MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

1. kolokvij - 28. studenog 2014.

(Knjige, bilježnice i dodatni papiri **nisu** dozvoljeni! Kalkulatori su dozvoljeni.)

1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, i dvije financijske imovine. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu jednaka je $r = 0.05$, dok se rizična imovina modelira na sljedeći način:

$$S_0^1 = 100,\ S_1^1(\omega_1) = 80,\ S_1^1(\omega_2) = 150,\ S_1^1(\omega_3) = 130\,.$$

(a) (4 boda) Izračunajte skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{P}$.

(b) (2 boda) Dopušta li ovaj model tržišta arbitražu? Obrazložite.

(c) (2 boda) Je li ovaj model tržista potpun? Obrazložite.

(d) (4 boda) Neka je $C = (S_1^1 - 80)^+$ call opcija na rizičnu imovinu s cijenom izvršenja $K = 80$. Da li je C dostižan slučajni zahtjev? Obrazložite.

Rješenje:

(a) Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera, te neka je $p_i^* = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$. Tada je $S_0^1 = \mathbb{E}^*[\tilde{S}_1^1]$. Zato vrijede sljedeće dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} 105 &= 80p_1^* + 150p_2^* + 130p_3^* \\ 1 &= p_1^* + p_2^* + p_3^*\,. \end{aligned}$$

Ako uvedemo $\lambda := p_1^*$, onda iz gornjih jednadžbi slijedi $p_2^* = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2}\lambda$ i $p_3^* = \frac{9}{4} - \frac{7}{2}\lambda$. Iz $p_1^*, p_2^*, p_3^* \in (0, 1)$ slijedi

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < -\frac{5}{4} + \frac{5}{2}\lambda < 1 \quad 0 < \frac{9}{4} - \frac{7}{2}\lambda < 1\,.$$

Odavde dobivamo $\lambda \in (0, 1) \cap (\frac{1}{2}, \frac{9}{10}) \cap (\frac{5}{14}, \frac{9}{14}) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{14})$. Dakle

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\lambda, -\frac{5}{4} + \frac{5}{2}\lambda, \frac{9}{4} - \frac{7}{2}\lambda \right) :\, \frac{1}{2} < \lambda < \frac{9}{14} \right\}.$$

Alternativno,

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\lambda, \lambda, \frac{1}{2} - \frac{7}{5}\lambda \right) :\, 0 < \lambda < \frac{5}{14} \right\}$$

ili

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(\frac{9}{14} - \frac{2}{7}\lambda, \frac{5}{14} - \frac{5}{7}\lambda, \lambda \right) :\, 0 < \lambda < \frac{1}{2} \right\}.$$

(b) Budući da je skup ekvivalentnih martingalnih mjera neprazan, model tržišta ne dopušta arbitražu po prvom fundamentalnom teoremu.

(c) Budući da ekvivalentna martingalna mjera u ovom modelu nije jedinstvena, po drugom fundamentalnom teoremu ovaj model nije potpun.

(d) Tražimo portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ koji replicira slučajni zahtjev C, tj. $\phi \cdot S_1 = C$. Dakle, treba vrijediti:

$$\begin{aligned} 1.05\phi^0 + 80\phi^1 &= C(\omega_1) = 0 \\ 1.05\phi^0 + 150\phi^1 &= C(\omega_2) = 150 - 80 = 70 \\ 1.05\phi^0 + 130\phi^1 &= C(\omega_3) = 130 - 80 = 50\,. \end{aligned}$$

Oduzimanjem zadnje dvije jednadžbe dobijemo $\phi^1 = 1$, a onda iz prve jednadžbe $\phi^0 = -80/1.05 = -76.1905$. Stoga je $\phi = (-76.1905, 1)$ replicirajući portfelj za call opciju C.

Primijetimo da je moguće da neki slučajni zahtjevi budu dostižan unatoč tome što je tržiste nepotpuno.

