MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

1. kolokvij - 23. studenog 2015.

(Knjige, bilježnice i dodatni papiri **nisu** dozvoljeni! Kalkulatori su dozvoljeni.)

1. Promotrimo jednoperiodni model financijskog tržista s jednom nerizičnom i d rizičnih imovina ($d \geq 1$) definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo da model ne dopušta arbitražu. Neka je C slučajni zahtjev na tom tržistu.

(a) (1 bod) Definirajte nearbitražnu cijenu slučajnog zahtjeva C.

(b) (1 boda) Definirajte dostižni slučajni zahtjev.

(c) (2 boda) Neka je C dostižni slučajni zahtjev. Dokažite da za bilo koja dva replicirajuća portfelja ϕ i ψ za C vrijedi $V_0(\phi) = V_0(\psi)$.

(d) (2 boda) Pretpostavimo da skup nearbitražnih cijena $\Pi(C)$ slučajnog zahtjeva C nije jednočlan. Može li C biti dostižan? Vaše tvrdnje dokažite.

(e) (1 bod) Definirajte potpuni model.

(f) (3 boda) Pretpostavimo da je model potpun. Dokažite da je ekvivalentna martingalna mjera jedinstvena te da je broj elemenata skupa Ω najviše jednak $d + 1$.

Rješenje:

(a) Nearbitražna cijena slučajnog zahtjeva C je nenegativni broj $\pi^C \geq 0$ takav da je novi model tržišta proširen s

$$S_0^0, S_0^1, \ldots, S_0^d, \pi^c \qquad S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^d, C.$$

bez arbitraže.

(b) Slučajni zahtjev C je dostižan ako postoji portfelj $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$ takav da je

$$C = V_1(\phi) = \phi \cdot S_1 = \phi^0(1 + r) + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i .$$

(c) Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera (koja postoji po prvom fundamentalnom teoremu) i neka su ϕ, ψ replicirajući portfelji za C. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1 + r} \right] = \mathbb{E}^* \left[\frac{\phi \cdot S_1}{1 + r} \right] = \phi \cdot S_0 = V_0(\phi)$$

i slično se pokaže da je $\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = V_0(\psi)$, otkud $V_0(\phi) = V_0(\psi)$.

(d) Pretpostavimo da je C dostižan i neka je ϕ replicirajući portfelj za C. Za $\mathbb{P}^*, \mathbb{P}^{**} \in \mathcal{P}$ vrijedi

$$V_0(\phi) = \phi \cdot S_0 = \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r}\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right]$$

te se na isti način dobije

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^{**}\left[\frac{C}{1+r}\right],$$

odakle slijedi da je $\Pi(C)$ jednočlan. Stoga, ako $\Pi(C)$ nije jednočlan, onda C ne može biti dostižan.

(e) Model je potpun ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

(f) Slučajni zahtjev $1_{\{\omega\}}$ je dostižan za $\omega \in \Omega$ pa je po (d) (obrat po kontrapoziciji!) $\Pi(1_{\{\omega\}})$ jednočlan, odakle slijedi da je

$$\mathbb{P}_1^*(\{\omega\}) = (1+r)\mathbb{E}_1^*\left[\frac{1_{\{\omega\}}}{1+r}\right] = (1+r)\mathbb{E}_2^*\left[\frac{1_{\{\omega\}}}{1+r}\right] = \mathbb{P}_2^*(\{\omega\}), \quad \forall P_1^*, \mathbb{P}_2^* \in \mathcal{P}, \forall \omega \in \Omega.$$

Dakle, skup ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{P}$ je jednočlan, tj. ekvivalentna martingalna mjera je jedinstvena.

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Identificiramo li skup slučajnih varijabli na Ω s $\mathbb{R}^K$ (preko izomorfizma $X \mapsto (X(\omega_1), \dots, X(\omega_K))$, zbog potpunosti modela slijedi da je preslikavanje

$$R^{d+1} \ni \phi \mapsto V_1(\phi) = \phi \cdot S_1 \in \{X : X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ sl. var.}\} \cong \mathbb{R}^K$$

surjektivni linearni operator (epimorfizam). Dakle, treba vrijediti

$$d + 1 = \dim(\mathbb{R}^{d+1}) \geq \dim(\mathbb{R}^K) \geq K.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

2. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, te dvije financijske imovine. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu jednaka je $r = 0.05$, dok se rizična imovina modelira na sljedeći način:

$$S_0^1 = 100,\; S_1^1(\omega_1) = 70,\; S_1^1(\omega_2) = 120,\; S_1^1(\omega_3) = 150\,.$$

(a) (4 boda) Izračunajte skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{P}$.

