1 Uvod

Osnovna ideja ovog kolegija je uvesti modele financijskih tržista u modelima s diskretnim vremenom te razviti vjerojatnosne tehnike i metode za njihovo opisivanje.

Pretpostavit ćemo da svi modeli koje ćemo promatrati zadovoljavaju sljedeće pretpostavke[1]:

- sve stranke imaju isti pristup informacijama;
- nema troškova transakcija;
- sva financijska imovina je beskonačno djeljiva i likvidna;
- kamatna stopa je jednaka za posuđivanje i ulaganje.

Da bismo uveli osnovne pojmove i koncepte, promotrit ćemo model financijskog tržista s dva vremenska trenutka ($t = 0$ i $t = 1$) u kojem postoje dva moguća 'stanja svijeta'. Iako model nije realističan, bit će dosta koristan pri uvođenju osnovnih koncepata kao što su arbitraža, vjerojatnost neutralna na rizik i replicirajući portfelj.

1.1 Jednostavni model

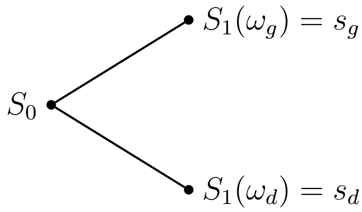
Promotrimo financijsko tržište s dvije financijske imovine: jednom dionicom i jednom nerizičnom imovinom (na primjer novac uložen u banku) te dva vremenska trenutka: $t = 0$ (danas) i $t = 1$ (npr. sutra, za mjesec dana, za godinu dana).

U trenutku $t = 0$, vrijednost dionice je S_0 kn, a u trenutku $t = 1$ vrijednost dionice može biti s_d kn ili s_g kn ($s_d < s_g$), ovisno o tome da li cijena naraste ili padne. Time opisujemo moguća 'stanja svijeta' u trenutku $t = 1$ i primijetimo da ishod nije poznat u trenutku $t = 0$.

Formalno, moguća 'stanja svijeta' se modeliraju pomoću skupa $\Omega = \{\omega_d, \omega_g\}$. Tada je vrijednost dionice u trenutku $t = 1$ moguće shvatiti kao slučajnu varijablu[2] $S_1 : \Omega \to [0, \infty)$ s vrijednostima $S_1(\omega_d) = s_d$ i $S_1(\omega_g) = s_g$.

[1] eng. *frictionless market*, tržište bez trenja

[2] Vjerojatnost elementarnih događaja skupa Ω predstavlja intrinzično svojstvo modela i i često nam neće nam trebati u razmatranju koje slijedi.



Pretpostavimo da nerizičnu imovinu modeliramo kao ulaganje u banku uz fiksnu kamatnu stopu $r(r > 0)$. Dakle, 1 kn u trenutku $t = 0$ vrijedi $1 + r$ kn u trenutku $t = 1$.

Napomena. Primijetimo da vrijednost nerizične imovine u trenutku $t = 1$ ne ovisi o 'stanju svijeta'. S druge strane, cijenu dionice u trenutku $t = 1$ nije moguće predvidjeti u trenutku $t = 0$, što nosi određeni rizik u trgovanju i time dionicu smatramo rizičnom imovinom.

Sada ćemo u opisanom modelu uvesti neke financijske instrumente.

Call opcija (opcija za kupnju) je sljedeći financijski instrument (ugovor): kupac opcije plaća piscu opcije iznos (premiju) C_0 trenutku $t = 0$, a zauzvrat dobiva pravo (ali ne i obvezu!) na kupnju dionice u trenutku $t = 1$ po *cijeni izvršenja*[3] K.

Primijetimo da kupac call opcije u trenutku odluke o kupnji dionice zna cijenu dionice i ima sljedeće mogućnosti:

- ako je cijena dionice veća od cijene izvršenja K, onda kupac opcije može kupiti dionicu po dogovorenoj cijeni K i odmah nakon toga ju može prodati po tržišnoj cijeni, čime je ostvario profit $S_1 - K$;
- ako je cijena dionice manja od K, onda neće kupiti dionicu.

Označimo li s $C_1 : \Omega \to [0, \infty)$ *vrijednost* call opcije u trenutku $t = 1$, onda iz gornjeg razmatranja dobijemo

$$C_1 = (S_1 - K)^+ ,$$

gdje je $x^+ := \max\{x, 0\}$.

