Modeli financijskih tržista

1. Cijena dionice dana je slučajnim procesom $S = \{S_t : t \geq 0\}$ koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu
$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t \,,$$
gdje su $\alpha, \sigma > 0$.
   (a) Izračunajte $\mathbb{P}(S_{2t} > 2S_t)$ za $t > 0$.
   (b) Izračunajte $\mathrm{Var} S_t$.

2. Promotrimo model financijskog tržista koji je dan s
$$dR_t = rR_t\,dt,\ R_0 = 1 \qquad\qquad dS_t = \theta_t S_t\,dt\,,\ S_0 = 1\,.$$
gdje je $r > 0$. Pretpostavimo da je tržiste bez arbitraže. Dokažite da je $\theta_t = r$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $t \geq 0$.

3. Promotrimo Bachelierov model financijskog tržišta, gdje je cijena dionice modelirana s
$$dS_t = \alpha dt + \sigma dB_t,\ t \geq 0\,,$$
a kamatna stopa je $r = 0$ (dakle $R_t = 1$, $t \geq 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0.$.
   (a) Napišite formulu za S_t.
   (b) Izračunajte cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i dospijećem $T > 0$.

4. Model financijskog tržišta se sastoji od jedne rizične imovine cijene S_t i jedne nerizične imovine cijene R_t u trenutku $t \geq 0$. Pretpostavimo da je
$$dR_t = r_t R_t dt, \quad R_0 = 1\,,$$
te da je $S = \{S_t : t \geq 0\}$ Itôv proces. Ako model dopušta arbitražu, dokažite da za svaki $V_0 > 0$ postoji samofinancirajući portfelj ϕ takav da vrijedi $V_t^\phi \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $0 \leq t \leq T$ te
$$V_T^\phi \geq R_T V_0 \quad \mathbb{P}-\text{g.s.} \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(V_T^\phi > R_T V_0) > 0\,.$$

5. Promotrimo Bachelierov model
$$dS_t = \alpha dt + \sigma dB_t,\ t \geq 0\,,$$
s kamatnom stopom $r = 0$ (dakle $R_t = 1$, $t \geq 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Koji su od sljedećih portfelja $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$, $t \geq 0$ samofinancirajući
   (a) $\phi_t = (1, 1)$,
   (b) $\phi_t = (-S_t^2 - \sigma^2 t, 2S_t)$
   (c) $\phi_t = \left(\int_0^t S_v\,dv, -\int_0^t S_v^2\,dv\right)$,
   (d) $\phi_t = \left(\int_0^t S_v\,dv, -t\right)$?

6. U Black-Scholes-Mertonovom modelu s konstantnim koeficijentima $\alpha, \sigma, r > 0$

$$\begin{aligned} dR_t &= rR_t\,dt, \quad R_0 = 1 \\ dS_t &= \alpha S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t,\ S_0 > 0 \end{aligned}$$

promatramo portfelj $\phi_t = (f(t,S_t), g(t,S_t))$, $t \geq 0$, gdje funkcije $f, g \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} x\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) + e^{rt}\frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial g}{\partial x}(t,x) + x\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) + e^{rt}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Dokažite da je portfelj ϕ samofinancirajući.

7. Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim koeficijentima kao u prethodom zadatku. Odredite portfelj $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$, $t \geq 0$ tako da bude samofinancirajući ako je

   (a) $\phi_t^1 = 1,\ t \geq 0\,,$ (b) $\phi_t^1 = S_t,\ t \geq 0\,,$ (c) $\phi_t^1 = \int_0^t S_s\,ds,\ t \geq 0.$

8. U Black-Scholes-Mertonovom modelu s konstantnim koeficijentima $\alpha, \sigma, r > 0$ odredite cijenu down-and-out binarne opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i barijerom $b < S_0$.

9. U generaliziranom Black-Scholes-Mertonovom modelu

$$\begin{aligned} dR_t &= r_t R_t\,dt, \quad R_0 = 1 \\ dS_t &= \alpha_t S_t\,dt + \sigma_t S_t\,dB_t,\ S_0 > 0 \end{aligned}$$

odredite cijenu forward ugovora po kojem se dionica prodaje po cijeni $K > 0$ u trenutku $T > 0$.

Upute i rješenja: **1.** (a) $\Phi\left(\frac{\alpha t - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \ln 2}{\sigma\sqrt{t}}\right)$ (b) $S_0^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$ **2.** Promotrite portfelj $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$ definiran s $\phi_t^1 = 1_{\{S_t > R_t\}} - 1_{\{S_t < R_t\}}$ i $\phi_t^0 = -\phi_t^1$. Dokažite da je ϕ samofinancirajući, $V_0^\phi = 0$ i $V_t^\phi \geq 0$ za sve $t \geq 0$ i zaključite da je nužno (zbog odsustva arbitraže) $S_t = e^{rt}$. **3.** (a) $S_t = S_0 + \alpha t + \sigma B_t$ (b) $(S_0 - K)\Phi(-d) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}}$, gdje je $d = \frac{K - S_0}{\sigma\sqrt{T}}$ **4.** Uzmite arbitražu ψ i definirajte pomoću nje traženi portfelj te provjerite da zadovoljava uvjete zadatka. Dobije se $\phi_t = (V_0 + \psi_t^0, \psi_t^1)$, $0 \leq t \leq T$. **5.** U ovom modelu je model samofinancirajući ako i samo ako vrijedi $dV_t^\phi = \phi_0^t dR_t + \phi_t^1 dS_t = \phi_t^1 dS_t$ (a) Da. (b) Da. (c) Ne. (d) Da. **6.** Upotrijebite Itôvu formulu. Da biste za $V_t^\phi = f(t,S_t)e^{rt} + g(t,S_t)S_t$ dobili $dV_t^\phi = f(t,S_t)re^{rt}\,dt + g(t,S_t)dS_t$, trebat ćete drivirati prvu jednadžbu još jednom po x. **7.** Uputa: (a) se može riješiti pomoću zadatka 6. U (b) i (c) ϕ_t^0 nije oblika $f(t,S_t)$. (a) $\phi_t = (1,1)$ (b) $\phi_t = (-\int_0^t e^{-rs}\sigma^2 S_s^2\,ds - \int_0^t e^{-rs}S_s\,dS_s, S_t)$ (c) $\phi_t = (-\int_0^t e^{-rs}S_s^2\,ds, S_t)$ **8.** Tražimo cijenu slučajnog zahtjeva $C = K1_{\{m_T > b\}}$, gdje je $m_T = \min_{0 \leq t \leq T} S_t$. Koristeći ekvivalentnu martingalnu mjeru i zadatak 6 iz Zadaće 6, dobije se cijena $e^{-rT}K\left[\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{S_0}{b}\right)^{1 - 2\frac{r}{\sigma^2}}\phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{b} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{-\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$. **9.** Koristeći ekvivalentnu martingalnu mjeru, cijena slučajnog zahtjeva $C = S_t - K$ je $V_0 = S_0 - Ke^{-\int_0^T r_t\,dt}$.