Dostižnost se na drugi način mogla vidjeti ovako. Budući je skup svih nearbitražnih cijena

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \right\}$$

jednočlan, jer je

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = \frac{70}{1.05} \left(-\frac{5}{4} + \frac{5}{2}\lambda \right) + \frac{50}{1.05} \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{2}\lambda \right) = \frac{100}{1.05}$$

za sve $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{9}{14})$ pa ako C ne bi bio dostižan, onda bi $\Pi(C)$ bio otvoreni interval, što nije.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

2. Promotrimo jednoperiodni model financijskog tržista s jednom nerizičnom i d rizičnih imovina ($d \geq 1$) koji ne dopušta arbitražu. Neka je C slučajni zahtjev na tom tržistu.

(a) (3 boda) Definirajte nearbitražnu cijenu π^C slučajnog zahtjeva C i dokažite da je skup svih nearbitražnih cijena slučajnog zahtjeva C dan s

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \right\},$$

gdje je $\mathcal{P}$ skup svih ekvivalentnih martingalnih mjera i $r > 0$ kamatna stopa na nerizičnu imovinu.

(b) (1 boda) Definirajte dostižni slučajni zahtjev.

(c) (3 boda) Ako je C dostižan, dokažite da je $\Pi(C)$ jednočlan.

(d) (5 bodova) Ako C nije dostižan, dokažite da je $\Pi(C)$ otvoreni intrerval.

Rješenje:

(a) Realni broj $\pi^C \geq 0$ je nearbitražna cijena slučajnog zahtjeva C ako je novi model tržišta proširen s $S_0^{d+1} = \pi^C$ i $S_1^{d+1} = C$ bez arbitraže.

$\boxed{\subseteq}$ Ako je $\pi^C \in \Pi(C)$ nearbitražna cijena, onda po prvom fundamentalnom teoremu postoji ekvivalentna martingalna mjera $\tilde{\mathbb{P}}$ za prošireno tržište. Specijalno, vrijedi

$$S_0^i = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{S_1^i}{1+r} \right], \quad i = 0, 1, \ldots, d$$

pa je $\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$ te vrijedi $\pi^c = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{C}{1+r} \right]$.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ i $\pi^C = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right]$. Tada je $\mathbb{P}^*$ ekivalentna martingalna mjera i za prošireno tržište pa je $\pi^C \in \Pi(C)$.

(b) Slučajni zahtjev C je dostižan ako postoji portfelj $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$ takav da je

$$C = \phi \cdot S_1 = \phi^0(1+r) + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i \,.$$

(c) Neka je $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ i neka je ϕ replicirajući portfelj za C. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = \mathbb{E}^* \left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r} \right] = \phi \cdot S_0.$$

Iz gornjih jednakosti zaključujemo:

- $\phi \cdot S_0 = \psi \cdot S_0$ za svaki replicirajući portfelj ψ za C,
- $\phi \cdot S_0 = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right]$ za svaku ekvivalentnu martingalnu mjeru $\tilde{P} \in \mathcal{P}$.

Dakle, $\Pi(C) = \{\phi \cdot S_0\}$ je jednočlan.

(d) Očito je $\Pi(C) \neq \emptyset$ (jer je $\mathcal{P} \neq \emptyset$) i omeđen. Zbog konveksnosti skupa $\mathcal{P}$ je i $\Pi(C)$ konveksan. Naime, za $\pi_1^C, \pi_2^C \in \Pi(C)$ postoje $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$ takvi da je $\pi_i^C = \mathbb{E}_i\left[\frac{C}{1+r}\right], i = 1, 2$ pa za $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$(1-\lambda)\pi_1^C + \lambda\pi_2^C = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] \in \Pi(C),$$

gdje je $\mathbb{P}^* = (1-\lambda)\mathbb{P}_1 + \lambda\mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$. Dakle $\Pi(C)$ je omeđen, neprazan i konveksan podskup od $\mathbb{R}$ pa mora biti interval. Dokažimo da je otvoreni interval.

