MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

2. kolokvij - 6. veljače 2015.

(Knjige, bilježnice i dodatni papiri **nisu** dozvoljeni! Kalkulatori su dozvoljeni.)

1. Neka je $Z = \{Z_t : 0 \le t \le T\}$ adaptirani slučajni proces definiran na filtriranom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

(a) (2 boda) Definirajte Snellov omotač $U = \{U_t : 0 \le t \le T\}$ slučajnog procesa Z.

(b) (2 boda) Dokažite da je $\tau_0 := \min\{t \ge 0 : U_t = Z_t\}$ vrijeme zaustavljanja.

(c) (4 boda) Dokažite da je zaustavljeni proces $U^{\tau_0} = \{U_{\tau_0 \wedge t} : 0 \le t \le T\}$ martingal.

(d) (4 boda) Neka je $T = 3$ i neka su $Z_t \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 3$ nezavisne slučajne varijable. Odredite Snellov omotač $U = \{U_t : 0 \le t \le 3\}$ slučajnog procesa $Z = \{Z_t : 0 \le t \le 3\}$ te izračunajte $\mathbb{E}U_{\tau_0}$, gdje je τ_0 vrijeme zaustavljanja iz (b).

Rješenje:

(a) Snellov omotač $U = \{U_t : 0 \le t \le T\}$ je definiran sa

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max\{Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\}\,, \quad 0 \le t \le T-1\,. \end{aligned}$$

(b) Vrijedi $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$, te za $1 \le t \le T$,

$$\{\tau_0 = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \{U_1 > Z_1\} \cap \ldots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t$$

pa je τ_0 vrijeme zaustavljanja.

(c) Primijetimo da za $0 \le t \le T-1$ vrijedi

$$\begin{aligned} U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t &= U_{(t+1)\wedge\tau_0} - U_{t\wedge\tau_0} \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}(U_{t+1} - U_t) + 1_{\{t+1>\tau_0\}}(U_{\tau_0} - U_{\tau_0}) \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]), \end{aligned}$$

budući da za $\omega \in \{\tau_0 \ge t+1\}$ vrijedi $U_t(\omega) > Z_t(\omega)$ pa je $U_t(\omega) = \max\{Z_t(\omega), \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t](\omega)\} = \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t](\omega)$. Stoga je, zbog $\{\tau_0 \ge t+1\} = \{\tau_0 \le t\}^c \in \mathcal{F}_t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[1_{\{t+1\le\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t])|\mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}\mathbb{E}[U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}\left(\mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\right) = 0\,. \end{aligned}$$

(d) Trebamo odrediti slučajni proces $U = \{U_t : 0 \leq t \leq 3\}$ takav da je

$$\begin{aligned} U_3 &= Z_3\,, \\ U_t &= \max\{Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]\}\,, \quad 0 \leq t \leq 2\,. \end{aligned}$$

Dakle, $U_3 = Z_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{E}U_3 = \mathbb{E}Z_3 = 5/3$. Nadalje, zbog nezavisnosti vrijedi

$$\begin{aligned} U_2 &= \max\{Z_2, \mathbb{E}[U_3|\mathcal{F}_2]\} = \max\{Z_2, \mathbb{E}Z_3\} = \max\{Z_2, 5/3\} \sim \begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \\ \mathbb{E}U_2 &= 2 \\ U_1 &= \max\{Z_1, \mathbb{E}[U_2|\mathcal{F}_1]\} = \max\{Z_1, \mathbb{E}U_2\} = \max\{Z_1, 2\} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \\ \mathbb{E}U_1 &= 13/6 \\ U_0 &= \max\{Z_0, \mathbb{E}[U_1|\mathcal{F}_0]\} = \max\{Z_0, \mathbb{E}U_1\} = \max\{Z_0, 13/6\} \sim \begin{pmatrix} 13/6 & 3 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \\ \mathbb{E}U_0 &= 83/36\,. \end{aligned}$$

Budući je U^{τ_0} martingal, vrijedi $\mathbb{E}U_{\tau_0} = \mathbb{E}U_0 = 83/36$.

2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ filtrirani prostor, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ i $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

(a) (3 boda) Neka je $Z = \{Z_t : 0 \leq t \leq T\}$ adaptiran slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Definirajte optimalno vrijeme zaustavljanja za slučajni proces Z.

(b) (3 boda) Dokažite da je $\tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$ optimalno vrijeme zaustavljanja, gdje je $U = \{U_t : 0 \leq t \leq T\}$ Snellov omotač slučajnog procesa Z.

