MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 1

Promatramo model financijskog tržista s dvije financijske imovine: novac i dionica. U trenutku $t \geq 0$, vrijednost novca je R_t, a dionice S_t, gdje vrijedi

$$dR_t = r_t R_t \, dt, \quad R_0 = 1\,,$$

a $S = \{S_t : t \geq 0\}$ je Itôv proces. Neka je $T > 0$ i $\phi = \{(\phi_t^0, \phi_t^1) : 0 \leq t \leq T\}$ portfelj.

(a) (3 boda) Napišite formulu za R_t, $0 \leq t \leq T$. Definirajte vrijednost portfelja V_t^ϕ te diskontiranu vrijednost portfelja $\tilde{V}_t^\phi$ u trenutku $0 \leq t \leq T$.

(b) (2 boda) Definirajte samofinancirajući portfelj.

(c) (4 boda) Dokažite da je portfelj ϕ samofinancirajući ako i samo ako je

$$\tilde{V}_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^1 d\tilde{S}_s, \qquad \text{za sve } \; 0 \leq t \leq T\,,$$

gdje je $\tilde{S}_t$, $0 \leq t \leq T$ diskontirana vrijednost dionice.

(d) Neka je $S_t = \alpha t + \sigma B_t$, gdje je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje (u $\mathbb{R}$), $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Pretpostavimo da je $r_t = 0$ za sve $t \geq 0$. Dokažite da su sljedeći portfelji samofinancirajući:

(d1) (2 boda) $\phi_t = (-S_t^2 - \sigma^2 t, 2S_t)$, $0 \leq t \leq T$,

(d2) (2 boda) $\phi_t = \left(\int_0^t S_s \, ds, -t\right)$, $0 \leq t \leq T$.

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
R_t &= e^{\int_0^t r_s \, ds}, \quad 0 \leq t \leq T \\
V_t^\phi &= \phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t, \quad 0 \leq t \leq T \\
\tilde{V}_t^\phi &= R_t^{-1} V_t^\phi = e^{-\int_0^t r_s \, ds} V_t^\phi, \quad 0 \leq t \leq T\,.
\end{aligned}$$

(b) Portfelj ϕ je samofinancirajući ako je adaptiran, vrijedi

$$\int_0^T |\phi_t^0| \, dt + \int_0^T |\phi_t^1|^2 \, dt < \infty \quad \mathbb{P} - \text{g.s.}$$

te

$$V_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^0 dR_s + \int_0^t \phi_s^1 \, dS_s \quad \mathbb{P} - \text{g.s.}, \; 0 \leq t \leq T\,.$$

(c) Prvo ćemo pomoću Itôve formule ($f(t,x) = e^{-\int_0^t r_s\,ds} x$) izračunati

$$d\tilde{S}_t = d(e^{-\int_0^t r_s\,ds} S_t) = -r_t e^{-\int_0^t r_s\,ds} S_t\,dt + e^{-\int_0^t r_s\,ds} dS_t = R_t^{-1}(-r_t S_t\,dt + dS_t)\,.$$

Budući je V_t^ϕ, $0 \le t \le T$ također Itôv proces, možemo opet primijeniti Itovu formulu i prethodnu jednakost

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t^\phi &= -r_t e^{-\int_0^t r_s\,ds} V_t^\phi\,dt + e^{-\int_0^t r_s\,ds} dV_t^\phi \\ &= -r_t R_t^{-1}(\phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t)\,dt + R_t^{-1}\,dV_t^\phi \\ &= \phi_t^1 R_t^{-1}(-r_t S_t\,dt + dS_t) - R_t^{-1}\phi_t^1 dS_t - R_t^{-1}\phi_t^0 dR_t + R_t^{-1} dV_t^\phi \\ &= \phi_t^1 d\tilde{S}_t + R_t^{-1}(dV_t^\phi - \phi_t^0 dR_t - \phi_t^1 dS_t)\,. \end{aligned}$$

Tvrdnja slijedi iz zadnje jednakosti i definicije samofinancirajućeg portfelja.

(d) Primijetimo da je u modelu $R_t = 1$, $t \ge 0$.

(d1) Vrijednost portfelja je

$$V_t^\phi = -S_t - \sigma^2 t + 2S_t^2 = S_t^2 - \sigma^2 t$$

pa iz Itôve formule slijedi

$$\begin{aligned} dV_t^\phi &= 2S_t\,dS_t + \frac{1}{2}\cdot 2d\langle S\rangle_t - \sigma^2\,dt = 2S_t\,dS_t + \sigma^2\,dt - \sigma^2\,dt \\ &= 2S_t\,dS_t = \phi_t^0 \underbrace{dR_t}_{=0\cdot dt} + \phi_t^1 dS_t\,, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je portfelj samofinancirajući.

