sup_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} X_k = \liminf_{n\to\infty} X_n$, iz uvjetnog Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}[\inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{G}]}_{\leq \mathbb{E}[X_k|\mathcal{G}] \text{ for all } k\geq n}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mathbb{E}[\inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{G}] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\,.$$

(c) Primijetimo da Y poprima samo dvije vrijednosti: 0 i 1, odakle slijedi da je

$$\sigma(Y) = \sigma(\{Y = 0\}, \{Y = 1\}) = \sigma(\{X < 1\}, \{X \geq 1\})$$

generirana konačnom particijom particijom $\{\{X < 1\}, \{X \geq 1\}\}$ pa je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2|Y] &= \mathbb{E}[X^2|X < 1]1_{\{X<1\}} + \mathbb{E}[X^2|X \geq 1]1_{\{X\geq1\}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X^2; X < 1]}{\mathbb{P}(X < 1)}1_{\{X<1\}} + \frac{\mathbb{E}[X^2; X \geq 1]}{\mathbb{P}(X \geq 1)}1_{\{X\geq1\}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx}{\frac{1}{2}}1_{\{X<1\}} + \frac{\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx}{\frac{1}{2}}1_{\{X\geq1\}} \\
&= \frac{1}{3}1_{\{X<1\}} + \frac{7}{3}1_{\{X\geq1\}}\,.
\end{aligned}$$

(d) Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[XY\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY|X\right]\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY|Y\right]\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[Y^2\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 0\end{aligned}$$

pa je $(X-Y)^2 = 0$ g.s., tj. $X = Y$ g.s..

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 2

(a) (3 boda) Definirajte pojam submartingala.

(b) (6 bodova) Iskažite i dokažite teorem o Doobovoj dekompoziciji submartingala.

(c) (3 boda) Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ slučajni proces adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ i neka je $H = \{H_n : n \geq 0\}$ predvidivi slučajni proces. Definirajte martingalnu transformaciju $(H \bullet X)$ slučajnog procesa H po slučajnom procesu X.

(d) (3 boda) Neka je $\{Y_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}\,Y_n = 0$ i $\mathbb{E}\,Y_n^2 = \sigma^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $X_0 = 0$ i $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ za $n \geq 1$ te filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$, gdje su $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ za $n \geq 1$. Za ograničeni predvidivi proces $H = \{H_n : n \geq 0\}$ izračunajte proces kvadratne varijacije $\langle (H \bullet X) \rangle$ martingalne transformacije.

Rješenje: (a) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ filtracija na njemu. Slučajni proces $X = \{X_n : n \geq 0\}$ je submartingal ako za sve $n \geq 0$ vrijedi

(i) X_n je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva slučajna varijabla

(ii) $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$

(iii) $\mathbb{E}\,[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$.

(b) **Teorem. (Doobova dekompozicija)** Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ submartingal. Tada postoje jedinstveni martingal $M = \{M_n : n \geq 0\}$ i predvidivi neopadajući slučajni proces $A = \{A_n : n \geq 0\}$ takvi da je

$$X_n = M_n + A_n \quad \text{za sve} \quad n \geq 0\,.$$

Dokaz. Definiramo $A_0 = 0$ i $M_0 = X_0$, a za $n \geq 1$

$$A_n = A_{n-1} + \underbrace{\mathbb{E}\,[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}}_{\geq 0\text{, jer je } X \text{ submartingal}} \qquad \text{i} \qquad M_n = X_n - A_n\,.$$

Vidimo da je $A_1 = \mathbb{E}\,[X_1|\mathcal{F}_0] - X_0$ $\mathcal{F}_0$-izmjeriva i dalje slijedi matematičkom indukcijom da je A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva za sve $n \geq 1$. Preostaje dokazati martingalnost procesa M. Neka je $n \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\,[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - A_{n-1} \\ &= (X_{n-1} + A_n - A_{n-1}) - A_n = X_n - A_{n-1} = M_{n-1}\,.\end{aligned}$$

Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da je

$$M_n + A_n = X_n = \tilde{M}_n + \tilde{A}_n \quad \text{za sve} \quad n \geq 0\,,$$

gdje su $M, \tilde{M}$ martingali, a $A, \tilde{A}$ predvidivi neopadajući procesi. Tada je za svaki $n \geq 0$

$$\begin{aligned} A_{n+1} - \tilde{A}_{n+1} &= \mathbb{E}\,[A_{n+1} - \tilde{A}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\,[\tilde{M}_{n+1} - M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= \tilde{M}_n - M_n = A_n - \tilde{A}_n = \ldots = A_0 - \tilde{A}_0 = 0\,, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili predvidivost, a u trećoj martingalnost.
(c) Martingalna transformacija slučajnog procesa H po slučajnom procesu X je slučajni proces $(H \bullet X) = \{(H \bullet X)_n : n \geq 0\}$ definiran s

$$\begin{aligned} (H \bullet X)_0 &= H_0 X_0 \\ (H \bullet X)_n &= H_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}), \quad \text{za} \quad n \geq 1\,. \end{aligned}$$