Put opcija (opcija za prodaju) daje pravo kupcu opcije da u trenutku $t = 1$ proda dionicu po cijeni izvršenja K dogovorenoj u trenutku kupnje ($t = 0$). Analogno gornjem razmatranju se dobije da je vrijednost put opcije u trenutku $t = 1$ dana s

$$P_1 = (K - S_1)^+ .$$

Jedno od osnovnih pitanja koje se postavlja jest određivanje (poštene!) cijene opcije unutar ovakvog modela financijskog tržšta.

[3] eng. *exercise price, strike price*

1.2 Cijena opcije i replicirajući portfelj

Promotrimo prvo call opciju i pretpostavimo da je $s_d \leq K \leq s_g$. Primijetimo da preostali slučajevi nisu zanimljivi:

- ako je $K < s_d$, onda kupac opcije uvijek ostvaruje profit od barem $s_d - K > 0$;
- ako je $K > s_g$, onda je pisac opcije na dobitku (dobio je premiju), jer kupac opcije u ovom slučaju neće iskoristiti pravo na kupnju dionice po cijeni K.

Sada ćemo konstruirati *portfelj*[4] koji ima istu vrijednost u trenutku $t = 1$ kao i call opcija. Portfelj je uređeni par $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathbb{R}^2$, gdje je $\phi^0 \in \mathbb{R}$ količina novca u banci[5], a $\phi^1 \in \mathbb{R}$ je količina dionica koje investitor drži[6].

Vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$ je dana s $V_0^\phi := \phi^0 + \phi^1 S_0$, a u trenutku $t = 1$ s

$$V_1^\phi := \begin{cases} \phi^0(1+r) + \phi^1 s_d, & \text{ako je cijena dionice } s_d \\ \phi^0(1+r) + \phi^1 s_g, & \text{ako je cijena dionice } s_g\,. \end{cases}$$

Drugim riječima, V_1^ϕ je slučajna varijabla na Ω i

$$V_1^\phi = \phi_0(1+r) + \phi^1 S_1\,.$$

Primijetimo da vrijedi

$$V_t^\phi = \phi \cdot ((1+r)^t, S_t), \quad t = 0, 1\,,$$

gdje $\cdot$ označava skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^2$.

Reći ćemo da portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ *replicira*[7] call opciju, ako ima istu vrijednost u trenutku $t = 1$ kao i call opcija (bez obzira na cijenu dionice!), tj. ako vrijedi

$$C_1(\omega) = V_1^\phi(\omega) \quad \text{za sve } \ \omega \in \Omega\,,$$

što se svodi na sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \phi^0(1+r) + \phi^1 s_d &= 0 \\ \phi^0(1+r) + \phi^1 s_g &= s_g - K\,. \end{aligned}$$

[4]eng. *portfolio*

[5]Ako je $\phi^0 < 0$, onda smo u trenutku $t = 0$ posudili novac od banke i vraćamo iznos $|\phi^0|(1+r)$ u trenutku $t = 1$.

[6]$\phi^1 < 0$ se može interpretirati na sljedeći način: od brokera smo u trenutku $t = 0$ posudili $|\phi^1|$ dionica i odmah ih prodali (eng. *short sell*) te taj novac u trenutku $t = 0$ uložili u banku tako da u banci imamo $\phi^0 + |\phi^1| S_0$. U trenutku $t = 1$ ćemo vratiti posuđene dionice brokeru tako da podignemo novac iz banke i kupimo $|\phi^1|$ dionica po tržišnoj cijeni S_1 i vratimo ih brokeru. U tom trenutku nam u banci ostane $\phi^0(1+r) + |\phi^1|((1+r)S_0 - S_1)$ kn.

[7]Ovakav portfelj ćemo zvati *replicirajući portfelj*.

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ dano s

$$\phi^0 = -\frac{s_g - K}{s_g - s_d}\frac{s_d}{1+r}\,, \quad \phi^1 = \frac{s_g - K}{s_g - s_d}\,.$$

Sada bismo mogli definirati cijenu call opcije u trenutku $t = 0$ kao vrijednost portfelja koji ju replicira u trenutku $t = 0$:

$$C_0 := V_0^\phi = \phi^0 + \phi^1 S_0 = \frac{s_g - K}{s_g - s_d}\left(S_0 - \frac{S_d}{1+r}\right)\,. \tag{1.1}$$

Ovakvu definiciju možemo opravdati na sljedeći način. C_0 je 'poštena' cijena call opcije iz više razloga.