(c) (3 boda) Iskažite teorem o karakterizaciji optimalnih vremena zaustavljanja.

(d) (4 boda) Dokažite teorem iz (c).

Rješenje:

(a) Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno za slučajni proces Z ako vrijedi

$$\mathbb{E}Z_\tau = \sup_\sigma \mathbb{E}Z_\sigma$$

gdje se supremum uzima po svim vremenima zaustavljanja σ ograničenim s T.

(b) Budući da je U^{τ_0} martingal, slijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbb{E}[U_{\tau_0} | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\tau_0}] = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}]\,.$$

Neka je σ proizvoljno vrijeme zaustavljanja takvo da je $0 \leq \sigma \leq T$. Tada je U^σ supermartingal pa je

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U_T^\sigma | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\sigma] \geq \mathbb{E}[Z_\sigma]\,.$$

Dakle,

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma]\,.$$

(c) Neka je U Snellov omotač procesa Z. Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno ako i samo ako vrijedi:

$$Z_\tau = U_\tau \quad \text{i} \quad U^\tau \text{ je martingal.}$$

(d) Pretpostavimo da je τ optimalno vrijeme zaustavljanja. Iz dijela (b) znamo da vrijedi

$$U_0 = \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma] = \mathbb{E}[Z_\tau] \leq \mathbb{E}[U_\tau] \leq U_0,$$

odakle dobijemo $\mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[U_\tau]$, a budući je $U_\tau \geq Z_\tau$, slijedi da je $U_\tau = Z_\tau$. S druge strane, budući je U^τ supermartingal, za $0 \leq t \leq T$ slijedi da je

$$\mathbb{E}[U_\tau] = U_0 \geq \mathbb{E}[U_t^\tau] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\tau | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[U_T^\tau] = \mathbb{E}[U_\tau],$$

, odakle, zbog $U_t^\tau \geq \mathbb{E}[U_T^\tau | \mathcal{F}_t]$, slijedi

$$U_t^T = \mathbb{E}[U_T^\tau | \mathcal{F}_t]$$

pa je U^τ martingal. Obratno, ako je $Z_\tau = U_\tau$ i U^τ martingal, onda vrijedi

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \mathbb{E}[Z_\sigma] = U_0 = \mathbb{E}[U_T^\tau] = E[U_\tau] = \mathbb{E}[Z_\tau]$$

pa je τ optimalno vrijeme zaustavljanja.

3.

(a) (2 boda) Definirajte američku call opciju i američku put opciju.

(b) (3 boda) Matematički dokažite da na potpunom tržištu američka call-opcija ne može vrijediti više od europske call-opcije.

(c) (3 boda) Nalazimo se u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. Vrijednost P_t američke put opcije dana je formulom $P_t = p_{\mathrm{am}}(t, S_t)$ za neku funkciju $p_{\mathrm{am}} : \{0, 1 \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Napišite formulu za funkciju p_{am}.

(d) (5 bodova) Dokažite formulu iz (c).

Rješenje:

(a) *Američka call opcija* s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T. Alternativno, američka call opcija je američki slučajni zahtjev $Z_t = (S_t - K)^+$.

Američka put opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T. Alternativno, američka put opcija je američki slučajni zahtjev $Z_t = (K - S_t)^+$.

(b) Vrijednosti američke i europske call-opcije s cijenom izvršenja K u trenutku $0 \le t \le T$ dane su, redom, s

$$\begin{aligned} Z_t &= (S_t - K)^+ \\ C_t &= (1+r)^{t-T}\mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} C_t &\ge (1+r)^t \mathbb{E}^* \left[\frac{S_T}{(1+r)^T} - \frac{K}{(1+r)^T} | \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^t \frac{S_t}{(1+r)^t} - (1+r)^{t-T} K \\ &\ge S_t - K, \end{aligned}$$

jer je $\left\{ \frac{S_t}{(1+r)^t} : 0 \le t \le T \right\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Zbog $C_t \ge 0$, $0 \le t \le T$, dobijemo

$$C_t \ge (S_t - K)^+ = Z_t, \quad 0 \le t \le T,$$

što je i trebalo pokazati.

