MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

2. kolokvij - 1. veljače 2016.

(Knjige, bilježnice i dodatni papiri **nisu** dozvoljeni! Kalkulatori su dozvoljeni.)

1. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $-1 < a < b$ (relativne promjene cijena dionice), $r$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T$. Neka je cijena dionice u trenutku $t$ jednaka $S_t$, $0 \leq t \leq T$.

(a) (5 bodova) Neka je $\hat{\mathbb{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da je slučajni proces $\{\tilde{S}_t : 0 \leq t \leq T\}$ $\hat{\mathbb{P}}$-martingal.

(a1) Izračunajte $\hat{\mathbb{E}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$.

(a2) Dokažite da su $X_1, \ldots, X_T$ jednako distribuirane u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$ te odredite tu distribuciju.

(a3) Dokažite da su $X_1, \ldots, X_T$ nezavisne u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$.

(b) (3 boda) Pretpostavimo da vrijedi $a < r < b$. Promotrimo ugovor po kojem se kupac ugovora u trenutku $T$ obvezuje na kupnju dionice po početnoj cijeni $S_0$. Odredite cijenu ovakvog ugovora.

(c) Neka su parametri u Cox-Ross-Rubinsteinov modelu zadani s $a = -0.1$, $b = 0.2$ i $r = 0.125$. Pretpostavimo da je vremenski horizont $T = 3$ i početna cijena dionice $S_0 = 100$. Promatramo up-and-out put opciju s cijenom izvršenja $K = 120$ i barijerom $B = 105$.

(c1) (3 boda) Odredite cijenu opcije.

(c2) (2 boda) Odredite replicirajući portfelj u slučaju da je cijena dionice samo padala.

**Rješenje:**

(a1) Za $1 \leq t \leq T$ vrijedi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{E}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= \hat{\mathbb{E}}[\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{S_{t-1}}(1+r)^t\hat{\mathbb{E}}[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}] - 1 \\ &= \frac{1+r}{\tilde{S}_{t-1}}\tilde{S}_{t-1} - 1 = 1 + r - 1 = r.\end{aligned}$$

(a2) Iz (a1) slijedi

$$\begin{aligned}r &= \hat{\mathbb{E}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \hat{\mathbb{E}}[X_t(1_{\{X_t=a\}} + 1_{\{X_t=b\}})|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= a\hat{\mathbb{P}}(X_t = a|\mathcal{F}_{t-1}) + b\hat{\mathbb{P}}(X_t = b|\mathcal{F}_{t-1})\end{aligned}$$

pa, zbog $\hat{\mathbb{P}}(X_t = a|\mathcal{F}_{t-1}) + \hat{\mathbb{P}}(X_t = b|\mathcal{F}_{t-1}) = 1$, dobijemo

$$\hat{\mathbb{P}}(X_t = a|\mathcal{F}_{t-1}) = \frac{b-r}{b-a}, \quad \hat{\mathbb{P}}(X_t = b|\mathcal{F}_{t-1}) = \frac{r-a}{b-a}.$$

Odavde slijedi

$$\hat{\mathbb{P}}(X_t = b) = \hat{\mathbb{E}}[\hat{\mathbb{P}}(X_t = b|\mathcal{F}_{t-1})] = \hat{p} := \frac{r-a}{b-a} \quad \text{i} \quad \hat{\mathbb{P}}(X_t = a) = 1 - \hat{p}$$

pa su $X_1, , X_T$ jednako distribuirane u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$.

(a3) Neka je $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Koristeći

$$\hat{\mathbb{P}}(X_t = a|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 - \hat{p}, \quad \hat{\mathbb{P}}(X_t = b|\mathcal{F}_{t-1}) = \hat{p},$$

(što je dobiveno u (a2)), slijedi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}(\{X_t = a\} \cap A) &= \hat{\mathbb{E}}[\hat{\mathbb{E}}[1_{\{X_t=a\}} 1_A|\mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbb{E}}[1_A \hat{\mathbb{P}}(X_t = a|\mathcal{F}_{t-1})] \\ &= (1-\hat{p})\hat{\mathbb{P}}(A) = \hat{\mathbb{P}}(X_t = a)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

i analogno

$$\hat{\mathbb{P}}(\{X_t = b\}) \cap A) = \hat{\mathbb{P}}(X_t = b)\mathbb{P}(A).$$

Dakle, $X_t$ je nezavisna od $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(X_t, \ldots, X_{t-1})$ tj. $X_t$ je nezavisna od $X_1, \ldots, X_{t-1}$ za sve $1 \leq t \leq T$ pa su $X_1, \ldots, X_T$ nezavisne u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$.

