

### 3. Američke opcije i problem optimalnog zaustavljanja

#### Zadatak 3.A

Neka je  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  Markovljev lanac sa skupom stanja  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  i matricom prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadana je funkcija

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

i slučajni proces  $Z = \{Z_t : 0 \leq t \leq T = 5\}$  definiran s  $Z_t = f(X_t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Izračunajte

$$\max\{\mathbb{E}_i Z_\sigma : \sigma \text{ je vrijeme zaustavljanja takvo da je } \sigma \leq T = 5\}$$

za  $i \in S$  te odredite optimalnu nagradu.

#### Zadatak 3.B

Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model (CRR model) s parametrima  $a = -0.2$ ,  $b = 0.25$  (relativne promjene cijena dionica),  $r = 0.1$  (kamatna stopa na nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom  $T = 3$ . Početna cijena dionice je  $S_0 = 100$ .

- Odredite cijenu američke put opcije s dospijećem  $T$  i cijenom izvršenja  $K = 90$ .
- Izračunajte hedging portfelj.
- Nađite optimalno vrijeme izvršenja opcije.

#### Zadatak 3.C

Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model (CRR model) s parametrima  $a = -0.15$ ,  $b = 0.1$  (relativne promjene cijena dionica),  $r = 0.05$  (kamatna stopa na nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom  $T = 3$ . Početna cijena dionice je  $S_0 = 250$ .

- Odredite cijenu američke put opcije s dospijećem  $T$  i cijenom izvršenja  $K = 235$ .
- Izračunajte hedging portfelj.
- Nađite optimalno vrijeme izvršenja opcije.

#### Zadatak 3.D

Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model (CRR model) s parametrima  $a = -0.04$ ,  $b = 0.06$  (relativne promjene cijena dionica),  $r = 0.02$  (kamatna stopa na nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom  $T = 3$ . Početna cijena dionice je  $S_0 = 500$  te promatramo američku put opciju s datumom dospijeća  $T$  i cijenom izvršenja  $K = 485$ .

- (a) U svakom čvoru binarnog stabla odredite unutarnju vrijednost američke put opcije.
- (b) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost američke put opcije.
- (c) Nađite trenutak u kojem je optimalno iskoristiti američku put opciju. Objasnite!
- (d) Cijena dionice pada tri puta za redom. Kupac je odlučio opciju iskoristiti u trenutku  $T = 3$ . Izračunajte profit pisca ako slijedi hedging portfelj.

**Zadatak 2.E**

Promatramo jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  na  $\mathbb{Z}$ . Neka je  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  i

$$\Psi(t, x) = (1 + r)^{-t} f(x) = (1 + r)^{-t} a^x, \quad r > 0.$$

Nađite Snellov omotač slučajnog procesa  $Z = \{Z_t : 0 \leq t \leq T\}$ ,  $Z_t = \Psi(t, X_t)$ , optimalnu nagradu te optimalno vrijeme zaustavljanja.