Uzmimo $\pi \in \Pi(C)$ i pronađimo $\check{\pi}, \hat{\pi} \in \Pi(C)$ takve da je

$$\check{\pi} < \pi < \hat{\pi}\,.$$

Neka je $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ takav da je $\pi = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right]$. Zbog nedostižnosti C vrijedi $C \notin \mathcal{W}$, gdje je

$$\mathcal{W} = \{\phi \cdot S_1 : \phi \in \mathbb{R}^{d+1} \ \text{ portfelj}\}\,.$$

Budući je $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$, $\mathcal{W}$ možemo shvatiti kao vektorski potprostor od $\mathbb{R}^K$ pa po teoremu separacije (v. Lemu 1.7 (b) u skripti) postoji linearni funkcional $\xi : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ takav da je

$$\xi(W) = 0 \ \text{ za sve } \ W \in \mathcal{W} \ \text{ i } \ \xi(C) > 0\,. \tag{*}$$

Funkcional ξ je reprezentiran vektorom $(\xi_1, \ldots, \xi_K) \in \mathbb{R}^K$ i bez smanjenja općentosti možemo pretpostaviti da je

$$|\xi_j| \leq \frac{1}{2}\min\{\mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) : j \in \{1, 2, \ldots, K\}\} \tag{@}$$

(jer u (*) možemo sve pomnožiti s $\frac{\frac{1}{2}\min_{j=1,\ldots,K}\mathbb{P}^*(\{\omega_j\})}{\max_{j=1,\ldots,K}|\xi_j|}$).

Definirajmo mjeru na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s

$$\hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) = \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j, \ j \in \{1, 2, \ldots, K\}\,.$$

Zbog (@) je $\hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) > \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) - \frac{1}{2}\mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) > 0$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, K\}$ i

$$\sum_{j=1}^K \hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) = \sum_{j=1}^K (\mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j) = 1 + \sum_{j=1}^k \xi_j = 1,$$

jer je $1 = \frac{1}{1+r}(1+r) \in \mathcal{W}$ pa je $0 = \xi(1) = \sum_{j=1}^K \xi_j$. Dakle, $\hat{\mathbb{P}}$ je vjerojatnosna mjera i ekvivalentna je s $\mathbb{P}^*$. Dokažimo da je i martingalna mjera. Primijetimo da za slučajnu varijablu $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\hat{\mathbb{E}}Z = \sum_{j=1}^K Z(\omega_j)\hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) = \mathbb{E}^*Z + \sum_{j=1}^K \xi_j Z(\omega_j) = \mathbb{E}^*Z + \xi(Z)\,. \tag{♠}$$

Specijalno, $\hat{\mathbb{E}}W = \mathbb{E}^*W$ za sve $W \in \mathcal{W}$ odakle dobijemo

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] = S_0^i, \text{ za sve } \ i \in \{0, 1, \ldots, d\}$$

pa je $\hat{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$. Također, iz (♠) i $\xi(C) > 0$ dobijemo

$$\hat{\pi} := \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbb{E}^*C + \xi(C)}{1+r} > \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi\,.$$

Slično, definiravši mjeru $\check{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) = \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) - \xi_j$, za $j \in \{1, 2, \ldots, K\}$ se pokaže da je $\check{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$ i

$$\check{\pi} := \check{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbb{E}^*C - \xi(C)}{1+r} < \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi\,.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

3. Promatramo dinamički model financijskog tržista s trenucima trgovanja $0, 1, 2, \ldots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$).

(a) (2 boda) Definirajte strategiju trgovanja (dinamički portfelj) i samofinancirajuću strategiju trgovanja.

(b) (3 boda) Definirajte dopustivu strategiju, arbitražu i tržište koje ne dopušta arbitražu.

(c) (2 boda) Definirajte ekvivalentnu martingalnu mjeru (mjeru neutralnu na rizik).

(d) (3 boda) Definirajte dostižni slučajni zahtjev i potpuno tržište. Iskažite teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete da bi tržiste bilo potpuno.

(e) (3 boda) Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera. Dokažite da tržište ne dopušta arbitražu.

Rješenje:

(a) Strategija trgovanja je predvidivi slučajni proces $\phi = \{(\phi_t^0, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T\}$. Kažemo da je strategija trgovanja ϕ samofinancirajuća, ako vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \quad \text{za sve} \;\; 0 \leq t \leq T-1\,.$$

(b) Strategija ϕ je dopustiva, ako je samofinancirajuća te ako vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t \geq 0 \quad \text{za sve} \;\; 0 \leq t \leq T\,.$$

Kažemo da je strategija arbitraža ako je dopustiva te vrijedi

$$\phi_0 \cdot S_0 = 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(S_T \cdot \phi_T > 0) > 0\,.$$

Tržište ne dopušta arbitražu ako ni jedna dopustiva strategija nije arbitraža.