(a) Pisac opcije može s iznosom C_0 koji dobije od kupca kupiti portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ dan s (1.1), čija je vrijednost $s_g - K$ u slučaju rasta cijene dionice i time će pokriti[8] njegov eventualni gubitak[9].

(b) Kupac opcije neće platiti više od C_0. Naime, ako je kupac kupio call opciju za iznos $q > C_0$, onda nije optimalno prošao, jer je mogao za iznos q kupiti portfelj $\psi = (\phi^0 + (q - C_0), \phi^1)$[10] čija je vrijednost u trenutku $t = 1$ veća od vrijednosti replicirajućeg portfelja (i opcije!):

$$V_1^\psi = V_1^\phi + (q - C_0)(1+r) > V_1^\phi\,.$$

Ako ne vrijedi $s_d \leq K \leq s_g$, onda možemo na sličan način pronaći replicirajući portfelj, ali sada rješavamo sustav

$$\begin{aligned}\phi^0(1+r) + \phi^1 s_d &= (s_d - K)^+ =: c_d \\ \phi^0(1+r) + \phi^1 s_g &= (s_g - K)^+ =: c_g\,,\end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\phi^0 = \frac{c_d s_g - c_g s_d}{(1+r)(s_g - s_d)}\,, \quad \phi^1 = \frac{c_g - c_d}{s_g - s_d}\,.$$

Primijetimo da je $\phi^1 \geq 0$, tj. pri repliciranju call opcije uvijek posjedujemo dionice u portfelju.[11]

Cijena call opcije je vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku $t = 0$, tj.

$$C_0 = V_0^\phi = \frac{1}{1+r}(p^* c_g + (1 - p^*)c_d)\,, \tag{1.2}$$

[8] eng. *hedge*

[9] Ovakav portfelj se zove eng. *hedging portfolio*. Dakle ovo je minimalna cijena opcije koja je potrebna piscu da ne bude na gubitku.

[10] Zapravo je u trenutku $t = 0$ kupio portfelj ϕ i razliku $q - C_0$ uložio u banku.

[11] eng. *long position in the stock*, za razliku od dugovanja dionica (eng. *short position in the stock*)

gdje je

$$p^* = \frac{1}{s_g - s_d}((1+r)S_0 - s_d)\,. \tag{1.3}$$

Primijetimo da ne vrijedi uvijek $p^* \in (0,1)$. Preciznije,

$$p^* \in (0,1) \text{ ako i samo ako je } s_d < (1+r)S_0 < s_g\,. \tag{1.4}$$

Gornji postupak je dosta općenit, tj. ako je $H : \Omega \to [0,\infty)$ slučajna varijabla (*slučajni zahtjev*) s vrijednostima $H(\omega_d) = h_d$ i $H(\omega_g) = h_g$, onda je njezina cijena dana s

$$H_0 = \frac{1}{1+r}(p^* h_g + (1-p^*)h_d)\,.$$

1.3 Vjerojatnosna mjera neutralna na rizik

Pretpostavimo da je $s_d < (1+r)S_0 < s_g$ tako da vrijedi $p^* \in (0,1)$. Tada (1.3) možemo napisati na sljedeći način

$$(1+r)S_0 = (1-p^*)s_d + p^* s_g\,. \tag{1.5}$$

Lijeva strana prethodne jednakosti je jednaka vrijednosti u trenutku $t = 1$ početne cijene dionice S_0 uložene u banku u trenutku $t = 0$, a desna strana je očekivana cijena dionice, ako je vjerojatnost da cijena dionice bude veća jednaka p^*, a u drugom slučaju $1 - p^*$.

Time se može reći da je ovakav model 'neutralan na rizik': sasvim je svejedno da li ulažemo u rizičnu ili nerizičnu imovimu, budući da je očekivana vrijednost oba ulaganja u trenutku $t = 1$ jednaka.