(b) (2 boda) Dopušta li ovaj model tržišta arbitražu? Obrazložite.

(c) (2 boda) Je li ovaj model potpun? Obrazložite.

(d) Neka je $C = (S_1^1 - 90)^+$ call opcija na rizičnu imovinu s cijenom izvršenja $K = 90$.

(d1) (3 boda) Odredite sve nearbitražne cijene slučajnog zahtjeva C.

(d2) (2 boda) Je li slučajni zahtjev C dostižan? Obrazložite.

Rješenje:

(a) Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera te neka je $p_i^* = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$. Tada je $S_0^1 = \mathbb{E}^*[\tilde{S}_1^1]$. Zato vrijede sljedeće dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} 105 &= 70p_1^* + 120p_2^* + 150p_3^* \\ 1 &= p_1^* + p_2^* + p_3^*\,. \end{aligned}$$

Uvedemo li $\lambda := p_1^*$, onda iz gornjih jednadžbi slijedi $p_2^* = \frac{3}{2} - \frac{8}{3}\lambda$ i $p_3^* = -\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\lambda$. Iz $p_1^*, p_2^*, p_3^* \in (0, 1)$ slijedi

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \frac{3}{2} - \frac{8}{3}\lambda < 1 \quad 0 < -\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\lambda < 1\,.$$

Odavde dobivamo $\lambda \in (0, 1) \cap (\frac{3}{16}, \frac{9}{16}) \cap (\frac{3}{10}, \frac{9}{10}) = (\frac{3}{10}, \frac{9}{16})$. Dakle

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\lambda, \frac{3}{2} - \frac{8}{3}\lambda, -\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\lambda\right) : \frac{3}{10} < \lambda < \frac{9}{16} \right\}.$$

Alternativno,

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{5}\lambda, \frac{7}{10} - \frac{8}{5}\lambda, \lambda\right) : 0 < \lambda < \frac{7}{16} \right\} = \left\{ \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{8}\lambda, \lambda, \frac{7}{16} - \frac{5}{8}\lambda, \lambda\right) : 0 < \lambda < \frac{7}{10} \right\}.$$

(b) Budući da je skup ekvivalentnih martingalnih mjera neprazan, model tržišta ne dopušta arbitražu po prvom fundamentalnom teoremu.

(c) Budući da ekvivalentna martingalna mjera u ovom modelu nije jedinstvena, po drugom fundamentalnom teoremu ovaj model nije potpun.

(d1) Skup svih nearbitražnih cijena slučajnog zahtjeva C je dan s

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \right\}.$$

Zbog

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = \frac{30}{1.05} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3}\lambda \right) + \frac{60}{1.05} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\lambda \right) = \frac{15+20\lambda}{1.05}, \quad \lambda \in \left(\frac{3}{10}, \frac{9}{16} \right)$$

dobijemo $\Pi(C) = \langle 20, 25 \rangle$.

(d2) Ako bi C bio dostižan, onda bi skup $\Pi(C)$ bio jednočlan, što nije. Dakle, C nije dostižan.

3. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenucima trgovanja $0, 1, 2, \dots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Pretpostavimo da je kamatna stopa na tržistu jednaka $r > 0$ i označimo cijenu i-te imovine u trenutku $t = 0, 1, \dots, T$ sa S_t^i, $i = 0, 1, \dots, d$.

(a) (2 boda) Definirajte strategiju trgovanja (dinamički portfelj) te samofinancirajuću strategiju trgovanja.

(b) (3 boda) Definirajte dopustivu strategiju, arbitražu i tržište koje ne dopušta arbitražu.

(c) (2 boda) Definirajte ekvivalentnu martingalnu mjeru (mjeru neutralnu na rizik).

(d) (3 boda) Definirajte vrijednost $V_t(\phi)$ strategije trgovanja ϕ za $0 \leq t \leq T$. Dokažite da za samofinancirajuću strategiju ϕ vrijedi

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i \,, \quad 0 \leq t \leq T,$$

gdje je $\Delta \tilde{S}_i = \tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}$, $1 \leq i \leq T$.

(e) (3 boda) Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ i da je strategija ϕ samofinancirajuća. Dokažite da je $\{\frac{V_t(\phi)}{S_t^0} : 0 \leq t \leq T\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal u odnosu na prirodnu filtraciju.