(c) Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je ekvivalentna martingalna mjera ako vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ te za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i \text{ za sve } \; i \in \{0, 1, \ldots, d\}\,.$$

Gornja formula zapravo znači da su diskontirane cijene financijskih imovina $\mathbb{P}^*$-martingali.

(d) Kažemo da je slučajni zahtjev C dostižan ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $\phi_T \cdot S_T = C$. Tržiste je potpuno ako je svaki slučajni zahtjev dostižan. Da bi tržište bilo putpuno nužno je i dovoljno da postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.

(e) Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Neka je $\phi = \{(\phi_t^1, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 0 \le t \le T\}$ dopustiva strategija takva da je $\phi_0 \cdot S_0 = 0$. Primijetimo da zbog dopustivosti vrijedi

$$
\begin{aligned}
\phi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_t &= \phi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot (\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}) \\
&= \phi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot \tilde{S}_i - \sum_{i=0}^{t-1} \phi_{i+1} \cdot \tilde{S}_i \\
&= \phi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \cdot \tilde{S}_i - \sum_{i=0}^{t-1} \phi_i \cdot \tilde{S}_i = \phi_t \cdot \tilde{S}_t \,,
\end{aligned}
$$

za $1 \le t \le T$. Budući su $\{\tilde{S}_t^i : 0 \le t \le T\}$ $\mathbb{P}^*$-martingali za sve $i \in \{0, 1 \ldots, d\}$, slijedi da je i proces $\tilde{V}(\phi) = \{\tilde{V}_t(\phi) : 0 \le t \le T\}$ definiran s

$$
\tilde{V}_t(\phi) = \phi_t \cdot \tilde{S}_t = \phi_0 \cdot S_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t, \ 0 \le t \le T
$$

martingal kao martingalna transformacija. Zato je

$$
\mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_0(\phi)] = 0 \,. \qquad (*)
$$

Zbog dopusivosti je $\mathbb{P}(\tilde{V}_T(\phi) \ge 0) = 1$ pa je i $\mathbb{P}^*(\tilde{V}_T(\phi) \ge 0) = 1$. Stoga je zbog (*) $\mathbb{P}(\tilde{V}_T(\phi) = 0) = 1$ pa ϕ nije arbitraža.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $-1 < a < b$ (relativne promjene cijena dionice), r (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom T. Početna cijena dionice je S_0.

(a) (2 boda) Neka je $\hat{\mathbb{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Dokažite da je slučajni proces $\{\tilde{S}_t : 0 \leq t \leq T\}$ martingal ako i samo ako je

$$\hat{\mathbb{E}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = r \quad \text{za sve} \quad 1 \leq t \leq T\,.$$

(b) (4 boda) Dokažite da Cox-Ross-Rubinsteinov model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r < b$.

(c) (2 boda) Pretpostavimo da je Cox-Ross-Rubinsteinov model potpun. Iskažite i dokažite formulu za call-put paritet za europsku opciju s cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T.

(d) Neka su parametri u Cox-Ross-Rubinsteinov modelu zadani s $a = -0.1$, $b = 0.2$ i $r = 0.125$. Pretpostavimo da je vremenski horizont $T = 3$ i početna cijena dionice $S_0 = 100$. Promatramo up-and-in put opciju s cijenom izvršenja $K = 120$ i barijerom $B = 105$.

(d1) (3 boda) Odredite cijenu opcije.

(d2) (2 boda) Odredite replicirajući portfelj u slučaju da je $S_1 = 90$ i $S_2 = 108$.