U ovom slučaju možemo definirati vjerojatnost[12] $\mathbb{P}^*$ na skupu $\Omega = \{\omega_d, \omega_g\}$ s

$$\mathbb{P}^*(\{\omega_g\}) = p^* = 1 - \mathbb{P}^*(\{\omega_d\})\,.$$

Tada slučajna varijabla S_1 ima distribuciju

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} s_d & s_g \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$(1+r)S_0 = \mathbb{E}^* S_1\,.$$

Time smo dobili vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$, koja opisuje 'stanje svijeta' u kojem je investitor neutralan u odnosu na rizik koji nosi promjena cijene dionice. Zbog toga $\mathbb{P}^*$ zovemo *vjerojatnosna mjera neutralna na rizik*.

[12] Ova vjerojatnost općenito ne mora biti realna vjerojatnost pojavljivanja pojedinog 'stanja svijeta'.

Za call opciju vrijedi (v. (1.2))

$$C_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{(S_1 - K)^+}{1+r} \right] .$$

Drugim riječima, cijena call opcije je očekivana diskontirana vrijednost (sadašnja vrijednost!) njezine vrijednosti u trenutku $t+1$ u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik.

Općenito, ako promotrimo slučajnu varijablu (*slučajni zahtjev*[13]) $H_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, onda je njezina cijena u trenutku $t = 0$ dana s

$$H_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{H_1}{1+r} \right] .$$

Put opcija se može promatrati kao *slučajni zahtjev* (tj. slučajnu varijablu) $P_1 = (S_1 - K)^+$ pa joj je cijena dana s

$$P_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{(K - S_1)^+}{1+r} \right] = \frac{1}{1+r} (p^*(K - s_g)^+ + (1-p^*)(K - s_d)^+) .$$

Zbog $S_1 - K = (S_1 - K)^+ - (K - S_1)^+$ i (1.5) dobijemo *put-call paritet*[14]:

$$S_0 - \frac{K}{1+r} = \mathbb{E} \left[\frac{S_1 - K}{1+r} \right] = C_0 - P_0 .$$

1.4 Arbitraža

Jedan od zahtjeva na naš model financijskog tržišta jest isključiti mogućnost bezrizičnog profita.[15] Ako takva mogućnost postoji, onda će svi investitori pokušati to iskoristiti što čini model 'nestabilnim'.

Kažemo da je portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ *arbitraža* ako vrijedi

$$V_0^\phi = \phi^0 + \phi^1 S_0 = 0$$

i

$$V_1^\phi(\omega_d) = \phi^0(1+r) + \phi^1 s_d \geq 0 \quad \text{i} \quad V_1^\phi(\omega_g) = \phi^0(1+r) + \phi^1 s_g \geq 0 , \tag{1.6}$$

[13] eng. *contingent claim*

[14] eng. *put-call parity*

[15] Kao što smo već vidjeli, glavni razlog ulaganja u rizičnu imovinu jest mogućnost većeg dobitka(prinosa) nego ulaganje u nerizičnu imovinu. Postojanje bezrizičnog profita čini model nerealističnim.

gdje je barem jedna od nejednakosti u (1.6) stroga.

Drugim riječima, arbitraža je investicija (protfelj) koji u trenutku $t = 0$ vrijedi 0 kn, ali je u trenutku $t = 1$ sigurno nenegativne vrijednosti i postoji mogućnost (pozitivna vjerojatnost) da vrijedi više od 0 kn, što ju čini nerizičnom. Formalno, ako je $\mathbb{P}$ realna vjerojatnosna mjera na Ω, onda je portfelj ϕ arbitraža ako vrijedi

$$V_0^\phi = 0, \quad V_1^\phi \geq 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(V_1^\phi > 0) > 0\,.$$

Teorem 1.1 Mogućnost arbitraže u jednostavnom modelu ne postoji ako i samo ako je

$$s_d < (1+r)S_0 < s_g\,. \tag{1.7}$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da (1.7) ne vrijedi, tj. $(1+r)S_0 \geq s_g$ ili $(1+r)S_0 \leq s_d$.

