Brownovo gibanje - drugi dio

Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

1. (Brownov most)
   (a) Dokažite da je slučajni proces $X = \{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ definiran s
   $$X_t = B_t - tB_1, \quad t \geq 0$$
   Gaussovski te mu odredite funkciju očekivanja i kovarijacijsku funkciju.
   (b) Nađite funkciju gustoće slučajnog vektora (B_s, B_t) za $0 < s < t$.
   (c) Izračunajte $\mathbb{E}[B_s B_t | B_1 = 0]$ za $0 < s < t < 1$ i usporedite s kovarijacijskom funkcijom iz (a).

2. Koji su od sljedećih slučajnih procesa Brownova gibanja?
   $$\text{(a) } X_t = B_{3t} - B_t \qquad \text{(b) } Y_t = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{2t} \qquad \text{(c) } Z_t = \sqrt{t} B_1 \,.$$

3. (Ornstein-Uhlenbeckov proces) Neka je slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s
   $$X_t = e^{-\alpha t/2} B_{e^{\alpha t}}, \quad t \geq 0\,,$$
   gdje je $\alpha > 0$.
   (a) Dokažite da je X Gaussovski proces te mu odredite funkciju očekivanja i kovarijacijsku funkciju.
   (b) Nađite funkciju gustoće slučajnog vektora (X_s, X_t), gdje je $0 < s < t$.

4. Neka je $W = \{W_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje nezavisno od B. Za koje vrijednosti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je
   $$\alpha B_t + \beta W_t, \quad t \geq 0$$
   Brownovo gibanje?

5. Neka su $-a < 0 < b$ i $\tau = \inf\{t > 0 : B_t \notin (-a, b)\}$. Izračunajte:
   $$\text{(a) } \mathbb{E}[e^{-\lambda\tau} 1_{\{B_\tau = b\}}]\,, \quad \lambda > 0 \qquad\qquad \text{(b) } \mathbb{E}[e^{-\lambda\tau}]\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Upute i rješenja: **1.** (a) $m(t) = \mathbb{E}X_t = 0$, $\gamma(s,t) = \mathbb{E}[X_s X_t] = s \wedge t - st$ (b) Izračunajte $\mathbb{P}(B_s \leq a, B_t \leq b, B_u \leq c)$ te pokušajte očitati formulu za gustoću $f_{(B_s,B_t)}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}$. (c) Upotrijebite formulu za uvjetnu gustoću $f_{(B_s,B_t)|B_1}(x,y|z) = \frac{f_{(B_s,B_t,B_1)}(x,y,z)}{f_{B_1}(z)}$ te pokažite da je $\mathbb{E}[B_s B_t | B_1 = 0] = \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y|0)dxdy = s(1-t)$ što se podudara s kovarijacijskom funkcijom iz (a). **2.** (a) Ne. X nema nezavisne priraste, jer je naprimjer (provjerite!) $\mathbb{E}[(X_{2t} - X_t)X_t] = -t \neq 0$. (b) Da (skaliranje!). (c) Ne, jer nema nezavisne priraste, $\mathbb{E}[(Z_4 - Z_1)Z_1] = \mathbb{E}[3B_1^2] = 3 \neq 0$. **3.** (a) $m(t) = \mathbb{E}X_t = 0$, $\gamma(s,t) = e^{-\frac{\alpha}{2}|t-s|}$ (b) Upotrijebite 1. (b). $f(x,y) = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(s+t)}}{2\pi\sqrt{e^{\alpha s}(e^{\alpha t} - e^{\alpha s})}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{(ye^{\alpha t/2} - xe^{\alpha s/2})^2}{2(e^{\alpha t} - e^{\alpha s})}}$ **4.** $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ **5.** Upotrijebite eksponencijalni martingal i teorem o opcionalnom zaustavljanju. (a) $\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda}b)}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda}(a+b))}$ (b) $\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda}a) + \mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda}b)}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda}(a+b))}$