1. Jednoperiodni modeli

1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, dva elementarna događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ i dvije financijske imovine. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu je jednaka $r = \frac{1}{9}$. U kojim modelima tržiste ne dopušta arbitražu?

   (a) $S_0^1 = 8, \quad S_1^1(\omega_1) = \frac{10}{3}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{40}{9}$,

   (b) $S_0^1 = 5, \quad S_1^1(\omega_1) = \frac{20}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{70}{9}$,

   (c) $S_0^1 = 5, \quad S_1^1(\omega_1) = \frac{10}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{70}{9}$,

   (d) $S_0^1 = 5, \quad S_1^1(\omega_1) = \frac{50}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{70}{9}$?

   Pokušajte generalizirati ovaj model promatrajući $r > 0$,

   $$S_0^1 = a, \qquad S_1^1(\omega_1) = b, \qquad S_1^1(\omega_2) = c$$

   te pronađite uvjete na $r, a, b, c > 0$ uz koje tržište ne dopušta arbitražu.

2. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera. Dokažite da je skup $\mathcal{P}$ konveksan, tj. da je za $\lambda \in [0,1]$ i $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$ i mjera $\mathbb{P} := (1-\lambda)\mathbb{P}_1 + \lambda\mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$.

3. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, dva elementarna događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ i dvije financijske imovine takve da je

   $$S_0^1 = a, \qquad S_1^1(\omega_1) = b, \qquad S_1^1(\omega_2) = c\,,$$

   gdje su $c > b > 0$, $a > 0$ i kamatna stopa $r > 0$ takvi da tržište ne dopušta arbitražu. Je li ovaj model potpun? Dokažite vaše tvrdnje.

4. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, četiri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, i tri financijske imovine takve da je

   $$S_0^1 = 1, \qquad S_1^1(\omega_1) = 0.5, \qquad S_1^1(\omega_2) = 1, \qquad S_1^1(\omega_3) = 1.5, \qquad S_1^1(\omega_4) = 2\,.$$

   Neka je S^2 call-opcija s cijenom izvršenja $K = 1$ cijene 0.3. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu je $r = 0.25$.

   (a) Dopušta li tržište arbitražu?

(b) Dodajmo tržištu treću rizičnu imovinu, koja je put-opcija (na S^1) s cijenom izvršenja 1.5 i cijenom 0.2. Dopušta li ovakvo tržište arbitražu? U slučaju da jest, odredite neki portfelj koji je arbitraža. Također, odredite cijenu ove put-opcije tako da tržiste ne dopušta arbitražu.

5. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, i tri financijske imovine. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu jednaka je $r = 1/9$, dok se rizične imovine modeliraju na sljedeći način:

$$
\begin{array}{llll}
S_0^1 = 5 & S_1^1(\omega_1) = \dfrac{60}{9} & S_1^1(\omega_2) = \dfrac{60}{9} & S_1^1(\omega_3) = \dfrac{40}{9} \\
S_0^2 = 10 & S_1^2(\omega_1) = \dfrac{120}{9} & S_1^2(\omega_2) = \dfrac{80}{9} & S_1^2(\omega_3) = \dfrac{10}{9}x\,,
\end{array}
$$

gdje je $x > 0$.

(a) Dokažite da pripadajući model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $x \in (8, 12)$.

(b) Za slučaj $x = 10$ izračunajte skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera.

(c) Neka je $x = 10$, te neka je $C = (S_1^1 - K)^+$ call opcija na rizičnu imovinu s cijenom izvršenja $K = 6$. Da li je C dostižan slučajni zahtjev? Obrazložite.

(d) Za slučaj $x = 14$ nađite barem jedan portfelj koji je arbitraža.

6. * Dan je model financijskog tržišta s jednom dionicom koja može poprimiti tri moguće vrijednosti: $d < s < g$. U trenutku $t = 0$ je cijena dionice jednaka $S_0^1 = 1$.

(a) Koje uvjete moraju zadovoljavati d, s i g da tržiste ne bi dopuštalo arbitražu?

(b) Ako ovakvo tržiste ne dopušta arbitražu, može li ono biti potpuno? Obrazložite.

Upute i rješenja: **1.** (b) i (c). Uvjet je $\min\{b, c\} < a(1+r) < \max\{b, c\}$. **3.** Da. Za svaki slučajni zahtjev $C\colon \Omega \to [0, \infty)$, pripadni replicirajući portfelj je dan s $\phi = \left(\frac{cC(\omega_1) - bC(\omega_2)}{(1+r)(c-b)}, \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{c-b}\right)$. **4.** (a) Ne. (Uputa: $\mathcal{P} = \{(\frac{1}{4}, \lambda, \frac{3}{4} - 2\lambda, \lambda) : \lambda \in (0, \frac{3}{8})\}$ (b) Da. Jedna arbitraža je $\phi = (-0.8, 1, -1, 0.5)$. Uputa: Što se događa s $\mathcal{P}$ kada se doda nova rizična imovina? Skup nearbitražnih cijena put-opcije je $(0.2, 0.35)$. **5.** (b) $\mathcal{P} = \{(0.25, 0.25, 0.5)\}$ (c) Koliko ima ekvivalentnih martingalnih mjera? (d) Jedan takav portfelj je npr. $\phi = (-20, 2, 1)$. **6.** (a) Treba vrijediti: $d < 1 + r < q + s - d$ i $\frac{1+r-s}{g-d} + \frac{1+r-g}{s-d} < 1$. (b) Ne.