Ako je $(1+r)S_0 \geq s_g > s_d$, onda je portfelj $\phi = (1, -\frac{1}{S_0})$ arbitraža[16]. Zaista, $V_0^\phi = 1 + (-\frac{1}{S_0})S_0 = 0$ i

$$V_1^\phi(\omega_d) = (1+r) - \frac{s_d}{S_0} > \frac{s_d}{S_0} - \frac{s_d}{S_0} = 0$$

i

$$V_1^\phi(\omega_g) = (1+r) - \frac{s_g}{S_0} \geq \frac{s_g}{S_0} - \frac{s_g}{S_0} = 0\,.$$

U slučaju $s_g > s_d \geq (1+r)S_0$ je portfelj $\phi = (-1, \frac{1}{S_0})$ arbitraža[17], jer je $V_0^\phi = -1 + \frac{1}{S_0}S_0 = 0$ te vrijedi

$$V_1^\phi(\omega_g) = -(1+r) + \frac{s_g}{S_0} > -\frac{s_g}{S_0} + \frac{s_g}{S_0} = 0$$

i

$$V_1^\phi(\omega_d) = -(1+r) + \frac{s_d}{S_0} \geq -\frac{s_d}{S_0} + \frac{s_d}{S_0} = 0\,.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ arbitraža. Tada je $\phi^0 = -\phi^1 S_0 \neq 0$ (inače bi vrijedilo $V_1^\phi = 0$ pa portfelj ϕ ne bi bio arbitraža), odakle slijedi

$$0 \leq V_1^\phi(\omega_d) = \phi^1(-(1+r)S_0 + s_d) \quad \text{i} \quad 0 \leq V_1^\phi(\omega_g) = \phi^1(-(1+r)S_0 + s_g)\,.$$

Odavde slijedi da su izrazi

$$-(1+r)S_0 + s_d \quad \text{i} \quad -(1+r)S_0 + s_g$$

[16] Primijetimo da ovdje u trenutku $t = 0$ napravimo short sell dionice i iznos $\frac{1}{S_0}S_0 + 1 = 2$ stavimo u banku.

[17] Primijetimo da smo ovdje posudili iznos 1 iz banke da bismo kupili $\frac{1}{S_0}$ dionica. U trenutku $t = 1$ možemo prodati dionice i vratiti banci posuđeni novac.

istog predznaka (kao i ϕ^1) pa je

$$(1+r)S_0 \geq s_d > s_g \quad \text{ili} \quad s_d < s_g \leq (1+r)S_0\,,$$

što je i trebalo dokazati. □

Usporedimo li Teorem 1.1 s (1.4), vidimo model ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji vjerojatnosna mjera[18] $\mathbb{P}^*$ na Ω takva da je

$$\mathbb{P}(\{\omega_g\}) = p^* > 0 \quad \text{i}\ \mathbb{P}(\{\omega_d\}) = 1 - p^* > 0\,.$$

Može se promatrati i tržište na kojem, osim dionice, kao rizičnu imovinu imamo i izvedenice kao što su call i put opcija. U ovom slučaju je portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3) \in \mathbb{R}^4$, gdje su ϕ^2 i ϕ^3 količina put i call opcija. Vrijednost portfelja je definirana s

$$V_t^\phi = \phi \cdot ((1+r)^t, S_t, P_t, C_t), \quad t = 0, 1\,.$$

Arbitraža se definira analogno.

Zadatak 1.2 Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Dokažite put-call paritet

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}\,.$$

Rješenje. Formulu ćemo dokazati tako da pretpostavimo da ne vrijedi i pronađemo arbitražu. Ako je

$$\frac{K}{1+r} > P_0 - C_0 + S_0\,,$$

onda je $\alpha := \frac{K}{1+r} - (P_0 - C_0 + S_0) > 0$. Posudimo u ovom slučaju $\frac{K}{1+r} - \alpha$ u banci i kupimo kupimo 1 put opciju, 1 dionicu, a prodamo 1 call opciju (short sell) . Dakle, u portfelju imamo $-(\frac{K}{1+\alpha} - \alpha)$ kn, 1 dionicu, 1 put opciju i 'kratki' smo za jednu call opciju. Vrijednost ovog portfelja u trenutku $t = 0$ je

$$V_0 = -\left(\frac{K}{1+r} - \alpha\right) + S_0 + P_0 - C_0 = 0\,.$$

U trenutku $t = 1$ je vrijednost (koristimo formulu $P_1 - C_1 = (K - S_1)^+ - (S_1 - K)^+ = K - S_1$)

$$\begin{aligned} V_1 &= -(1+r)\left(\frac{K}{1+r} - \alpha\right) + S_1 + P_1 - C_1 \\ &= -K + (1+r)\alpha + S_1 + (K - S_1) = (1+r)\alpha > 0 \end{aligned}$$

