Itôv integral - drugi dio

Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

1. Riješite Ornstein-Uhlenbeckovu stohastičku diferencijalnu jednadžbu
$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma dB_t, \ X_0 = 0,$$
gdje su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ te izračunajte $\mathbb{E}X_t$ i $\mathrm{Var}X_t$.
2. Izračunajte $\mathbb{E}[\cos \lambda B_t]$, gdje je $\lambda > 0$.
3. Neka je $W = \{W_t : t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje, gdje je $d \geq 3$. Ako s $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_d)\| = (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}$ označimo Euklidsku normu $x \in \mathbb{R}^d$, dokažite da je za svaki $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ slučajni proces $M_t = \|x + W_t\|^{2-d}$, $t \geq 0$ martingal.
4. Riješite stohastičke diferencijalne jednadzbe:
   (a) $dX_t = 4X_t \, dt + 2X_t \, dB_t$, $X_0 = 2$
   (b) $dX_t = tX_t dB_t$, $X_0 = 1$
   (c) $dX_t = 4dt + 3dB_t - 2X_t dt$, $X_0 = 0$.
5. Pretpostavimo da slučajni proces X rješava $dX_t = H_t dt + dB_t$ i neka je
$$Y_t = e^{-\int_0^t H_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \, ds}.$$
Dokažite da je $Z_t = X_t Y_t$, $t \geq 0$ martingal.
6. Neka je $X_t = \int_0^t s dB_s$, $t \geq 0$.
   (a) Koristeći particiju intervala $[0, t]$, izračunajte $\mathrm{Cov}(X_t, B_t)$ i $\mathrm{Var}X_t$.
   (b) Neka je $Y_t = \int_0^t B_s \, ds$. Dokažite da je
$$Y_t = tB_t - X_t$$
   te iz gornjeg identiteta i (a) izračunajte $\mathrm{Var}Y_t$. Odredite razdiobu slučajne varijable Y_t .

Upute i rješenja: **1.** Da biste riješili jednadžbu, zračunajte prvo $d(e^{-\mu t}X)_t$. $EX_t = 0$, $\mathrm{Var}X_t = \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu t} - 1)$. **2.** Upotrijebite Itôvu formulu i nađite diferencijalnu jednadžbu za $m(t) = \mathbb{E}[\cos(\lambda B_t)]$ da biste dobili $\mathbb{E}[\cos(\lambda B_t)] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$. **4.** (a) $X_t = 2e^{2(t+B_t)}$ (b) $X_t = e^{\int_0^t s dB_s - \frac{1}{2}\frac{t^3}{3}}$ (c) Vasičekova SDE. $X_t = 2 - e^{-2t} + 3\int_0^t e^{2s-2t} dB_s$ **6.** (a) Primijetite da je $H_t = t$ neprekidna u srednjem reda 2 pa možemo aproksimirati $X_t = \int_0^t s dB_s$ preko particije u L^2. Dobije se $\mathrm{Cov}(X_t, B_t) = \frac{t^2}{2}$. $\mathrm{Var}X_t = \frac{t^3}{3}$. (b) Jednakost slijedi iz Itôve formule. Y_t normalna slučajna varijabla kao linearna kombinacija normalnih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 pa je i $\mathbb{E}Y_t = 0$. Za varijance vrijedi $\mathrm{Var}Y_t = \mathrm{Var}(tB_t) + \mathrm{Var}X_t - 2\mathrm{Cov}(tB_t, X_t) = \frac{t^3}{3}$.