MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 1

(a) (2 boda) Definirajte Brownovo gibanje.

(b) (2 boda) Definirajte Gaussovski proces.

(c) (3 boda) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Dokažite da je B Gaussovski proces te mu odredite funkciju očekivanja i kovarijacijsku funkciju.

(d) (6 bodova) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje. Koji su od sljedećih slučajnih procesa Brownova gibanja

(d1) $X_t = \sqrt{t}B_1,\ t \geq 0\,,$ (d2) $Y_t = \sqrt{c}B_{c^{-1}t},\ t \geq 0$ gdje je $c > 0$?

Svoje tvrdnje obrazložite i dokažite.

Rješenje:

(a) Slučajni proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ je Brownovo gibanje ako vrijedi

(i) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.;

(ii) za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t < n$ su prirasti

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

nezavisne slučajne varijable;

(iii) za sve $0 \leq s \leq t$ prirast $B_t - B_s$ ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, tj. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$;

(iv) trajektorije slučajnog procesa B su $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne funkcije, tj.

$$\mathbb{P}(t \mapsto B_t \text{ je neprekidna funkcija}) = 1\,.$$

(b) Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ je Gaussovski ako je za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ normalni slučajni vektor.

(c) Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$. Budući su prirasti $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezavisni i normalno distribuirani, slijedi da je $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ normalni slučajni vektor pa je i njegova linearna transformacija

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ B_{t_3} - B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix}$$

također normalni slučajni vektor. Dakle, B je Gaussovski proces. Koristeći normalnost i nezavisnost prirasta, slijedi da je za $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
m(t) &= \mathbb{E}\, B_t = 0 \\
\gamma(s,t) &= \mathrm{Cov}\,(B_s, B_t) = \mathbb{E}\,[B_s B_t] = \mathbb{E}\,[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}\,[B_s^2] \\
&= \mathbb{E}\,[B_s]\mathbb{E}\,[B_t - B_s] + \mathbb{E}\,[B_s^2] = 0 + s = s = s \wedge t\,.
\end{aligned}$$

Ako je $0 \leq t \leq s$, zamjenom uloga s i t dobijemo

$$\gamma(s,t) = \mathbb{E}\,[B_s B_t] = \mathbb{E}\,[B_t B_s] = t \wedge s = s \wedge t$$

pa vrijedi

$$\gamma(s,t) = s \wedge t\,.$$

(d) (d1) Ne. X nema nezavisne priraste, jer je na primjer za $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}\,[X_s(X_t - X_s)] = \sqrt{s}(\sqrt{t} - \sqrt{s})\mathbb{E}\,[B_1^2] = \sqrt{s}(\sqrt{t} - \sqrt{s}) > 0\,.$$

(d2) Da. Dovoljno je dokazati da je Y Gaussovki proces s neprekidnim trajektorijama, funkcijom očekivanja $m(t) = 0$ i kovarijacijskom funkcijom $\gamma(s,t) = s \wedge t$. Neprekidnost trajektorija slijedi iz neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja B. Dokažimo da je Y Gaussovski. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $0 < t_1 < \ldots < t_n$. Tada je za slučajni vektor $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ normalan kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora $(B_{c^{-1}t_n}, \ldots, B_{c^{-1}t_1})$ koja je dana s

$$\begin{bmatrix} \sqrt{c} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{c^{-1}t_1} \\ B_{c^{-1}t_2} \\ \vdots \\ B_{c^{-1}t_{n-1}} \\ B_{c^{-1}t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{t_1} \\ Y_{t_2} \\ \vdots \\ Y_{t_{n-1}} \\ Y_{t_n} \end{bmatrix}$$

Funkcija očekivanja je $\mathbb{E}\, Y_t = \sqrt{c}\mathbb{E}\,[B_{c^{-1}t}] = 0$, a kovarijacijska funkcija je

$$\mathbb{E}\,[Y_s Y_t] = c\mathbb{E}\,[B_{c^{-1}s} B_{c^{-1}t}] = c[(c^{-1}s) \wedge (c^{-1}t)] = s \wedge t\,.$$

Dakle, Y je Brownovo gibanje.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 2 Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ i neka je $T > 0$.

(a) (4 boda) Definirajte jednostavni slučajni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ te pripadni Itôv integral u odnosu na Brownovo gibanje

$$\int_0^t H_s \, dB_s \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T\,.$$

(b) (4 boda) Dokažite da za jednostavni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ vrijedi Itôva izometrija

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^T H_t^2 \, dt\,.$$

(c) (4 boda) Izračunajte varijancu slučajne varijable $\int_0^1 \operatorname{ch} B_s \, dB_s$.