(d2) Vrijednost portfelja je

$$V_t^\phi = \int_0^t S_s\,ds - tS_t\,.$$

Koristeći Itôvu formulu (integralnu verziju za $f(t,x) = tx$) dobijemo

$$\begin{aligned} V_t^\phi &= \int_0^t S_s\,ds - \left(0\cdot S_0 + \int_0^t S_s\,ds + \int_0^t s\,dS_s + 0\right) \\ &= -\int_0^t s dS_s = \underbrace{V_0^\phi}_{=0} + \underbrace{\int_0^t \phi_s^0 dR_s}_{=0} + \int_0^t \phi_s^1 dS_s\,. \end{aligned}$$

Dakle, portfelj je samofinancirajući.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 2

Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata α, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$. Vrijednost europske call-opcije s dospijećem $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$ u trenutku $0 \leq t \leq T$ je dana s $c(t, S_t)$, gdje je S_t cijena dionice u trenutku $0 \leq t \leq T$, a $c \in C^{1,2}([0,\infty) \times [0,\infty))$.

(a) (3 boda) Napišite Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $c(t, x)$. Također napišite vrijednost $c(T, x)$.

(b) (3 boda) Napišite formulu za rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe iz (a) (tzv. Black-Scholes-Mertonovu formulu).

(c) (3 boda) Pretpostavimo da je $\alpha = 0.2, \sigma = 0.3$ i $S_0 = 400$. Godišnja kamatna stopa na tržištu novca je 5 %. Odredite cijenu europske call-opcije s dospijećem 15 mjeseci i cijenom izvršenja 410 kn.

(d) (4 boda) Pretpostavimo da na tržištu postoje call i put opcija te forward ugovor s cijenama $c(t, S_t)$, $p(t, S_t)$ i $f(t, S_t)$. Delte call i put opcija su redom -0.5 i 0.6, dok su game redom 0.01 i 0.02. Delta i gama forward ugovora su -0.1 i 0.01. Investitor je upravo prodao 10 put opcija kada je cijena dionice bila 100 kn. Želeći se zaštiti od obveza, želi formirati portfelj koji će se sastojati od call opcija i forward ugovora. Koliko call opcija i forward ugovora investitor treba imati u portfelju tako da on bude delta i gama neutralan?

Rješenje:

(a)

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) = rc(t,x), \quad 0 \leq t \leq T,\ x \geq 0$$
$$c(T,x) = (x-K)^+$$

(b)

$$c(t,x) = x\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)\,,$$

gdje su $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$ funkcija distribucije jedinične normalne slučajne varijable i

$$d_\pm = \frac{\ln\frac{x}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,.$$

(c) Parametri modela su $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 400$, $r = 0.05$, $T = \frac{15}{12} = 1.25$ i $K = 410$. Traži se

$$c(0, S_0) = c(0, 400) = 400\Phi(d_+) - 410e^{-0.05\cdot 1.25}\Phi(d_-)\,,$$

gdje su

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{400}{410} + (0.05 + \frac{0.3^2}{2})1.25}{0.3\sqrt{1.25}} \approx 0.28042 \\ d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{T} \approx 0.28042 - 0.3\sqrt{1.25} = -0.05499\,. \end{aligned}$$

Stoga je

$$c(0, S_0) \approx 400\,\underbrace{\Phi(0.28)}_{=0.6103} - 410e^{-0.05\cdot 1.25}\,\underbrace{\Phi(-0.05)}_{=1-0.5199} \approx 59.205\,.$$

(d) Neka je α broj call opcija i β broj forward ugovora. Vrijednost novog portfelja je tada $g(t, S_t)$, gdje je

$$g(t, x) = -10p(t, x) + \alpha c(t, x) + \beta f(t, x)\,.$$

Vrijednost α i β ćemo dobiti iz uvjete da delta i gama novog portfelja moraju biti jednaki nula:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_g = -10\Delta_p + \alpha\Delta_c + \beta\Delta_{fw} \\ 0 &= \Gamma_g = -10\Gamma_p + \alpha\Gamma_c + \beta\Gamma_{fw}\,, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 0 &= -10 \cdot 0.6 - 0.5\alpha - 0.1\beta \\ 0 &= -10 \cdot 0.02 + 0.01\alpha + 0.01\beta\,, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 5\alpha + \beta &= -60 \\ \alpha + \beta &= 20 \end{aligned}$$

s rješenjem $\alpha = -20$ i $\beta = 40$. Dakle, treba prodati 20 call opcija i kupiti 40 forward ugovora.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 3

(a) (2 boda) Iskažite Lévyjevu karakterizaciju Brownovog gibanja.