Rješenje:

(a) Strategija trgovanja je predvidivi slučajni proces $\phi = \{\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 0 \leq t \leq T\}$. Kažemo da je strategija trgovanja ϕ samofinancirajuća, ako vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \quad \text{za sve } \; 0 \leq t \leq T-1 \,.$$

(b) Strategija ϕ je dopustiva, ako je samofinancirajuća te ako vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t \geq 0 \quad \text{za sve } \; 0 \leq t \leq T \,.$$

Kažemo da je strategija arbitraža ako je dopustiva te vrijedi

$$\phi_0 \cdot S_0 = 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(S_T \cdot \phi_T > 0) > 0 \,.$$

Tržište ne dopušta arbitražu ako ni jedna dopustiva strategija nije arbitraža.

(c) Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je ekvivalentna martingalna mjera ako vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ te za sve $0 \leq t \leq T-1$

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i \text{ za sve } \; i \in \{0, 1, \dots, d\} \,.$$

Gornja formula zapravo znači da su diskontirane cijene financijskih imovina $\mathbb{P}^*$-martingali.

(d) Vrijednost strategije ϕ je definirana s $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$, $0 \leq t \leq T$. Ako je ϕ samofinancirajuća, onda je $\phi_{i+1} \cdot \tilde{S}_i = \phi_i \cdot \tilde{S}_i$ za $0 \leq i \leq T-1$ pa je

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(\phi) &= \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{i=1}^{t}(\tilde{V}_i(\phi) - \tilde{V}_{i-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{t}(\phi_i \cdot \tilde{S}_i - \phi_{i-1} \cdot \tilde{S}_{i-1}) \\ &= V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{t}(\phi_i \cdot \tilde{S}_i - \phi_i \cdot \tilde{S}_{i-1}) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot \Delta\tilde{S}_i.\end{aligned}$$

(e) Vrijedi

$$\mathbb{E}^*[\tfrac{V_{t+1}(\phi)}{S^0_{t+1}}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tfrac{\phi_{t+1} \cdot S_{t+1}}{S^i_{t+1}}|\mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^{d} \phi^i_{t+1}\mathbb{E}^*[\tilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^{d} \phi^i_{t+1}\tilde{S}^i_t = \sum_{i=0}^{d} \phi^i_t\tilde{S}^i_t = \tfrac{V_t(\phi)}{S^0_t}\,,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili predvidivost procesa ϕ i S^0, definiciju ekvivalentne martingalne mjere te činjenicu da je ϕ samofinancirajuća.

Martingalnost se mogla vidjeti na još jedan način. Naime, iz (d) slijedi da je $\frac{V_t(\phi)}{S^0_t} = \tilde{V}_t(\phi)$ suma konstante i martingalne transformacije $\mathbb{P}^*$-martingala pa je i sama $\mathbb{P}^*$-martingal.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenucima trgovanja $0, 1, 2, \ldots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Kamatna stopa je $r > 0$.

(a) (2 boda) Definirajte dostižni slučajni zahtjev i potpuno tržište.

(b) (2 boda) Iskažite teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete da bi tržište bilo potpuno.

(c) (6 bodova) Dokažite teorem iz (b).

(d) (4 boda) Pretpostavimo da je tržište potpuno i da je $S_t^0 = (1+r)^t$, $0 \leq t \leq T$. Neka su $C = (S_T^1 - K)^+$ i $P = (K - S_T^1)^+$ call i put opcije na prvu financijsku imovinu s dospijećem T i cijenom izvršenja K. Označimo sa C_t i P_t njihove vrijednosti u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$. Dokažite call-put paritet

$$C_t - P_t = S_t^1 - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}, \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Rješenje:

(a) Slučajni zahtjev C je dostižan, ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$. Tržište je potpuno ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

(b) Model tržista bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jednistvena ekvivalentna martingalna mjera.

(c) Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun. Neka je C slučajni zahtjev i neka je ϕ dopustiva strategija takva da je $C = V_T(\phi)$. Tada vrijedi

$$\tfrac{C}{S_T^0} = \tilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{T} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j$$

pa za ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ vrijedi

$$\mathbb{E}^*[\tfrac{C}{S_T^0}] = V_0(\phi).$$

Promatrajući slučajni zahtjev $\frac{C}{S_T^0}$ za dvije ekvivalentne martingalne mjere $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ dobijemo $\mathbb{E}_1 C = \mathbb{E}_2 C$ za sve slučajne zahtjeve C. Budući da je $C \ \ \mathcal{F}_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$-izmjeriva, uzimajući $C = 1_{\{\omega\}}$, $\omega \in \Omega$, dobijemo $\mathbb{P}_1(\{\Omega\}) = \mathbb{P}_2(\{\Omega\})$ za sve $\omega \in \Omega$, tj. $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

