Brownovo gibanje - prvi dio

Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

1. Izračunajte $\mathbb{P}(B_1 \leq 0, B_2 \leq 0)$.
2. Neka je $X = \int_0^a B_t\, dt$. Koju razdiobu ima X?
3. Dokažite da je slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s $X_t = e^{aB_t+b}$ martingal ako i samo ako je $\frac{a^2}{2} + b = 0$.
4. Koristeći činjenicu da je $M_t^\vartheta := e^{\vartheta B_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t}$ martingal, deriviranjem jednakosti
$$\mathbb{E}[M_t^\vartheta 1_A] = \mathbb{E}[M_s^\vartheta 1_A], \qquad 0 \leq s \leq t, \quad A \in \mathcal{F}_s$$
i računanjem derivacije u $\vartheta = 0$ dokažite da su
$$B_t^2 - t, \quad B_t^3 - 3tB_t, \quad B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$$
također martingali. Odredite 'polinomijalni' martingal Brownovog gibanja petog stupnja.
5. Dokažite da su sljedeći slučajni procesi martingali:
$$\text{(a)}\ \ tB_t - \int_0^t B_s\, ds \qquad\qquad \text{(b)}\ \ B_t^3 - 3\int_0^t B_s\, ds\,.$$
6. Neka je $\tau = \inf\{t > 0 : B_t \in (-a, b)^c\}$, gdje je $-a < 0 < b$. Izračunajte
$$\mathbb{E}\int_0^\tau B_s\, ds\,.$$
7. Neka je $T_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$. Dokažite da vrijedi
$$T_a \stackrel{d}{=} T_{-a} \qquad \text{i} \qquad T_a \stackrel{d}{=} a^2 T_1\,.$$
8. Koji su od sljedećih slučajnih procesa martingali?
$$\text{(a)}\ \ B_t^3 - tB_t \qquad\qquad \text{(b)}\ \ \int_0^t B_s^2\, ds \qquad\qquad \text{(c)}\ \ e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}\,\mathrm{sh}(\lambda B_t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Upute i rješenja: **1.** Pokušajte dobiti $\mathbb{P}(B_1 \leq 0, B_2 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 (1 - F(x))F'(x)\, dx = \frac{1}{2} - \int_0^{1/2} y\, dy = \frac{3}{8}$, gdje je F funkcija distribucije jedinične normalne slučajne varijable. **2.** Upotrijebite funkcije izvodnice momenata. $N(0, a^3/3)$ **5.** Izračunajte prvo $\mathbb{E}[\int_s^t (B_u - B_s)\, du | \mathcal{F}_s]$. **6.** Upotrijebite prethodni zadatak. **7.** Upotrijebite simetriju i skaliranje Brownovog gibanja. **8.** (c)