(b) (2 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje i neka je $H = \{H_t : t \geq 0\}$ adaptirani slučajni proces takav da je Lebesgueova mjera skupa $\{t \geq 0 : |H_t| \neq 1\}$ jednaka 0 $\mathbb{P}$-g.s. Dokažite da je slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$X_t = \int_0^t H_s \, dB_s \,, \; t \geq 0$$

Brownovo gibanje.

(c) (3 boda) Iskažite Girsanovljev teorem.

(d) Promatramo Black-Scholes-Mertonov model s konstantnim parametrima: srednjom stopom povrata α, volatilnošću $\sigma > 0$ i kamatnom stopom $r > 0$.

(d1) (2 boda) Definirajte ekvivalentnu martingalnu mjeru u ovom modelu.

(d2) (4 boda) Pomoću Girsanovljevog teorema pronađite ekvivalentnu martingalnu mjeru u ovom modelu.

Rješenje:

(a) Neka je $M = \{M_t : t \geq 0\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo da je $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-g.s., M ima neprekidne puteve te da je kvadratna varijacija $\langle M \rangle_t = t$ za sve $t \geq 0$. Tada je M Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$.

(b) Koristimo Lévyjevu karakterizaciju Brownovog gibanja: X je martingal kao Itôv integral, $X_0 = 0$ i

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle B \rangle_s = \int_0^t |H_s|^2 ds = \int_0^t ds = t \,.$$

(c) Neka je $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ u odnosnu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ te neka je $\theta = \{\theta_t : 0 \leq t \leq T\}$ adaptirani slučajni proces. Definiramo

$$Z_t = e^{-\int_0^t \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds}, \; 0 \leq t \leq T$$

i pretpostavimo da je

$$\mathbb{E} \int_0^T \theta_s^2 Z_s^2 \, ds < \infty \,.$$

Tada je $\mathbb{E}\, Z_T = 1$ i ako definiramo mjeru $\mathbb{P}^\star$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ formulom

$$\mathbb{P}^\star(A) = \mathbb{E}\,[Z_T; A], \quad A \in \mathcal{F}\,,$$

onda je $\mathbb{P}^\star$ vjerojatnost u odnosu na koju je slučajni proces $B^\star = \{B_t^\star : 0 \le t \le T\}$ definiran s

$$B^\star = B_t + \int_0^t \theta_s\, ds, \quad 0 \le t \le T$$

Brownovo gibanje.

(d1) Neka je $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ cijena dionice definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^\star$ definirana na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je ekvivalentna martingalna mjera ako vrijedi

(i) $\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$, tj. za sve $A \in \mathcal{F}_T$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^\star(A) = 0\,,$$

(ii) diskontirani proces $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t : 0 \le t \le T\}$ definiran s $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ je $\mathbb{P}^\star$-martingal.

(d2) U ovom modelu su cijena dionice S_t i vrijednost novca R_t modelirane s

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t\, dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0 \\ dR_t &= r R_t\, dt, \quad R_0 = 1 \qquad (\text{tj. } \; R_t = e^{rt})\,. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} dS_t = -re^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt}(\alpha S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t) \\ &= (\alpha - r)\tilde{S}_t\, dt + \sigma \tilde{S}_t\, dB_t = \sigma \tilde{S}_t \left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\, dt + dB_t \right)\,. \end{aligned}$$

Koristeći Girsanovljev teorem s

$$\theta_t = \frac{\alpha - r}{\sigma}, \quad 0 \le t \le T$$

dobije se da je uz

$$Z_t = e^{-\frac{\alpha - r}{\sigma} B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 t}$$

slučajni proces

$$B_t^\star = B_t + \int_0^t \theta_s\, ds = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma} t, \quad 0 \le t \le T$$

Brownovo gibanje u odnosu na vjerojatnosnu mjeru

$$\mathbb{P}^\star(A) = \mathbb{E}\,[Z_T; A] = \int_A e^{-\frac{\alpha - r}{\sigma} B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 T}\, d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_T\,.$$

Tada je

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s\, dB_s^\star, \quad 0 \le t \le T$$

pa je $\{\tilde{S}_t : 0 \le t \le T\}$ $\mathbb{P}^\star$-martingal kao Itôv integral, čime smo pronašli ekvivalentnu martingalnu mjeru.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2015.

Zadatak 4

(a) (3 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Izračunajte $\mathrm{Var}X$, gdje je $X = \max\limits_{0\leq t\leq 1} B_t$.