Rješenje:

(a) Za $1 \leq t \leq T$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{E}}[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1} &\iff \hat{\mathbb{E}}[S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = (1+r)S_{t-1} \\
&\iff \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 + r \\
&\iff \hat{\mathbb{E}}\left[1 + X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 + r \\
&\iff \hat{\mathbb{E}}\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = r\,.
\end{aligned}$$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je

$$\mathbb{E}^*[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = r,$$

jer je $\{\tilde{S}_t : 0 \leq t \leq T\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Pretpostavimo da ne vrijedi $a < r < b$. Tada bi slučaju $r \leq a$ slijedilo

$$\mathbb{P}^*(X_t \geq r) = \mathbb{P}^*(X_1 \in \{a, b\}) = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}^*(X_t > r) = \mathbb{P}^*(X_1 > b) > 0,$$

pa ne bi vrijedilo $\mathbb{E}^*[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = r$, čime smo došli do kontradikcije. U slučaju $r \geq b$ na sličan način dolazimo do kontradikcije.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $a < r < b$ i pronađimo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Definirajmo

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \in (0,1)\,.$$

Neka je $\mathbb{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$, gdje je $\Omega_1 = \{a, b\}$, definirana s

$$\mathbb{P}_1^*(\{b\}) = p^* \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_1^*(\{a\}) = 1 - p^*\,.$$

Definirajmo na $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, gdje je $\Omega = \Omega_1^T$ tako da je

$$\mathbb{P}^*(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) = \mathbb{P}_1^*(\{\omega_1\}) \cdots \mathbb{P}_1^*(\{\omega_T\}),\ (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega\,.$$

Tada je $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ i $X_1, \ldots, X_T$ (definirane već u CRR modelu kao projekcije $X_t((\omega_1, \ldots, \omega_T)) = \omega_t$) su nezavisne i jednako distribuirane u odnosu na $\mathbb{P}^*$:

$$\mathbb{P}^*(X_t = a) = 1 - p^*, \quad \mathbb{P}^*(X_t = b) = p^*,\ 1 \le t \le T\,.$$

Zbog nezavisnosti je

$$\mathbb{E}^*[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^* X_t = (1-p^*)a + p^* b = r$$

pa je (npr. po (a)) slučajni proces $\{\tilde{S}_t : 0 \le t \le T\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Dakle, $\mathbb{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera.

(c) Na dan dospijeća vrijedi

$$C_T = (S_T - K)^+ \quad \text{i} \quad P_T = (K - S_T)^+\,.$$

Budući je model potpun, postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ te su slučajni zahtjevi C_T i P_T dostižni pa postoje dinamički portfelji ϕ i ψ takvi da je $V_T(\phi) = C_T$ i $V_T(\phi) = P_T$. Budući su $\tilde{V}(\phi)$ i $\tilde{V}(\psi)$ $\mathbb{P}^*$-martingali, vrijedi

$$\begin{aligned} C_0 - P_0 &= \tilde{V}_0(\phi) - \tilde{V}_0(\psi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_0(\phi) - \tilde{V}_0(\psi)] \\ &= \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi) - \tilde{V}_T(\psi)] = \mathbb{E}^*[(1+r)^{-T}(C_T - P_T)] \\ &= \mathbb{E}^*[(1+r)^{-T}((S_T - K)^+ - (K - S_T)^+)] = \mathbb{E}^*[(1+r)^{-T}(S_T - K)] \\ &= \mathbb{E}^*[S_0] - (1+r)^{-T}K = S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}\,. \end{aligned}$$

(d) Promatramo slučajni zahtjev $C_T = 1_{\{M>B\}}(K - S_T)^+$, gdje su $B = 105$ i $K = 120$. Primijetimo da je $p = \frac{r-a}{b-a} = 0.75$ pa cijenu opcije u svakon čvoru (v. Sliku 1) računamo po formuli za jedan period:

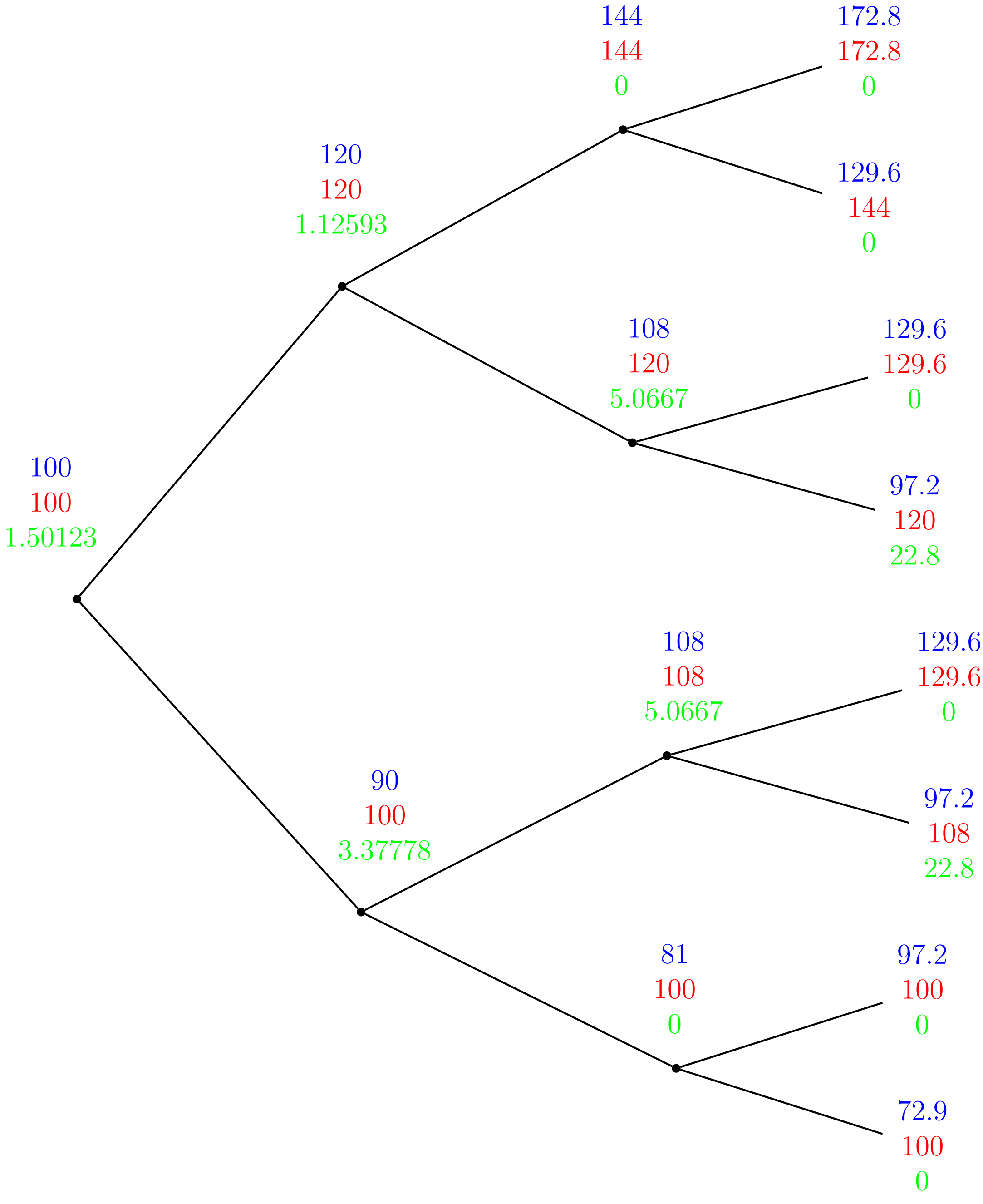
$$C_t = \frac{1}{1+r}\left[C_{t+1}^{\uparrow} p + C_{t+1}^{\downarrow}(1-p)\right].$$

Vrijednosti portfelja računamo pomoću formula

$$\phi_t^1 = \frac{C_t^{\uparrow} p + C_t^{\downarrow}(1-p)}{S_{t-1}(b-a)}, \phi_t^0 = (1+r)^{-(t-1)}(C_{t-1} - S_{t-1}\phi_t^1)\,.$$

(d1) Cijena opcije je $C_0 = 1.50123$.

(d2) Replicirajući portfelj je: $\phi_1 = (9.00741, -0.075067)$, $\phi_2 = (-12.0099, 0.187656)$, $\phi_3 = (64.0527, -0.703704)$



Slika 1: Legenda: S_t vrijednost dionice, M_t maksimum, C_t vrijednost opcije