[18]Ovakvu mjeru ćemo zvati *ekvivalentna martingalna mjera*, gdje ekvivalentnost u ovom jednostavnom modelu znači da je vjerojatnost svih elementarnih događaja strogo pozitivna. Osim toga, vidimo da vrijedi $\mathbb{E}^*[\frac{S_1}{1+r}] = \frac{s_d}{1+r}(1-p^*) + \frac{s_g}{1+r}p^* = S_0 = \frac{S_0}{(1+r)^0}$, što znači da je slučajni proces $\{\frac{S_t}{(1+r)^t} : t = 0, 1\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal uz filtraciju $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ gdje je $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \{\emptyset, \{\omega_d\}, \{\omega_g\}, \Omega\}$.

pa je konstruirani portfelj arbitraža, jer ćemo na ovaj način uvijek ostvariti profit od $(1+r)\alpha > 0$.

U slučaju

$$\frac{K}{1+r} < P_0 - C_0 + S_0$$

definiramo $\beta := P_0 - C_0 + S_0 - \frac{K}{1+r} > 0$. Prodamo 1 put opciju i 1 dionicu (short sell), kupimo 1 call opciju i iznos $P_0 - C_0 + S_0 = \beta + \frac{K}{1+r}$ stavimo u banku. Time smo konstruirali portfelj čija je vrijednost u trenutku $t = 0$

$$V_0 = \left(\beta + \frac{K}{1+r}\right) - P_0 - S_0 + C_0 = 0\,,$$

a u trenutku $t = 1$

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+r)\left(\beta + \frac{K}{1+r}\right) - P_1 + C_1 - S_1 \\ &= (1+r)\beta + K - (K - S_1) - S_1 = (1+r)\beta > 0\,. \end{aligned}$$

Dakle, opet smo ostvarili bezrizični profit čime smo dobili arbitražu. $\diamond$

Zadatak 1.3 Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Dokažite da je cijena call opcije nerastuća funkcija cijene izvršenja.

Rješenje. Označimo s $C_0(K_1)$ cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K > 0$. Pretpostavimo da C nije nerastuća, tj. da postoje $0 < K_1 < K_2$ takvi da je $C_0(K_1) < C_0(K_2)$.

Neka je $\alpha := C_0(K_2) - C_0(K_1) > 0$. Konstruiramo portfelj na sljedeći način. Prodamo call opciju s cijenom izvršenja K_2 (short sell), kupimo call opciju s cijenom izvršenja K_1 te iznos α stavimo u banku. Vrijednost ovog portfelja u trenutku $t = 0$ je

$$V_0 = \alpha + C_0(K_1) - C_0(K_2) = 0\,.$$

U trenutku $t = 1$ imamo

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+r)\alpha + C_1(K_1) - C_1(K_2) \\ &= (1+r)\alpha + (S_1 - K_1)^+ - (S_1 - K_2)^+ \geq (1+r)\alpha > 0\,, \end{aligned}$$

jer iz $S_1 - K_1 \geq S_1 - K_2$ slijedi ($x \mapsto x^+$ je neopadajuća funkcija!) $(S_1 - K_1)^+ \geq (S_1 - K_2)^+$. Dakle, konstruirani portfelj je arbitraža čime smo došli do kontradikcije. $\diamond$

1.5 Stopa povrata i rizik

I dalje promatramo jednostavni model u kojem 'stanja svijeta' modeliramo pomoću skupa $\Omega = \{\omega_d, \omega_g\}$ i vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ takve da je

$$\mathbb{P}(\{\omega_g\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{\omega_d\}),$$

gdje je $p \in (0,1)$.

Stopa povrata dionice je u ovom jednostavnom modelu dana s

$$R(S_1) = \frac{S_1 - S_0}{S_0}.$$

Označimo

$$m(S_1) := \mathbb{E}[R(S_1)] = \frac{ps_g + (1-p)s_d}{S_0} - 1.$$

Rizik dionice tada mjerimo pomoću varijance slučajne varijable $R(S_1)$, tj. definiramo

$$v(S_1)^2 = \mathrm{Var} R(S_1).$$

Računamo,

$$\begin{aligned} v(S_1)^2 &= p\left(\frac{s_g - S_0}{S_0} - m(S_1)\right)^2 + (1-p)\left(\frac{s_d - S_0}{S_0} - m(S_1)\right)^2 \\ &= p\left(\frac{(1-p)(s_g - s_d)}{S_0}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{p(s_g - s_d)}{S_0}\right)^2 \\ &= p(1-p)\left(\frac{s_g - s_d}{S_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Standardnu devijaciju $v(S_1) := \sqrt{v(S_1)^2}$ zovemo *volatilnost* dionice[19]. Vrijedi

$$v(S_1) = \frac{s_g - s_d}{S_0}\sqrt{p(1-p)}.$$

Volatilnost mjeri fluktuaciju cijena (rizičnost) dionice.