(c) Budući da je $a < r < b$, postoji jedinstvena ekvivalentna maertingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Radi se o određivanju cijene slučajnog zahtjeva $C = S_T - S_0$. Njegova cijena je

$$C_0 := \mathbb{E}^*[\frac{C}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^*[\tilde{S}_T|\mathcal{F}_0] - \frac{S_0}{(1+r)^T} = \tilde{S}_0 - \frac{S_0}{(1+r)^T} = S_0(1-(1+r)^{-T})$$

(d) Promatramo slučajni zahtjev $C_T = 1_{\{M<B\}}(K - S_T)^+$, gdje su $B = 105$ i $K = 120$. Primijetimo da je $p = \frac{r-a}{b-a} = 0.75$ pa cijenu opcije u svakon čvoru (v. Sliku 1) računamo po formuli za jedan period:

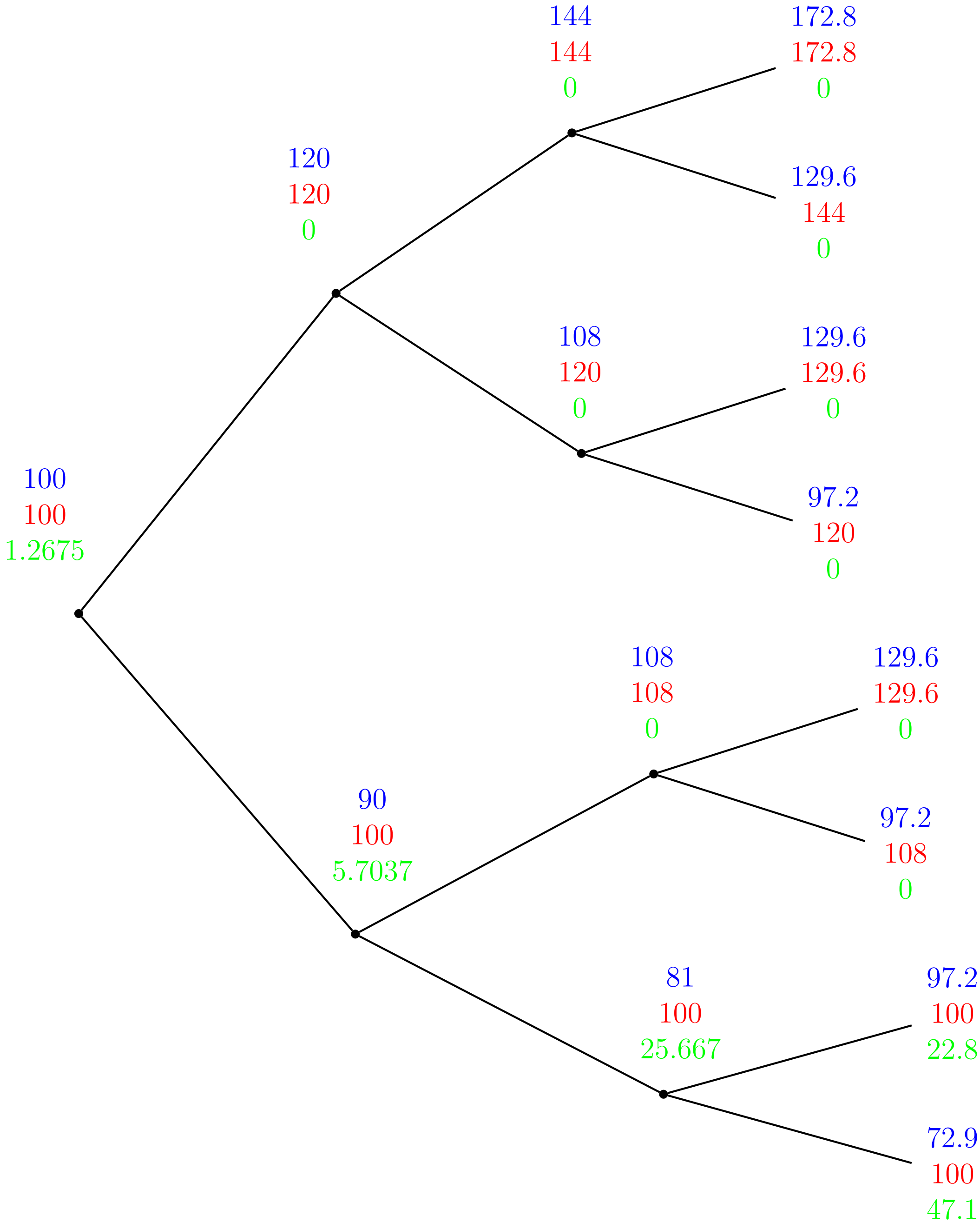
$$C_t = \frac{1}{1+r}\left[C_{t+1}^{\uparrow} p + C_{t+1}^{\downarrow}(1-p)\right].$$