(d) Primijetimo da je X martingal, jer je $\mathbb{E}\,Y_n = 0$ za sve $n \geq 1$ pa je $(H \bullet X)$ submartingal. Trebamo izračunati predvidivi neopadajući proces iz Doobove dekompozicije submartingala $(H \bullet X)_n^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} H_j Y_j\right)^2$, $n \geq 0$. Iz dokaza u dijelu (b) znamo da je taj proces dan s

$$\langle (H \bullet X) \rangle_n = \langle (H \bullet X) \rangle_{n-1} + \mathbb{E}\,[(H \bullet X)_n^2 | \mathcal{F}_n] - (H \bullet X)_{n-1}^2\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[(H \bullet X)_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - (H \bullet X)_{n-1}^2 &= \mathbb{E}\,[((H \bullet X)_{n-1} + H_n Y_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - (H \bullet X)_{n-1}^2 \\ &= 2\mathbb{E}\,[(H \bullet X)_{n-1} H_n Y_n] | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}\,[H_n^2 Y_n^2] | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= 2(H \bullet X)_{n-1} H_n \underbrace{\mathbb{E}\,[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}]}_{=\mathbb{E}\,Y_n = 0} + H_n^2 \underbrace{\mathbb{E}\,[Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}]}_{=\mathbb{E}\,[Y_n^2] = \sigma^2} \\ &= 0 + \sigma^2 H_n^2\,, \end{aligned}$$

budući je Y_n nezavisna od $\mathcal{F}_{n-1}$, a H_n i $(H \bullet X)_{n-1}$ su $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjerive. Dakle

$$\langle (H \bullet X) \rangle_n = \langle (H \bullet X) \rangle_{n-1} + \sigma^2 H_n^2 = \ldots = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} H_k^2\,.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 3

(a) (3 boda) Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ slučajni proces koji je adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ i neka je T vrijeme zaustavljanja. Definirajte proces X zaustavljen u vremenu T, X^T.

(b) (4 boda) Ako je X martingal, dokažite da je i zaustavljeni proces X^T martingal.

(c) (4 boda) Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ supermartingal. Dokažite da za omeđena vremena zaustavljanja S i T takva da je $S \leq T$ g.s. vrijedi

$$\mathbb{E}[X_S] \geq \mathbb{E}[X_T].$$

Rješenje: (a) Slučajni proces $X^T = \{X_n^T : n \geq 0\}$ je definiran s

$$X_n^T := X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & n < T \\ X_T & n \geq T \end{cases}, \quad n \geq 0.$$

(b) Definiramo $H_0 = 0$ i $H_n = 1_{\{n \leq T\}}$ za $n \geq 1$. Budući je $\{n \leq T\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, slijedi da je slučajni proces $H = \{H_n : n \geq 0\}$ predvidiv. Njegova martingalna transformacija po X je martingal, a jednaka je

$$(H \bullet X)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k \leq T\}}(X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k - X_{k-1}) = X_{T\wedge n} - X_0,$$

odakle slijedi da je X^T martingal.

(c) Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $S, T \leq N$ g.s.. Definiramo $H_0 = 0$ i $H_n = 1_{\{n \leq T\}} - 1_{\{n \leq S\}}$ za $n \geq 1$. Budući je $\{n \leq S\} = \{S \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, slijedi da je slučajni proces $H = \{H_n : n \geq 0\}$ predvidiv, a zbog $S \leq T$ g.s je $H_n \geq 0$ g.s.. Njegova martingalna transformacija po X je supermartingal. Stoga je

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}[(H \bullet X)_0] \geq \mathbb{E}[(H \bullet X)_N] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=T}^{N}(X_k - X_{k-1}) - \sum_{k=S}^{N}(X_k - X_{k-1})\right] \\ &= \mathbb{E}[X_T - X_S]. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[X_S]$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Slučajni procesi

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 4

(a) (4 boda) Neka je $\{Y_n : n \geq 0\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom gustoće $f_{Y_n}(y) = e^{-y} 1_{(0,\infty)}(y)$. Neka je $T = \min\{n \geq 0 : Y_n < 1\}$. Dokažite da slučajni proces $X = \{X_n : n \geq 0\}$ definiran s

$$X_n = e^n 1_{\{T>n\}}, \quad n \geq 0$$

konvergira g.s. i odredite mu limes.