(c) Funkciju $p_{\,\mathrm{am}}$ dana je formulom

$$\begin{aligned} p_{\,\mathrm{am}}(T,x) &= (K-x)^+\,, \\ p_{\,\mathrm{am}}(t,x) &= \max\left\{(K-x)^+, \frac{f(t+1,x)}{1+r}\right\}\,, \quad 0\le t<T\,, \end{aligned}$$

gdje je $f:\{0,1,\ldots,T\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(t,x) := (1-p^*)p_{\,\mathrm{am}}(t,x(1+a)) + p^*p_{\,\mathrm{am}}(t,x(1+b))\,.$$

(d) U CRR modelu je $S=\{S_t : 0\le t\le T\}$ Markovljev lanac s matricom prijelaza Q danom s

$$Q(x,x(1+a)) = 1-p^*, \quad Q(x,x(1+b)) = p^*, \quad p^* = \frac{r-a}{b-a}\,.$$

Vrijednost američke put opcije je dana s

$$U_t = p_{\,\mathrm{am}}(t,S_t),$$

gdje je $\{(1+r)^{-t}U_t : 0\le t\le T\}$ Snellov omotač sl. procesa $Z=\{Z_t : 0\le t\le T\}$, $Z_t=(1+r)^{-t}(K-S_t)^+$, tj.

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max\{Z_t,(1+r)^{-1}\mathbb{E}^*[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}, \quad 0\le t\le T-1\,, \end{aligned}$$

a, budući je S Markovljev lanac, slijedi da je $(1+r)^{-t}U_t = u(t,S_t)$, $0\le t\le T$, gdje je

$$\begin{aligned} u(T,x) &= (1+r)^{-T}(K-x)^+, \\ u(t,x) &= \max\{(1+r)^{-t}(K-x)^+, Qu(t+1,x)\}, \quad 0\le t\le T-1\,. \end{aligned}$$

Dakle, $p_{\,\mathrm{am}}(t,x) = (1+r)^t u(t,x)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} p_{\,\mathrm{am}}(T,x) &= (K-x)^+, \\ p_{\,\mathrm{am}}(t,x) &= \max\{(K-x)^+,(1+r)^t Qu(t+1,x)\}, \quad 0\le t\le T-1\,. \end{aligned}$$

Još je preostalo izračunati

$$\begin{aligned} Qu(t+1,x) &= Q(x,x(1+a))u(1+t,x(1+a)) + Q(x,x(1+b))u(t+1,x(1+b)) \\ &= (1-p^*)u(t+1,x(1+a)) + p^*u(t+1,x(1+b)) \\ &= (1+r)^{-t-1}\left[(1-p^*)p_{\,\mathrm{am}}(t+1,x(1+a)) + p^*p_{\,\mathrm{am}}(t+1,x(1+b))\right] \\ &= (1+r)^{-t-1}f(t+1,x), \end{aligned}$$

odakle slijedi formula iz (c) .

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.4$ (relativne promjene cijena dionice), te $r = 0.01$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu). Početna cijena dionice je $S_0 = 500.00$ Kn. Promatramo američku put opciju $Z_t = (K - S_t)^+$ s danom dospijeća $T = 3$ i cijenom izvršenja $K = 450.00$ Kn.

(a) (6 bodova) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost američke put opcije.

(b) (3 boda) Nađite trenutak u kojem je optimalno iskoristiti danu američku put opciju. Objasnite!

(c) (3 boda) Cijena dionice raste samo u zadnjem periodu. Kupac opcije odlučio je opciju iskoristiti u trenutku $T = 3$. Izračunajte profit pisca opcije ako slijedi hedging portfelj.