Vrijednosti portfelja računamo pomoću formula

$$\phi_t^1 = \frac{C_t^{\uparrow} - C_t^{\downarrow}}{S_{t-1}(b-a)}, \phi_t^0 = (1+r)^{-(t-1)}(C_{t-1} - S_{t-1}\phi_t^1).$$

(d1) Cijena opcije je $C_0 = 1.2675$.

(d2) Replicirajući portfelj je: $\phi_1 = (20.2775, -0.1901)$, $\phi_2 = (81.1194, -0.9506)$, $\phi_3 = (84.2799, -1)$




Slika 1: Legenda: $S_t$ vrijednost dionice, $M_t$ maksimum, $C_t$ vrijednost opcije

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ filtrirani vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ i $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

   (a) (3 boda) Neka je $Z = \{Z_t : 0 \leq t \leq T\}$ adaptiran slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Definirajte optimalno vrijeme zaustavljanja za slučajni proces $Z$.

   (b) (3 boda) Dokažite da je $\tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$ optimalno vrijeme zaustavljanja, gdje je $U = \{U_t : 0 \leq t \leq T\}$ Snellov omotač slučajnog procesa $Z$.

   (c) (3 boda) Iskažite teorem o karakterizaciji optimalnih vremena zaustavljanja.

   (d) (4 boda) Dokažite teorem iz (c).

**Rješenje:**

(a) Vrijeme zaustavljanja $\tau$ je optimalno za slučajni proces $Z$ ako vrijedi

$$\mathbb{E}Z_\tau = \sup_\sigma \mathbb{E}Z_\sigma$$

gdje se supremum uzima po svim vremenima zaustavljanja $\sigma$ ograničenim s $T$.

(b) Budući da je $U^{\tau_0}$ martingal (zbog $\mathbb{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[1_{t+1 \leq \tau_0}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t])|\mathcal{F}_t] = 0$, jer je $U_{t+1} > Z_t$ na $t + 1 \leq \tau_0$), slijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbb{E}[U_{\tau_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\tau_0}] = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}]\,.$$

Neka je $\sigma$ proizvoljno vrijeme zaustavljanja takvo da je $0 \leq \sigma \leq T$. Tada je $U^\sigma$ supermartingal pa je

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U^\sigma_T|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\sigma] \geq \mathbb{E}[Z_\sigma]\,.$$

Dakle,

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma]\,.$$

(c) Neka je $U$ Snellov omotač procesa $Z$. Vrijeme zaustavljanja $\tau$ je optimalno ako i samo ako vrijedi:

$$Z_\tau = U_\tau \quad \text{i} \quad U^\tau \text{ je martingal.}$$

(d) Pretpostavimo da je $\tau$ optimalno vrijeme zaustavljanja. Iz dijela (b) znamo da vrijedi

$$U_0 = \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma] = \mathbb{E}[Z_\tau] \leq \mathbb{E}[U_\tau] \leq U_0,$$

odakle dobijemo $\mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[U_\tau]$, a budući je $U_\tau \geq Z_\tau$, slijedi da je $U_\tau = Z_\tau$. S druge strane, budući je $U^\tau$ supermartingal, za $0 \leq t \leq T$ slijedi da je

$$\mathbb{E}[U_\tau] = U_0 \geq \mathbb{E}[U^\tau_t] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[U^\tau_T|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[U^\tau_T] = \mathbb{E}[U_\tau],$$