Obratno, pretpostavimo da tržište bez arbitraže nije potpuno. Tada postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definiramo vektorski prostor

$$\mathcal{V} = \{U_0 + \sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t : U_0 \ \ \mathcal{F}_0\text{-izmjeriva},$$

$$\phi = \{\phi_t = (\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T\} \text{ predvidivi proces}\}.$$

Nadopunimo li slučajni proces ϕ iz definicije prostora $\mathcal{V}$ do samofinancirajuće strategije, dobijemo da je

$$\mathcal{V} = \{\tilde{V}_T(\phi) : \phi \text{ samofinancirajuća strategija}\}.$$

Budući da C nije dostižan, ne može se dostići samofinancirajućom strategijom, tj. $\frac{C}{S_T^0} \notin \mathcal{V}$, otkud slijedi da je

$$\mathcal{V} \text{ pravi potprostor od } \mathcal{M} = \{X : X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ sl. var..}\}$$

Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Definirajmo na $\mathcal{M}$ skalarni produkt

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}^*[XY], \quad X, Y \in \mathcal{M}.$$

Tada postoji $X \in \mathcal{M}$, $X \neq 0$ takva da je X ortogonalna na $\mathcal{V}$, tj. $\langle X, Y \rangle = 0$ za sve $Y \in \mathcal{V}$.

Definirajmo novu mjeru

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = (1 + \tfrac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty})\mathbb{P}^*(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega,$$

gdje je $\|X\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$. Uzmemo li $U_0 = 1$ i $\phi = 0$, dobijemo da je $1 \in \mathcal{V}$ pa je

$$0 = \langle 1, X \rangle = \mathbb{E}^*[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\}).$$

Zato je

$$\sum_{\omega\in\Omega} P^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} P^*(\{\omega\}) + \tfrac{1}{2\|X\|_\infty} \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = 1 + 0 = 1,$$

tj. $\mathbb{P}^{**}$ je vjerojatnosna mjera. Budući da je $1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 1 - \frac{1}{2} > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, slijedi da su $\mathbb{P}^{**}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne pa je $\mathbb{P}^{**} \approx \mathbb{P}$. Provjerimo još da je $\mathbb{P}^{**}$ martingalna mjera. Neka je $\phi = \{\phi_t = (\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 0 \leq t \leq T\}$ predvidivi proces. Tada je

$$\mathbb{E}^{**}[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] = \mathbb{E}^*[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] + \tfrac{1}{2\|X\|_\infty}\mathbb{E}^*[X \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] = 0 + 0 = 0,$$

jer je prvi sumand martingal kao martingalna transormacija martingala pa je jednak $E^*[\phi_1 \cdot \Delta\tilde{S}_1] = \sum_{i=1}^d \phi_1^i(\mathbb{E}^*[\tilde{S}_1^i] - \tilde{S}_0^i) = 0$, dok je drugi sumand jednak 0 zbog ortogonalnosti. Dakle, $\{\tilde{S}_t : 0 \leq t \leq T\}$ je $\mathbb{P}^{**}$-martingal pa je $\mathbb{P}^{**}$ je ekvivalentna martingalna mjera i $\mathbb{P}^{**} \neq \mathbb{P}^*$ (zbog $X \neq 0$), čime smo došli do kontradikcije.

(d) Neka je $\mathbb{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera i neka su ϕ i ψ replicirajući portfelji za C i P, redom. Tada je $C_t = V_t(\phi)$ i $P_t = V_t(\psi)$, za $t = 0, 1, \ldots, T$. Budući da je $\{\tilde{V}_t(\phi) : 0 \leq t \leq T\}$ martingal i $C - P = (S_T^1 - K)^+ - (K - S_T^1)^+ = S_T^1 - K$, dobijemo

$$\begin{aligned} C_t - P_t = V_t(\phi) - V_t(\psi) &= (1+r)^t\mathbb{E}^*[\tfrac{C}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_t] - (1+r)^t\mathbb{E}^*[\tfrac{P}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^t\mathbb{E}[\tfrac{C-P}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_t] = (1+r)^t\mathbb{E}[\tfrac{S_T^1-K}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^t\tfrac{S_t^1}{(1+r)^t} - \tfrac{K}{(1+r)^{T-t}} = S_t^1 - \tfrac{K}{(1+r)^{T-t}}. \end{aligned}$$