3. Višeperiodni modeli - dio 2 - Cox-Ross-Rubinsteinov model

1. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.3$, $r = 0.05$, vremenskim periodom $T = 2$ i početnom cijenom dionice 100. Cijena europske call-opcije s cijenom izvršenja $K > 110$ je $C_0 = \frac{100}{9}$. Odredite K.

2. Promotrimo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $-1 < a < b$, $r > 0$ i $T \in \mathbb{N}$. Pretpostavljamo da vrijedi $a < r < b$ i definirajmo $q = \frac{r-a}{b-a}$.

   (a) Dokažite da za ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ i $0 \leq s < t \leq T$ vrijedi

   $$\mathbb{P}^*(S_t = S_s(1+a)^{t-s-i}(1+b)^i|\mathcal{F}_s) = \binom{t-s}{i} q^i(1-q)^{t-s-i}, \ \ i = 0, 1, \ldots, t-s.$$

   (b) Pretpostavimo da je slučajni zahtjev oblika $C = f(S_T)$ za neku funkciju $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

   (b1) Odredite funkciju f_t takvu da je $C_t = f_t(S_t)$ za $0 \leq t \leq T-1$.

   (b2) Odredite funkciju g_t preko koje možemo zapisati količinu dionica $\phi_t^1 = g(S_{t-1})$ koja se nalaze u replicirajućoj strategiji u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$.

3. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.3$, $r = 0.05$, vremenskim periodom $T = 3$ i početnom cijenom dionice 100.

   (a) Odredite cijenu europske call-opcije s cijenom izvršenja $K = 120$.

   (b) Odredite replicirajuću strategiju za slučajni zahtjev iz (a).

4. Promotrimo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $-1 < a < b$, $r > 0$ i $T \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je slučajni zahtjev oblika $C = f(S_T)$ za neku funkciju $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

   (a) Ako funkcija f zadovoljava

   $$f(\lambda x) \geq \lambda f(x) \quad \text{za sve} \ \ x \ \ \text{i} \ \ \lambda \geq 1\,,$$

   provjerite da je količina novca u banci u replicirajućoj strategiji uvijek nepozitivna.

   (b) Provjerite da u slučaju europske call-opcije s cijenom izvršenja K vrijedi uvjet iz (a).

5. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$, vremenskim periodom $T = 3$ i početnom cijenom dionice 100.
   (a) Odredite cijenu europske lookback call-opcije.
   (b) Odredite replicirajuću strategiju za slučaj kada je cijena dionice prvo narasla i nakon toga pala.
6. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.2$, $r = 0.1$, vremenskim periodom $T = 3$ i početnom cijenom dionice 100.
   (a) Odredite cijenu azijske call opcije s cijenom izvršenja $K = 100$.
   (b) Odredite replicirajuću strategiju za slučaj kada je cijena dionice uvijek rasla.
7. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.2$, $r = 0.1$, vremenskim periodom $T = 3$ i početnom cijenom dionice 100.
   (a) Odredite cijenu down-and-in call opcije s cijenom izvršenja $K = 120$ i barijerom $B = 90$.
   (b) Odredite replicirajuću strategiju za slučaj kada je cijena dionice prvo pala pa onda narasla.
8. Nalazimo se u dvoperiodnom Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu s parametrima $-1 < a < b$ i kamatnom stopom $r > 0$ takvom da je $a < r < b$. Promotrimo opciju takvu da kupac opcije u trenutku 0 dobiva pravo da u trenutku $T = 2$ kupi dionicu po početnoj cijeni $S_0 > 0$. Odredite cijenu ovakve opcije. Pokušajte riješiti zadatak općenito za model s periodom T.

Upute i rješenja: **1.** $K = 120$ **2.** (a) Izračunajte $\mathbb{P}^*(S_t = S_s(1+a)^{t-s-i}(1+b)^i | S_s = x, S_{s-1} = x_{s-1}, \ldots, S_1 = x_1)$ koristeći nezavisnost i jednaku distribuiranost slučajnih varijabli X_i, $i = 1, \ldots, T$ te upotrijebite definiciju uvjetnog očekivanja. (b1) $f_t(x) = (1+r)^{-(T-t)} \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} f(x(1+a)^{T-t-i}(1+b)^i)$ (b2) Koristeći $f_t(S_{t-1}(1+y)) = \phi_t^0 (1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+y)$ za $y = a, b$ dobijte izraz za $\phi_t^1 = g_t(S_{t-1})$, gdje je $g_t(x) = \frac{1}{x(b-a)(1+r)^{(T-t)}} \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} (f(x(1+a)^{T-t-i}(1+b)^{i+1}) - f(x(1+a)^{T-t-i+1}(1+b)^i))$. **3.** (a) 15.6895 (b) $\phi_0 = \phi_1$, $\phi_1 : (0.521088, -36.4194)$, $\phi_2 : (0.180953, -10.5043), (0.730403, -62.3345)$, $\phi_3 : (0, 0), (0.292308, -21.0085), (1, -103.661)$ **4.** (a) Upotrijebite formulu za ϕ_t^1 iz 3.(b) i koristeći uvjet zaključite da je $C_t \geq \phi_t^1 S_t$, odakle slijedi da je $\phi_t^0 \leq 0$. (b) Raspišite funkciju $f(x) = (x-K)^+$ po slučajevima $x \geq K$, $x < K < \lambda x$ i $\lambda X \leq K$ i dokažite tvrdnju. **5.** (a) 32.6822 (b) Promatramo slučaj $S_0 = 100$, $S_1 = 125$, $S_2 = 100$. Dobije se $\phi_0 = \phi_1 = (-22.2616, 0.549433)$, $\phi_2 = (-61.2182, 0.892256)$, $\phi_3 = (-33.3918, 0.55556)$. **6.** (a) 14.3622 (b) Promatramo slučaj $S_0 = 100$, $S_1 = 120$, $S_2 = 144$. Dobije se $\phi_0 = \phi_1 = (-30.7761, 0.45158)$, $\phi_2 = (-31.3048, 0.456229)$, $\phi_3 = (-6.76182, 0.25)$. **7.** (a) 1.64448 (b) Promatramo slučaj $S_0 = 100$, $S_1 = 80$, $S_2 = 104$. Dobije se $\phi_0 = \phi_1 = (10.6891, -0.0904463)$, $\phi_2 = (-10.9632, 0.207273)$, $\phi_3 = (-18.272, 0.292308)$. **8.** $S_0(1-(1+r)^{-2})$. U općenitom slučaju uzmemo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ i izračunamo $C_0 = \mathbb{E}[(1+t)^{-T}(S_T - S_0) | \mathcal{F}_0] = S_0 - \frac{S_0}{(1+r)^T} = S_0(1-(1+r)^{-T})$.