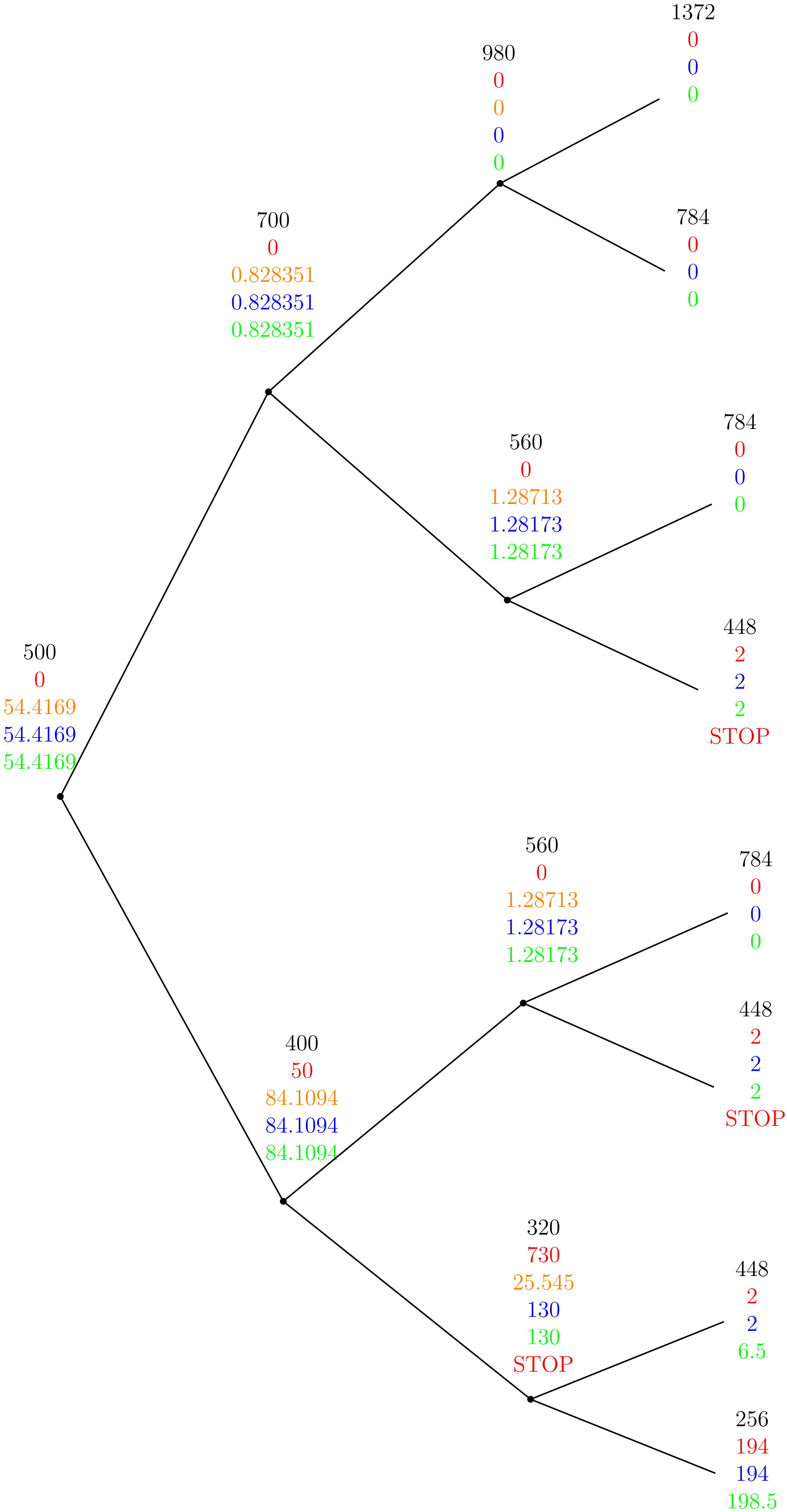
Rješenje:

(a) Pogledajte sliku na sljedećoj stranici.

(b) Tražimo vrijeme τ takvo da je $Z_\tau = U_\tau$ te da je U^τ martingal (tj. $U^\tau = M^\tau$) (v. sliku na sljedećoj stranici). Alternativno, u ovom slučaju se radi o $\tau = \tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$, što jest optimalno vrijeme zaustavljanja.

(c) Vrijednost opcije u traženom čvoru je 2, dok je vrijednost hedging portfelja 6.5 pa je profit pisca opcije jednak $6.5 - 2 = 4.5$.

Legenda: S_t vrijednost dionice, $Z_t = (K - S_t)^+$ unutarnja vrijednost opcije, $\frac{1}{1+r} f(t+1, S_t) = \frac{p^* U^{\uparrow}_{t+1} + (1-p^*) U^{\downarrow}_{t+1}}{1+r}$, $U_t = \max\{Z_t, \frac{1}{1+r} f(t+1, S_t)\}$ vrijednost opcije, M_t vrijednost portfelja, STOP optimalno vrijeme zaustavljanja


1372
0
0
0
980
0
0
0
0
784
0
0
0
700
0
0.828351
0.828351
0.828351
784
0
0
0
560
0
1.28713
1.28173
1.28173
448
2
2
2
STOP
500
0
54.4169
54.4169
54.4169
560
0
1.28713
1.28173
1.28173
784
0
0
0
448
2
2
2
STOP
400
50
84.1094
84.1094
84.1094
320
730
25.545
130
130
STOP
448
2
2
6.5
256
194
194
198.5