, odakle, zbog $U_t^\tau \geq \mathbb{E}[U_T^\tau|\mathcal{F}_t]$, slijedi

$$U_t^T = \mathbb{E}[U_T^\tau|\mathcal{F}_t]$$

pa je $U^\tau$ martingal. Obratno, ako je $Z_\tau = U_\tau$ i $U^\tau$ martingal, onda vrijedi

$$\sup_{0\leq\sigma\leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma] = U_0 = \mathbb{E}[U_T^\tau] = E[U_\tau] = \mathbb{E}[Z_\tau]$$

pa je $\tau$ optimalno vrijeme zaustavljanja.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

3.

(a) (2 boda) Definirajte američku call opciju i američku put opciju.

(b) (3 boda) Matematički dokažite da na potpunom tržištu američka call-opcija vrijedi jednako kao i europska call-opcija.

(c) (4 boda) Nalazimo se u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. Vrijednost $P_t$ američke put opcije dana je formulom $P_t = p_{\mathrm{am}}(t, S_t)$ za neku funkciju $p_{\mathrm{am}} : \{0, 1 \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Napišite formulu za funkciju $p_{\mathrm{am}}$.

(d) (5 bodova) Dokažite formulu iz (c).

**Rješenje:**

(a) *Američka call opcija* s dospijećem $T$ i cijenom izvršenja $K$ je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni $K$ u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća $T$. Alternativno, američka call opcija je američki slučajni zahtjev $Z_t = (S_t - K)^+$.

*Američka put opcija* s dospijećem $T$ i cijenom izvršenja $K$ je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni $K$ u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća $T$. Alternativno, američka put opcija je američki slučajni zahtjev $Z_t = (K - S_t)^+$.

(b) Unutarnja vrijednost američke i vrijednost europske call-opcije s cijenom izvršenja $K$ u trenutku $0 \leq t \leq T$ dane su, redom, s

$$\begin{aligned} Z_t &= (S_t - K)^+ \\ C_t &= (1+r)^{t-T} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

a vrijednost američke call opcije je

$$U_T = Z_T, U_{t-1} = \max\{Z_t, S_t^0 \mathbb{E}^*[\frac{U_{t+1}}{S_{t+1}^0} | \mathcal{F}_t]\}, 0 \leq t \leq T-1.$$

Budući da je $\tilde{U}$ $\mathbb{P}^*$-supermartingal, dobijemo

$$\tilde{U}_t \geq \mathbb{E}^*[\tilde{U}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_t] = \tilde{C}_t\,,$$

odakle slijedi da je $U_t \geq C_t$ za sve $0 \leq t \leq T$.

Dokažimo još i obrnutu nejednakost. Krenimo od

$$\begin{aligned} C_t &\geq (1+r)^t \mathbb{E}^* \left[ \frac{S_T}{(1+r)^T} - \frac{K}{(1+r)^T} | \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^t \frac{S_t}{(1+r)^t} - (1+r)^{t-T} K \\ &\geq S_t - K, \end{aligned}$$

jer je $\left\{\frac{S_t}{(1+r)^t} : 0 \le t \le T\right\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Zbog $C_t \ge 0$, $0 \le t \le T$, dobijemo

$$C_t \ge (S_t - K)^+ = Z_t, \quad 0 \le t \le T.$$

Specijalno je

$$\tilde{C}_t \ge \tilde{Z}_t, 0 \le t \le T$$

pa je $\tilde{C}$ $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira $\tilde{Z}$, a budući da je $\tilde{U}$ najmanji takav, slijedi da je $\tilde{C}_t \ge \tilde{U}_t$, $0 \le t \le T$, čime smo dokazali traženu obrnutu nejednakost.