Rješenje: (a) Slučajni proces $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ je jednostavan ako je

$$H_t(\omega) = \sum_{j=1}^n \phi_{j-1}(\omega) 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t),\ 0 \leq t \leq T\,,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ je particija segmenta $[0, T]$, a ϕ_j su F_{t_j}-izmjerive slučajne varijable za $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Itôv integral slučajnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B je slučajni proces $(H \bullet B) = \{(H \bullet B)_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$(H \bullet B)_t = \sum_{j=1}^n \phi_{j-1}(B_{t \wedge t_j} - B_{t \wedge t_{j-1}})\,,\ 0 \leq t \leq T\,.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t dB_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n \phi_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)^2\right] \\ &= \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}\left[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right].\end{aligned}$$

Za $1 \leq j < k \leq n$ je, zbog nezavisnosti prirasta,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi_{j-1}\phi_{k-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\underbrace{\mathbb{E}\left[B_{t_k} - B_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right]}_{=\mathbb{E}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}]=0}\right] = 0\,.\end{aligned}$$

Zbog simetrije, isto vrijedi za $1 \leq k < j \leq n$. Stoga je

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dB_s\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\phi_{j-1}^2 (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\phi_{j-1}^2 \underbrace{\mathbb{E}\left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]}_{=\mathbb{E}\left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right] = t_j - t_{j-1}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}^2 (t_j - t_{j-1})\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right].$$

(c) Koristeći Itôvu izometriju, činjenicu da je Itôv integral martingal i $\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t}\right] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\int_0^1 \operatorname{ch} B_s\, dB_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 \operatorname{ch} B_s\, dB_s\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\int_0^1 \operatorname{ch} B_s\, dB_s\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\int_0^1 (\operatorname{ch} B_s)^2\, ds - 0 = \frac{1}{4}\int_0^1 \mathbb{E}\left[e^{-2B_s} + 2 + e^{2B_s}\right] ds \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (2e^{2s} + 2)\, ds = \frac{1 + e^2}{4}.
\end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 3

(a) (3 boda) Definirajte Itôv proces.

(b) (3 boda) Iskažite Itôvu formulu za Itôv proces.

(c) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje.

(c1) (3 boda) Je li slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$X_t = t^2 B_t,\ t \geq 0$$

Itôv proces? Obrazložite vaše tvrdnje.

(c2) (2 boda) Izračunajte kvadratnu kovarijaciju slučajnih procesa X i B.

(c3) (4 boda) Pomoću Itôve formule izračunajte $\mathbb{E}\left[\cos(\lambda B_t)\right]$ za $\lambda > 0$.

Rješenje: (a) Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$. Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je Itôv proces ako postoje $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni procesi $V = \{V_t : t \geq 0\}$ i $H = \{H_t : t \geq 0\}$ takvi da je

$$\int_0^t |V_s|\, ds < \infty \ \mathbb{P} - \text{g.s.} \quad \text{i} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right] < \infty \quad \text{za sve} \ \ t > 0$$

i

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s\, ds + \int_0^t H_s dB_s \quad \text{za} \ \ t \geq 0\,.$$

(b) Ako je $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ i X Itôv proces, onda vrijedi

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s\,.$$

(c1) Koristeći Itôvu formulu,

$$X_t = t^2 B_t = 0 + \int_0^t 2sB_s\, ds + \int_0^t t^2 dB_s + 0,$$

odakle vidimo da je X Itôv proces, jer je zbog neprekidnosti Brownovog gibanja

$$\int_0^t |2sB_s|\, ds < \infty \qquad \text{i} \qquad \mathbb{E}\int_0^t |s^2|^2\, ds = \int_0^t s^4\, ds = \frac{t^5}{5} < \infty$$

za sve $t > 0$.
(c2) Budući je $B_t = \int_0^t 1 dB_s$, po definiciji kvadratne kovarijacije Itôvih procesa je

$$\langle X, B\rangle_t = \int_0^t s^2 \cdot 1 d\langle B, B\rangle_s = \int_0^t s^2\, ds = \frac{t^3}{3}\,.$$