(b) Cijena dionice modelirana je geometrijskim Brownovim gibanjem s parametrima $\alpha = 0.1$ i $\sigma = 0.2$. Početna cijena dionice je 300 kn, a kamatna stopa je 5%.

(b1) (4 boda) Izračunajte vjerojatnost da unutar pola godine cijena dionice neće narasti iznad 320 kn.

(b2) (4 boda) Odredite cijenu slučajnog zahtjeva koji isplaćuje iznos od 100 kn, ako cijena dionice unutar 9 mjeseci nije pala ispod 280 kn.

Rješenje:

(a) Vrijedi $X \overset{d}{=} |B_1|$ pa je $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\,B_1^2 - (\mathbb{E}\,|B_1|)^2$. Računamo

$$\mathbb{E}\,|B_1| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\int_0^{\infty} x\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

Dakle, $\mathrm{Var}X = 1 - \frac{2}{\pi}$.

(b) Cijena dionice je $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t}$, $t \geq 0$, gdje su $\alpha = 0.1, S_0 = 300$, $\sigma = 0.2$ i $r = 0.05$.

(b1) Tražimo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 0.5} S_t \leq 320) &= \mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 0.5} S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t} \leq 320)\\ &= \mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + (\tfrac{\alpha}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \leq \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{320}{S_0})\\ &= \mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + \mu t) \leq x)\,,\end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{320}{S_0} = 5\ln\frac{320}{300} = 5\ln\frac{16}{15}\,.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije maksimuma Brownovog gibanja s driftom dobijemo

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 0.5}(B_t + \mu t) \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(-\frac{x + \mu\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)$$

pa je

$$\mathbb{P}(\max_{0\le t\le 0.5} S_t \le 320) = \Phi\left(\frac{5\ln\frac{16}{15} - 0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right) - e^{2\cdot 0.4\cdot 5\ln\frac{16}{15}}\Phi\left(-\frac{5\ln\frac{16}{15}+0.4\cdot 0.5}{\sqrt{0.5}}\right)$$
$$\approx \underbrace{\Phi(0.17)}_{=0.5675} - \left(\frac{16}{15}\right)^4 \underbrace{\Phi(-0.74)}_{=1-0.7704} = 0.27027\,.$$

(b2) Traži se cijena slučajnog zahtjeva

$$C = K\cdot 1_{\{\min\limits_{0\le t\le T} S_t \ge b\}}\,,$$

gdje je $K = 100$, $b = 280$ i $T = \frac{9}{12} = 0.75$. Neka je $\mathbb{P}^\star$ ekvivalentna martingalna mjera uz koju je

$$B_t^\star = B_t + \frac{\alpha - r}{\sigma}$$

Brownovo gibanje. Tada je cijena slučajnog zahtjeva C dana s

$$\begin{aligned}
V_0 &= \mathbb{E}^\star[e^{-rT}C] = \mathbb{E}^\star[Ke^{-rT}1_{\{\min\limits_{0\le t\le T} S_t\ge b\}}] \\
&= Ke^{-rT}\mathbb{P}^\star(\min_{0\le t\le T} S_t \ge b) = Ke^{-rT}\mathbb{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + (\tfrac{r}{\sigma} - \tfrac{\sigma}{2})t) \ge \tfrac{1}{\sigma}\ln\tfrac{b}{S_0}) \\
&= Ke^{-rT}\mathbb{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + \mu t) \ge x)\,,
\end{aligned}$$

gdje je

$$\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20} = 0.15 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{b}{S_0} = 5\ln\frac{280}{300} = 5\ln\frac{14}{15}\,.$$

Koristeći formulu za funkciju distribucije minimuma Brownovog gibanja s driftom dobije se

$$\mathbb{P}^\star(\min_{0\le t\le T}(B_t^\star + \mu t) \ge x) = \Phi\left(\frac{-x + \mu\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{x+\mu\cdot T}{\sqrt{0.5}}\right)\,.$$

Dakle,

$$V_0 = 100e^{-0.05\cdot 0.75}\left[\Phi\left(\frac{-5\ln\frac{14}{15} + 0.15\cdot 0.75}{\sqrt{0.75}}\right) - e^{2\cdot 0.15\cdot 5\ln\frac{14}{15}}\Phi\left(\frac{5\ln\frac{14}{15}+0.15\cdot 0.75}{\sqrt{0.75}}\right)\right]$$
$$\approx 96.31944\left[\underbrace{\Phi(0.53)}_{=0.7019} - \left(\frac{14}{15}\right)^{1.5}\underbrace{\Phi(-0.27)}_{=1-0.6064}\right] = 33.42251\,.$$