(c) Funkcija $p_{\,\mathrm{am}}$ je dana formulom

$$\begin{aligned} p_{\,\mathrm{am}}(T,x) &= (K-x)^+\,, \\ p_{\,\mathrm{am}}(t,x) &= \max\left\{(K-x)^+, \frac{f(t+1,x)}{1+r}\right\}\,, \quad 0 \le t < T\,, \end{aligned}$$

gdje je $p^* = \frac{r-a}{b-a}$, a $f : \{0,1,\dots,T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija definirana formulom

$$f(t,x) := (1-p^*)p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+a)) + p^* p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+b))\,.$$

(d) U CRR modelu je $S = \{S_t : 0 \le t \le T\}$ Markovljev lanac s matricom prijelaza $Q$ danom s

$$Q(x, x(1+a)) = 1 - p^*, \quad Q(x, x(1+b)) = p^*, \quad p^* = \frac{r-a}{b-a}\,.$$

Vrijednost američke put opcije je dana s

$$U_t = p_{\,\mathrm{am}}(t, S_t),$$

gdje je $\{(1+r)^{-t}U_t : 0 \le t \le T\}$ Snellov omotač sl. procesa $Z = \{Z_t : 0 \le t \le T\}$, $Z_t = (1+r)^{-t}(K - S_t)^+$, tj.

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max\{Z_t, (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}, \quad 0 \le t \le T-1\,, \end{aligned}$$

a, budući da je $S$ Markovljev lanac, slijedi da je $(1+r)^{-t}U_t = u(t, S_t)$, $0 \le t \le T$, gdje je

$$\begin{aligned} u(T,x) &= (1+r)^{-T}(K-x)^+, \\ u(t,x) &= \max\{(1+r)^{-t}(K-x)^+, Qu(t+1,x)\}, \quad 0 \le t \le T-1\,. \end{aligned}$$

Dakle, $p_{\,\mathrm{am}}(t,x) = (1+r)^t u(t,x)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} p_{\,\mathrm{am}}(T,x) &= (K-x)^+, \\ p_{\,\mathrm{am}}(t,x) &= \max\{(K-x)^+, (1+r)^t Qu(t+1,x)\}, \quad 0 \le t \le T-1\,. \end{aligned}$$

Još je preostalo izračunati

$$\begin{aligned} Qu(t+1,x) &= Q(x, x(1+a))u(1+t, x(1+a)) + Q(x, x(1+b))u(t+1, x(1+b)) \\ &= (1-p^*)u(t+1, x(1+a)) + p^* u(t+1, x(1+b)) \\ &= (1+r)^{-t-1}\left[(1-p^*)p_{\,\mathrm{am}}(t+1, x(1+a)) + p^* p_{\,\mathrm{am}}(t+1, x(1+b))\right] \\ &= (1+r)^{-t-1} f(t+1, x), \end{aligned}$$

odakle slijedi formula iz (c).

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.4$ (relativne promjene cijena dionice), te $r = 0.01$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu). Početna cijena dionice je $S_0 = 500.00$ Kn. Promatramo američku put opciju $Z_t = (K - S_t)^+$ s danom dospijeća $T = 3$ i cijenom izvršenja $K = 450.00$ Kn.

(a) (4 bodova) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost američke put opcije.

(b) (3 boda) Nađite trenutak u kojem je optimalno iskoristiti danu američku put opciju. Objasnite!

(c) (3 boda) Cijena dionice raste samo u zadnjem periodu. Kupac opcije odlučio je opciju iskoristiti u trenutku $T = 3$. Izračunajte profit pisca opcije ako slijedi hedging portfelj.

