

4. Američke opcije i problem optimalnog zaustavljanja

1. Neka su $Z_t \sim U([0, 1])$, $t = 0, 1, 2, 3$ nezavisne slučajne varijable.
 - (a) Odredite Snellov omotač $U = \{U_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ slučajnog procesa $\mathbb{Z} = \{Z_t : 0 \leq t \leq 3\}$.
 - (b) Neka je $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$. Izračunajte $\mathbb{E}U_{\tau_0}$.
2. Promatramo CRR model s $T = 3$, $a = -0.25$, $b = 0.2$, $r = 0.1$ i $S_0 = 100$.
 - (a) Odredite cijenu američke put opcije s cijenom izvršenja $K = 95$.
 - (b) Izračunajte hedging portfelj.
 - (c) Nađite optimalno vrijeme za izvršenje opcije.
3. Igrač može bacati simetričnu kocku najviše 5 puta i može u bilo kojem trenutku stati. Odredite optimalnu strategiju koja maksimizira očekivani broj koji se pojavio na kocki kada je igrač stao s igrom te odredite taj broj.
4. Odredite cijenu američke put opcije s cijenom izvršenja $K = 90$ u CRR modelu s $T = 4$, $a = -0.25$, $b = 0.25$, $r = 0.1$ i $S_0 = 100$. U slučaju da cijena dionice padne četiri puta za redom, izračunajte profit pisca ove opcije.
5. Promatramo američku put opciju u CRR modelu s parametrima $T > 0$, $-1 < a < 0 < b$ i $S_0 > 0$ te cijenom izvršenja K . Za koje početne vrijednosti cijene dionice S_0 se isplati iskoristiti američku opciju odmah?

Upute i rješenja: **1.** (a) $U_0 = \max\{Z_0, \frac{89}{128}\}$, $U_1 = \max\{Z_1, \frac{5}{8}\}$, $U_2 = \max\{Z_2, \frac{1}{2}\}$, $U_3 = Z_3$ (b) $\mathbb{E}[U_{\tau_0}] = \mathbb{E}U_0 = \frac{24305}{32768} \approx 0.7413$ **2.** (a) 4.83397 (b) $\phi_1 : (46.6, -0.417)$, $\phi_2(12.55, -0.105)$, $(85.2, -0.983)$, $\phi_3 : (0, 0)$, $(54.51, -0.67)$, $(61.92, -0.67)$, $(86, -1)$ (c) Optimalno vrijeme zaustavljanja je nakon što cijena dionice prvo raste pa dva puta padne ili ako padne samo jednom. **3.** Ako je U Snellov omotač, vrijedi rekurzija $\mathbb{E}U_t = \frac{\lfloor U_{t+1} \rfloor (\lfloor U_{t+1} \rfloor + 1)}{12} + \mathbb{E}U_{t+1}(1 - \frac{\lfloor U_{t+1} \rfloor}{6})$ za $1 \leq t \leq T-1$ s početnim uvjetom $\mathbb{E}U_T = \frac{7}{2}$. Optimalna strategija je sljedeća: ako u prvom, drugom, ili trećem bacanju dobijemo barem 3 onda stanemo, inače nastavljamo. Ako u četvrtom bacanju dobijemo barem 4, onda stanemo, a inače bacamo još 5. put. Srednji optimalni broj na kocki je tada $\frac{10}{3}$. **4.** Cijena opcije je 5.14985, a profit pisca je $21.7559 = 80.1152 - 58.3594$. **5.** Za $0 \leq S_0 \leq x^* := \sup\{x \in [0, (1+a)^{-T}K] : p_{am}(0, x) = (K-x)^+\}$, jer je na predavanjima pokazano da je $p_{am}(0, x) = (K-x)^+$ za sve $x \leq x^*$ i $p_{am}(0, x) > (K-x)^+$ za sve $x^* < x < (1+a)^{-T}K$.