Promotrimo rizik vezan uz call opciju s cijenom izvršenja $K > 0$. Sjetimo se da je broj dionica u replicirajućem portfelju (*delta opcije*) dan s

$$\Delta = \frac{c_g - c_d}{s_g - s_d}.$$

[19]eng. *volatility of the stock(asset)*

Elastičnost opcije se definira s

$$\Omega = \frac{\frac{c_g - c_d}{C_0}}{\frac{s_g - s_d}{S_0}},$$

odakle je $\Omega = \frac{S_0}{C_0}\Delta$. Elastičnost Ω predstavlja 'osjetljivost' promjene cijene opcije na promjenu cijene dionice.

Kao i prije, dobijemo sljedeće formule za očekivani povrat i volatilnost opcije:

$$\begin{aligned} m(C_1) &= \frac{pc_g + (1-p)c_d}{C_0} - 1 \\ v(C_1) &= \sqrt{p(1-p)}\frac{c_g - c_d}{C_0}. \end{aligned}$$

Posebno je $v(C_1) = \Omega v(S_1)$, tj. rizik call opcije je jednak produktu elastičnosti i volatilnosti dionice na koju uzimamo opciju. Drugim riječima, što je veća volatilnost dionice, to je veći rizik call opcije.

Propozicija 1.4 Volatilnost opcije nije manja od volatilnosti dionice, tj.

$$v(C_1) \geq v(S_1).$$

Također vrijedi[20]

$$m(C_1) - r \geq m(S_1) - r.$$

Dokaz. Da bismo pokazali prvu tvrdnju, zbog $v(C_1) = \Omega v(S_1)$ je dovoljno je pokazati da je $\Omega \geq 1$. Iz (1.2) i (1.3) slijedi da je

$$C_0 = \frac{\pi c_g + (1-\pi)c_d}{1+r}, \qquad \pi = \frac{(1+r)S_0 - s_d}{s_g - s_d}.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} (1+r)(S_0(c_g - c_d) - C_0(s_g - s_d)) &= s_d c_g - s_g c_d \\ &= s_d(s_g - K)^+ - s_g(s_d - K)^+ \geq 0, \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi promatranjem svih slučajeva:

$$s_d(s_g - K)^+ - s_g(s_d - K)^+ = \begin{cases} 0, & s_d < s_g \leq K \\ s_d(s_g - K), & s_d \leq K \leq s_g \\ s_d(s_g - K) - s_g(s_d - K) = 0, & s_g > s_d \geq K. \end{cases}$$

Stoga vrijedi

$$0 \leq (1+r)C_0(s_g - s_d)(\Omega - 1)$$

[20]Ova relacija kaže da se isplati kupiti opciju, jer ima veću stopu povrata nego odgovarajuća dionica.

pa je $\Omega \geq 1$.

Da bismo pokazali drugu tvrdnju, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$m(C_1) - r = \Omega(m(S_1) - \omega).$$

Sjetimo se da za replicirajući portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1) = (\frac{c_d s_g - c_g s_d}{(1+r)(s_g - s_d)}, \frac{c_g - c_d}{s_g - s_d})$ call opcije vrijedi $\phi^1 = \Delta$,

$$\phi^0(1+r) + \phi^1 S_1 = C_1$$

i $C_0 = \phi^0 + \phi^1 S_0$, odakle dobijemo

$$S_1\Delta - C_1 = -(1+r)\phi^0 = (1+r)(S_0\Delta - C_0).$$

Zato je

$$\mathbb{E}[S_1\Delta - C_1] = (1+r)(S_0\Delta - C_0),$$

tj. drugačije zapisano

$$r(S_0\Delta - C_0) = \mathbb{E}[(S_1 - S_0)\Delta] - \mathbb{E}[C_1 - C_0] = \Delta S_0 m(S_1) - C_0 m(C_1).$$

Dakle,

$$m(C_1) - r = \frac{S_0}{C_0}\Delta(m(S_1) - r).$$

$\square$