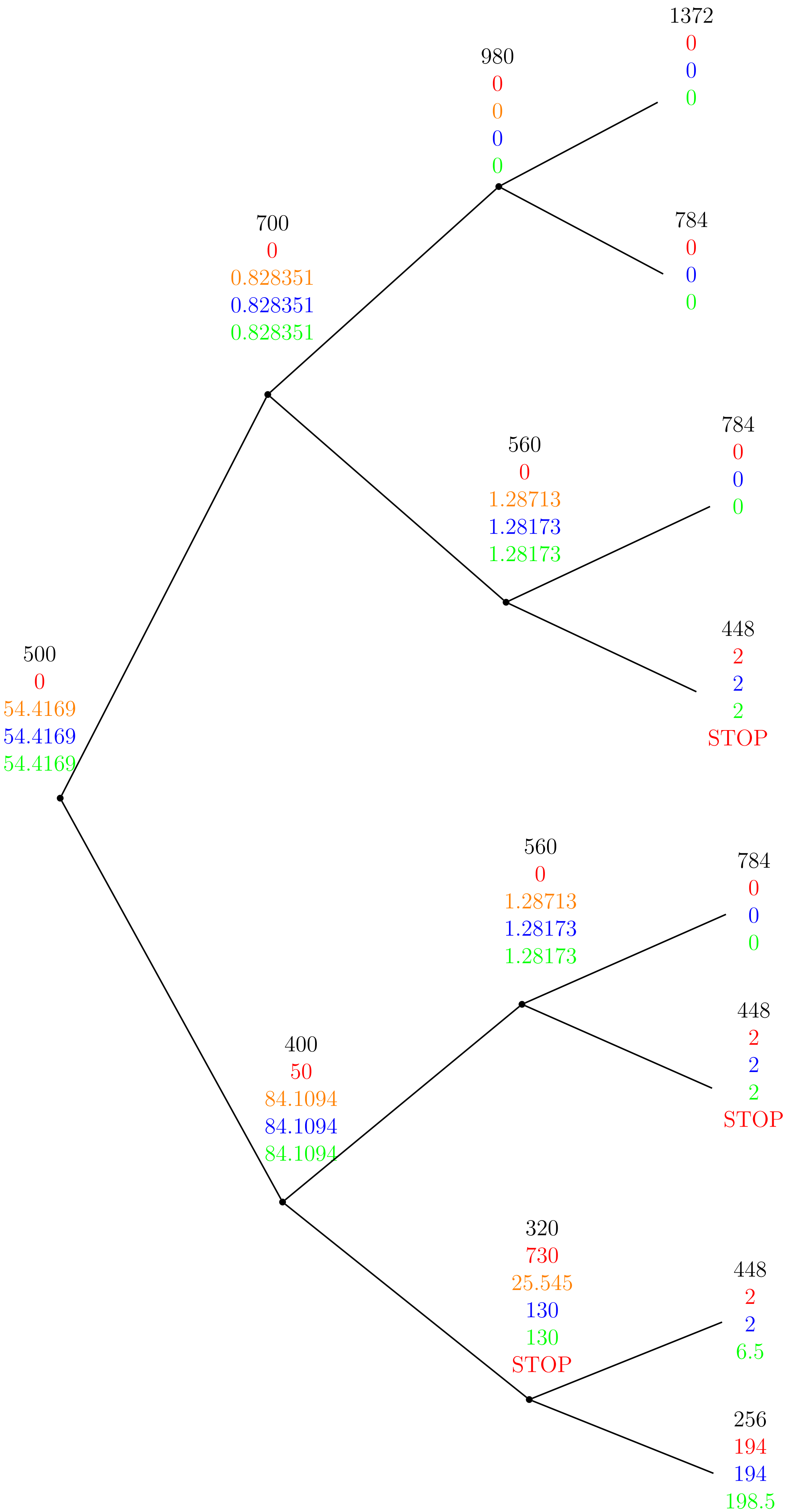
**Rješenje:**

(a) Pogledajte sliku na sljedećoj stranici.

(b) Tražimo vrijeme $\tau$ takvo da je $Z_\tau = U_\tau$ te da je $U^\tau$ martingal (tj. $U^\tau = M^\tau$) (v. sliku na sljedećoj stranici). Alternativno, u ovom slučaju se radi o $\tau = \tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$, što jest optimalno vrijeme zaustavljanja.

(c) Vrijednost opcije u traženom čvoru je 2, dok je vrijednost hedging portfelja 6.5 pa je profit pisca opcije jednak $6.5 - 2 = 4.5$.

Legenda: $S_t$ vrijednost dionice, $Z_t = (K - S_t)^+$ unutarnja vrijednost opcije, $\frac{1}{1+r}f(t+1, S_t) = \frac{p^* U^{\uparrow}_{t+1} + (1-p^*)U^{\downarrow}_{t+1}}{1+r}$, $U_t = \max\{Z_t, \frac{1}{1+r}f(t+1, S_t)\}$ vrijednost opcije, $M_t$ vrijednost portfelja, STOP optimalno vrijeme zaustavljanja


1372
0
0
0
980
0
0
0
0
784
0
0
0
700
0
0.828351
0.828351
0.828351
784
0
0
0
560
0
1.28713
1.28173
1.28173
448
2
2
2
STOP
500
0
54.4169
54.4169
54.4169
560
0
1.28713
1.28173
1.28173
784
0
0
0
448
2
2
2
STOP
400
50
84.1094
84.1094
84.1094
320
730
25.545
130
130
STOP
448
2
2
6.5
256
194
194
198.5