(c3) Iz Itôve formule slijedi

$$\cos(\lambda B_t) = 1 - \lambda \int_0^t \sin(\lambda B_s)\, dB_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t \cos(\lambda B_s)\, ds$$

pa uzimanjem očekivanja i koristeći činjenicu da je Itôv integral martingal dobijemo

$$\mathbb{E}\left[\cos(\lambda B_t)\right] = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t \mathbb{E}\left[\cos(\lambda B_s)\right] ds\,.$$

Definiramo li $g(t) = \mathbb{E}\left[\cos(\lambda B_t)\right]$ slijedi da je

$$g(t) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t g(s)\, ds\,,$$

odakle deriviranjem (g je derivabilna na $(0, \infty)$, jer je $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx$) dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$g'(t) = -\frac{\lambda^2}{2} g(t),\ t > 0$$

s rješenjem $g(t) = ce^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$. Budući je

$$1 = g(0) = \lim_{t \to 0+} g(t) = c,$$

slijedi da je $g(t) = \mathbb{E}\left[\cos(\lambda B_t)\right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Financijsko modeliranje 2

Prvi kolokvij - 20. travnja 2015.

Zadatak 4 Neka je $B = \{B_t : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje.

(a) (3 boda) Dokažite da je

$$B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2\, ds,\ t \geq 0$$

martingal.

(b) (3 boda) Neka je $a > 0$ i $T = \inf\{t > 0 : |B_t| = a\}$. Izračunajte

$$\mathbb{E}\int_0^T B_s^2\, ds\,.$$

(c) (4 boda) Riješite stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = 2X_t\, dt + 3dB_t, \quad X_0 = 0\,.$$

Izračunajte $\mathbb{E}\,[X_t^2]$ za $t \geq 0$.

Rješenje:

(a) Iz Itôve formule slijedi

$$B_t^4 = B_0^4 + \int_0^t 4B_s^3 dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 12B_s^2\, ds,$$

odakle dobijemo da je

$$B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2\, ds = 4\int_0^t B_s^3 dB_s$$

martingal kao Itôv integral.

(b) Iz (a) znamo da je $M_t = B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2\, ds$, $t \geq 0$ martingal pa iz teorema o opcionalnom zaustavljanju slijedi da je i $M_{t\wedge T}$, $t \geq 0$ martingal, odakle dobijemo

$$0 = \mathbb{E}\, M_{t\wedge T} = \mathbb{E}\, B_{t\wedge T}^4 - 6\mathbb{E}\int_0^{T\wedge t} B_s^2\, ds\,.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge t} B_s^2\, ds = \frac{1}{6}\mathbb{E}\, B_{t\wedge T}^4\,.$$

Stoga je

$$\mathbb{E}\int_0^T B_s^2\, ds = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_0^{T\wedge t} B_s^2\, ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{6}\mathbb{E}\, B_{t\wedge T}^4 = \frac{1}{6}\mathbb{E}\,[B_T^4] = \frac{a^4}{6}\,,$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji, a u trećoj Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, budući je $|B_{t\wedge T}| \leq a$.

(c) Prvi način. Koristeći Itôvu formulu slijedi da je

$$d(e^{-2t}X_t) = -2e^{-2t}X_t\,dt + e^{-2t}dX_t = -2e^{-2t}X_t\,dt + e^{-2t}(2X_t\,dt + 3dB_t) = 3e^{-2t}dB_t,$$

odakle dobijemo

$$X_t = 3e^{2t}\int_0^t e^{-2s}\,dB_s,\ t \geq 0\,.$$

Iz Itôve izometrije slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = 9e^{4t}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-2s}\,dB_s\right)^2\right] = 9e^{4t}\int_0^t e^{-4s}\,ds = \frac{9}{4}(e^{4t}-1)\,.$$

Drugi način. Radi se o linearnoj stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi oblika

$$dX_t = dY_t + X_t dZ_t,\quad X_0 = Y_0 = 0\,,$$

gdje su

$$Y_t = 3B_t \qquad \text{i} \qquad Z_t = 2t,\ t \geq 0\,.$$

Budući je $\langle Y, Z\rangle_t = 0$, rješenje je dano formulom

$$X_t = \mathcal{E}(Z)_t \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s^{-1} dY_s\,,$$

gdje je

$$\mathcal{E}(Z)_t = e^{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t},\ t \geq 0\,.$$

O uvom slučaju je $\mathcal{E}(Z)_t = e^{2t-\frac{1}{2}\cdot 0} = e^{2t}$ pa je

$$X_t = 3e^{2t}\int_0^t e^{-2s}\,dB_s\,.$$

Ostatak se riješi na isti način.