(b) (3 boda) Iskažite teorem o L^p-konvergenciji martingala.

(c) (4 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ filtracija na njemu i X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$ za neki $p > 1$. Definiramo $X_n := \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]$ za $n \geq 0$ i $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n\right)$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right] \text{ g.s.}.$$

Rješenje:

(a) <u>1. način.</u> Dokazat ćemo da je je X nenegativni martingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ definiranu s $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$, $n \geq 0$. Nenegativnost, adaptiranost (T je $\mathbb{F}$-vrijeme zaustavljanja!) i integrabilnost su jasne. Provjerimo martingalno svojstvo. Neka je $n \geq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{n+1}1_{\{T>n+1\}}|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[e^{n+1}1_{\{T>n\}}1_{\{Y_{n+1}\geq 1\}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= e^{n+1}1_{\{T>n\}}\mathbb{E}\left[1_{\{Y_{n+1}\geq 1\}}|\mathcal{F}_n\right] = eX_n\mathbb{P}(Y_{n+1}\geq 1) \\ &= eX_n\int_1^\infty e^{-y}\,dy = X_n\,.\end{aligned}$$

Dakle, X je nenegativni martingal pa konvergira g.s., tj. postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s.. Neka je $\omega \in \Omega$ takav da $X_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ postoji. Ako bi $X_\infty(\omega) \neq 0$, onda bi postojao $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_n(\omega) \neq 0$ za sve $n \geq n_0$, tj.

$$X_n(\omega) = e^n \quad \text{za sve } \; n \geq n_0\,,$$

što ne konvergira. Stoga je $X_\infty = 0$ g.s..

<u>2. način.</u> Budući je, zbog nezavisnosti,

$$\mathbb{P}(T>n) = \mathbb{P}(Y_1 \geq 1, \ldots, Y_n \geq 1) = \mathbb{P}(Y_1 \geq 1)^n = \left(\int_1^\infty e^{-y}\,dy\right)^n = e^{-n},$$

slijedi

$$\mathbb{E}\,T = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} < \infty$$

pa je $T < \infty$ g.s., odakle slijedi da je

$$X_n = e^n 1_{\{T>n\}} \quad \text{jednak 0 počevši od nekog } n \text{ g.s..}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \ \text{ g.s.}\,.$$

(b) Neka je $X = \{X_n : n \geq 0\}$ martingal takav da za neki $p > 1$ vrijedi

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\,[|X_n|^p] < \infty\,.$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ takva da

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,[|X_n - X_\infty|^p] = 0\,.$$

(c) Primijetimo da je $X_n, n \geq 0$ martingal. Koristeći uvjetnu Jensenovu nejednakost, slijedi

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\,[|X_n|^p] = \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\,[|\mathbb{E}\,[X_n|\mathcal{F}_n]|^p] \leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[|X|^p|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}\,[|X|^p] < \infty$$

pa iz teorema o L^p-konvergenciji martingala slijedi da postoji slučajna varijabla X_∞ takva da je

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \ \text{ g.s. i u } L^p\,.$$

Neka je $A \in \mathcal{F}_n$. Tada je zbog Hölderove nejednakosti ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\mathbb{E}\,[|X_m - X_\infty|; A] \leq \mathbb{E}\,[|X_m - X_\infty|^p]^{1/p} \mathbb{P}(A)^{1/q} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

odakle je

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\,[X_m - X_\infty; A] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\,[X_m; A] - \mathbb{E}\,[X_\infty; A] \\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[X|\mathcal{F}_m]; A] - \mathbb{E}\,[X_\infty; A] = \mathbb{E}\,[X; A] - \mathbb{E}\,[X_\infty; A]\,. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{E}\,[X; A] = \mathbb{E}\,[X_\infty; A] \quad \text{za sve} \quad A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\,.$$

Budući je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ π-sustav koji generira σ-algebru $\mathcal{F}_\infty$, slijedi da vrijedi

$$\mathbb{E}\,[X; A] = \mathbb{E}\,[X_\infty; A] \quad \text{za sve} \quad A \in \mathcal{F}_\infty$$

pa je

$$\mathbb{E}\,[X|\mathcal{F}_\infty] = X_\infty \ \text{ g.s.}\,.$$