Brownovo gibanje - treći dio

Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje definiranom na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\})$. Neka je $M = \{M_t : t \geq 0\}$ proces maksimuma definiran s $M_t = \max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s$ za $t \geq 0$, a proces minimuma $m = \{m_t : t \geq 0\}$ s $m_t = \min\limits_{0 \leq s \leq t} B_s$ za $t \geq 0$. Definiramo funkciju

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \,. \end{cases}$$

1. Dokažite da je $M_t - B_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} |B_t|$ za $t \geq 0$.
2. Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora $(M_t, M_t - B_t)$.
3. Izračunajte $\mathbb{P}\left(\max\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} B_t > a\right)$, gdje su $0 \leq t_0 < t_1$ i $a > 0$.
4. Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (B_t, m_t), gdje je $t > 0$ i $m_t = \inf\limits_{0 \leq s \leq t} B_s$.
5. Koji od sljedećih slučajnih procesa su Brownova gibanja?
   (a) $X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s,\ t \geq 0$;
   (b) $Y_t = \operatorname{sgn}(B_t) B_t,\ t \geq 0$;
   (c) $U_t = \int_0^t H_s\, dB_s,\ t \geq 0$, gdje je $H = \{H_t : t \geq 0\}$ adaptirani proces takav da je Lebesgueova mjera skupa $\{t \geq 0 : |H_s| \neq 1\}$ jednaka 0 $\mathbb{P}$-g.s..
6. (a) Dokažite da za $t > 0$ vrijedi $m_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} -|B_t|$
   (b) Neka je $\mu \in \mathbb{R}$. Dokažite da za $t > 0$ i $x \leq 0$ vrijedi

   $$\mathbb{P}(\min_{0 \leq s \leq t} (B_s + \mu s) \geq x) = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{x + \mu t}{\sqrt{t}}\right),$$

   gdje je Φ funkcija distribucije jedinične normalne slučajne varijable.
7. Pronađite predvidivi proces $\theta = \{\theta_t : t \geq 0\}$ takav da je

   $$e^{B_t - \frac{1}{2}t} = 1 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \geq 0\,.$$

8. Neka je $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_T^0, \mathbb{P})$, gdje je $T > 0$ i $\mathcal{F}_T^0 = \sigma(B_t : 0 \le t \le T)$. Postoji li predvidivi proces $\theta = \{\theta_t : 0 \le t \le T\}$ takav da je

$$Y = \mathbb{E}Y + \int_0^T \theta_t \, dB_t \, ?$$

9. Zadan proces $X = \{X_t : t \ge 0\}$ pronađite predvidivi proces $\theta = \{\theta_t : 0 \le t \le 1\}$ takav da je

$$X_1 = \int_0^1 \theta_t \, dB_t \, ,$$

ako je

$$\text{(a)} \quad X_t = B_t^3, \ t \ge 0 \, ; \qquad\qquad \text{(b)} \quad X_t = B_t^5, \ t \ge 0 \, .$$

10. Proces $W = \{W_t : t \ge 0\}$ je definiran s

$$W_t = B_t + \sin t \, , \quad t \ge 0 \, .$$

Odredite mjeru $\mathbb{P}^*$ takvu da W bude Brownovo gibanje u odnosu na mjeru $\mathbb{P}^*$.

Upute i rješenja: **1.** Koristite formulu za funkciju gustoće slučajnog vektora (B_t, M_t). **2.** $f(x,y) = \frac{2(x+y)}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}$, $x, y > 0$. **3.** $2\mathbb{E}\left[1 - \Phi\left(\frac{a - B_{t_0}}{\sqrt{t_2 - t_1}}\right)\right]$ **4.** Definirajte $W_t = -B_t$, uočite da je W Brownovo gibanje i izračunajte $\mathbb{P}(B_t > x, m_t \le y) = \mathbb{P}(W_t < -x, \max_{0 \le s \le t} W_s \ge -y)$. Dobije se $f(x,y) = \frac{2(x-2y)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}$ za $y \le 0$ i $x \ge y$. **5.** Uputa: Lévyjeva karakterijacija Brownovog gibanja. (a) Da. Trebalo bi provjeriti da je skup $\{t \ge 0 : B_t = 0\}$ Lebesgueove mjere 0 $\mathbb{P}$-g.s.. (b) Ne. $\mathbb{E}Y_t > 0$, $\mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}B_0 = 0$ pa Y nije martingal. (c) Da. **6.** Primijetite da je $W_t = -B_t$ Brownovo gibanje i upotrijebite rezultate o maksimumima. **7.** Upotrijebite Itôvu formulu. $\theta_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$. **8.** Da. Definirajte $M_t = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^0]$, gdje je $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_s : 0 \le s \le t)$. **9.** Primijenite Itôvu formulu više puta. Promotrite i procese $(1-t)B_t$, $(1-t)B_t^3$ i $(1-t)^2 B_t$. (a) $B_1 = \int_0^1 (3B_t^2 + 3(1-t)B_t) dB_t$ (b) $B_1 = \int_0^1 (5B_t^4 + 30(1-t)B_t^2 + 15(1-t)^2) dB_t$ **10.** Upotrijebite Girsanovljev teorem. Dobije se $P^*(A) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^T \cos t \, dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \cos^2 t \, dt}]$ za $A \in \mathcal{F}_T$.